

LUIZ MEDEIROS DE ARAUJO LIMA FILHO

**MODELOS SIMÉTRICOS NÃO LINEARES DE PRODUÇÃO  
E CRESCIMENTO EM VOLUME DE CLONES DE *Eucalyptus*  
spp.**

RECIFE-PE - OUTUBRO/2012.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

**MODELOS SIMÉTRICOS NÃO LINEARES DE PRODUÇÃO  
E CRESCIMENTO EM VOLUME DE CLONES DE *Eucalyptus*  
spp.**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Doutor.

**Área de Concentração: Modelagem Estatística Computacional**

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Aleixo da Silva  
Co-orientador: Prof. Dr. Rinaldo Luiz Caraciolo Ferreira

RECIFE-PE - OUT/2012.

Ficha catalográfica

L732m Lima Filho, Luiz Medeiros de Araujo  
Modelos simétricos não lineares de produção e  
crescimento em volume de clones de *Eucalyptus* spp. / Luiz  
Medeiros de Araujo Lima Filho. -- Recife, 2012.  
118 f. : il.

Orientador: José Antônio Aleixo da Silva.  
Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada) –  
Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento  
de Estatística e Informática, Recife, 2012.  
Inclui referências e apêndice.

1. Distribuições simétricas 2. Distribuições diamétricas  
3. Modelos volumétricos I. Silva, José Antônio Aleixo da,  
orientador II. Título

CDD 310

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**MODELOS SIMÉTRICOS NÃO LINEARES DE PRODUÇÃO E CRESCIMENTO EM**  
**VOLUME DE CLONES DE *Eucalyptus* spp.**

Luiz Medeiros de Araujo Lima Filho

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 01/10/2012 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

---

Prof. Dr. José Antônio Aleixo da Silva  
DCFL - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:

---

Prof. Dra. Tatijana Stosic  
DEINFO - Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Prof. Dra. Cláudia Regina Oliveira de Paiva Lima  
DE - Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Cristiano Ferraz  
DE - Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Otacílio Antunes Santana  
DBR - Universidade Federal de Pernambuco

Dedico, primeiramente, a minha família, a base de tudo. A minha esposa, Tarciana, com amor e carinho. A minha filha, Marina, um presente enviado por Deus.

## Agradecimentos

A Deus por me iluminar e fortalecer em todos os momentos da minha vida.

Aos meus pais pela criação maravilhosa, por todo amor dispensado e por estarem sempre presentes na minha vida, me orientando e apoiando.

À minha avó Reynildes pelo amor incondicional e por estar ao meu lado em todos os momentos.

À minha irmã Pollyanna por toda força e carinho que tanto me ajudou.

À minha esposa Tarciana, por todo seu amor incondicional, paciência, carinho e companheirismo.

A Agamenon, Vilma, Dayseane e Keyla por me acolherem, pelo crédito e por tudo que fizeram por mim.

À Kamyll e Bruna por todo o carinho com que sempre me receberam.

Ao professor Aleixo pela sua dedicada orientação, competência e atenção dispensada no desenvolvimento desta tese.

Ao professor Rinaldo Caraciolo pela confiança em mim depositada, dedicação e orientação.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos professores do Programa de Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada/UFRPE pelos conhecimentos transmitidos.

Aos meus colegas de turma pelas experiências trocadas e pelas lições apreendidas com cada um.

Aos colegas do Departamento de Estatística da Universidade Federal da Paraíba pela compreensão, apoio e incentivo dados durante o doutorado.

Aos participantes da banca examinadora pelas sugestões.

Enfim, a todos que colaboraram, diretamente e indiretamente, para realização deste trabalho.

*"Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim."*

**Chico Xavier**

## Resumo

O conhecimento do crescimento e da produção presente e futura de árvores em povoa-mentos florestais é elemento fundamental no manejo florestal sustentável. Desta forma, pretende-se nesta tese estimar a distribuição de frequência por classe diamétrica, estimar e comparar equações volumétricas via modelos simétricos não lineares, bem como, propor, ajustar e comparar modelos de crescimento em volume via modelos simétricos não lineares em clones de *Eucalyptus* spp. na região da Chapada do Araripe - PE. O experimento foi desenvolvido na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), localizada no município de Araripina - PE. Esse experimento é composto por 15 clones de *Eucalyptus* spp., resultantes de espécies e híbridos de cruzamento natural e polinização controlada. A base de dados foi composta por todas as árvores sobreviventes do experimento, que corresponde a 1189 árvores, dividida em três grupos. Para estimar as distribuições diamétricas foram adotadas as distribuições de probabilidade Normal, Weibull com três parâmetros, Log-normal e Gama. Em seguida, procedeu-se com os ajustes dos modelos volumétricos de Schumacher e Hall e de Spurr associados as seguintes distribuições simétricas: Normal, t de Student, Exponencial Potência e Logística II. Posteriormente, os modelos de crescimento em volume propostos nesta tese foram ajustados associados às mesmas distribuições simétricas. Na estimativa das distribuições diamétricas, os resultados foram similares nos três grupos, com destaque para a distribuição Log-normal. Essa distribuição foi a mais significativa na maior parte do período avaliado. Analisando as equações volumétricas, observou-se que o modelo de Schumacher e Hall obteve o melhor desempenho, quando associado as distribuições t de Student com três graus de liberdade e Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ ), respectivamente, para os grupos I e II. No grupo III, o modelo de Spurr associado a distribuição Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ ) obteve o melhor desempenho. Comparando os modelos de crescimento em volume, observou-se que os modelos propostos nesta tese obtiveram melhores ajustes, quando associados as distribuições t de Student com três graus de liberdade e Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ ), respectivamente, nos grupos I e III. No grupo II, o modelo de Chapman-Richards associado a distribuição t de Student com três graus de liberdade obteve o melhor desempenho.

**Palavras-chave:** Distribuições simétricas; distribuições diamétricas; modelos volumétricos.



## Abstract

Knowledge of growth and production present and future of trees in forest stands is a key element in sustainable forest management. It is intended in this thesis to estimate the frequency distribution by diameter class, estimate and compare volumetric equations via symmetric nonlinear models as well, propose to compare models and adjust volume growth via symmetrical nonlinear models in *Eucalyptus* spp. clones in the region of the Araripe - PE. The experiment was conducted at the Experimental Station of the Agricultural Research Company of Pernambuco (IPA), located in the municipality of Araripina - PE. This experiment consists of 15 clones of *Eucalyptus* spp., species and hybrids resulting from natural crossing and controlled pollination. The database is composed of all the survival trees of the experiment, corresponding to 1189 trees, divided into three groups. To estimate the diameter distributions were adopted probability distributions Normal, with three parameters Weibull, Log-normal and Gamma. The next step was to fit of the model of Schumacher and Hall and Spurr model associated the following symmetric distributions: Normal, Student t, Exponential Power and Logistics II. The volume growth models in this thesis were adjusted with symmetric distributions associated with them. In the estimation of the diameter distributions, the results were similar in the three groups, with emphasis on the Log-normal distribution. This distribution was the most appropriate for most of the period. Analyzing the volumetric equations, it was found that the model was Schumacher and Hall the most suitable, when associated with the Student t distribution with three degrees of freedom and Exponential Power ( $\tau = 0,8$ ) respectively to groups I and II. In group III, the model Spurr associated with Exponential Power ( $\tau = 0,8$ ) distribution had the best performance. Comparing the volume growth models, it was observed that the proposed models best fits obtained in this thesis, when the distributions associated with the Student t with three degrees of freedom and Exponential Power ( $\tau = 0,8$ ), respectively, in groups I and III. In group II, the Chapman-Richards model associated with Student t distribution with three degrees of freedom had the best performance.

**Key words:** Symmetric distributions; diameter distributions; volumetric models.

# Lista de Figuras

2.1	Densidade da distribuição Normal padrão . . . . .	11
2.2	Densidade da distribuição Log-normal . . . . .	12
2.3	Densidade da distribuição Weibull para $\beta = 3$ e diferentes valores de $\sigma$ (a) e diferentes valores de $\beta$ e $\sigma = 2$ (b) . . . . .	14
2.4	Densidade da distribuição Gama para $\alpha = 3$ e diferentes valores de $\beta$ (a) e diferentes valores de $\alpha$ e $\beta = 1$ (b) . . . . .	15
2.5	Densidades da distribuição t de Student ( $\nu = 3$ ) e distribuição Normal padrão.	27
2.6	Densidades da distribuição Exponencial Potência ( $\tau = 0,3$ ) e distribuição Normal padrão. . . . .	29
2.7	Densidades da distribuição Logística II padrão e distribuição Normal padrão.	31
3.1	Vista parcial do experimento . . . . .	35
3.2	Planta baixa da parcela . . . . .	36
4.1	Evolução do <i>DAP</i> , nas diferentes idades dos tratamentos (Grupo I). . . . .	47
4.2	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 12, 18 e 24 meses (Grupo I). . . . .	50
4.3	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 30, 36 e 42 meses (Grupo I). . . . .	51
4.4	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 48, 54 e 60 meses (Grupo I). . . . .	52
4.5	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 66, 72 e 78 meses (Grupo I). . . . .	53
4.6	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 84 e 90 meses (Grupo I). . . . .	54

4.7	Erro percentual dos modelos de Schumacher e Hall associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade (a), Schumacher e Hall associado a distribuição Normal (b) e Spurr associado a distribuição Normal (c) (Grupo I).	57
4.8	Erro percentual dos modelos de Schumacher e Hall modificado I associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade (a) e Chapman-Richards associado a distribuição Normal (b) (Grupo I).	61
4.9	Evolução do crescimento médio em volume ao longo do tempo (Grupo I).	62
4.10	Evolução do <i>DAP</i> , nas diferentes idades dos tratamentos (Grupo II).	64
4.11	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 12, 18 e 24 meses (Grupo II).	67
4.12	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 30, 36 e 42 meses (Grupo II).	68
4.13	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 48, 54 e 60 meses (Grupo II).	69
4.14	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 66, 72 e 78 meses (Grupo II).	70
4.15	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 84 e 90 meses (Grupo II).	71
4.16	Erro percentual dos modelos de Schumacher e Hall associado a distribuição Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ ) (a), Schumacher e Hall associado a distribuição Normal (b) e Spurr associado a distribuição Normal (c) (Grupo II).	74
4.17	Erro percentual dos modelos de Chapman-Richards associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade (a) e associado a distribuição Normal (b) (Grupo II).	78
4.18	Evolução do crescimento médio em volume ao longo do tempo (Grupo II).	79
4.19	Evolução do <i>DAP</i> , nas diferentes idades dos tratamentos (Grupo III).	81
4.20	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 12, 18 e 24 meses (Grupo III).	84
4.21	Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 30, 36 e 42 meses (Grupo III).	85

4.22 Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 48, 54 e 60 meses (Grupo III). . . . .	86
4.23 Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 66, 72 e 78 meses (Grupo III). . . . .	87
4.24 Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 84 e 90 meses (Grupo III). . . . .	88
4.25 Erro percentual do modelos de Spurr associado a distribuição Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ ) (a), Schumacher e Hall associado a distribuição Normal (b) e Spurr associado a distribuição Normal (c) (Grupo III). . . . .	91
4.26 Erro percentual dos modelos de Schumacher e Hall modificado II associado a distribuição Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ ) (a) e Chapman-Richards associado a distribuição Normal (b) (Grupo III). . . . .	95
4.27 Evolução do crescimento médio em volume ao longo do tempo (Grupo III). . . . .	96

# Lista de Tabelas

2.1	Expressões de $D$ , $a$ e $b$ para algumas distribuições simétricas. . . . .	34
3.1	Clones de <i>Eucalyptus</i> spp. usados no Módulo de Experimentação Florestal para a Região do Araripe, em Araripina-PE. . . . .	37
3.2	Agrupamento dos tratamentos após aplicação do teste Scott-Knott. . . . .	38
4.1	Taxa de mortalidade dos clones de <i>Eucalyptus</i> spp. por tratamento (Grupo I). . . . .	45
4.2	Estatística descritiva do $DAP$ , altura e volume dos clones de <i>Eucalyptus</i> spp., nas diferentes idades (Grupo I). . . . .	46
4.3	Seleção das equações de probabilidade de acordo com o teste KS (Grupo I). . . . .	48
4.4	Estimativas dos parâmetros das distribuições diamétricas selecionadas, nas diferentes idades (Grupo I). . . . .	49
4.5	Estimativas dos parâmetros dos modelos volumétricos (Grupo I). . . . .	55
4.6	Estatística EPAM para seleção das equações (Grupo I). . . . .	56
4.7	Volume ( $m^3/ha$ ) e IMA ( $m^3/ha/ano$ ) reais e estimados (Grupo I). . . . .	58
4.8	Estimativas dos parâmetros dos modelos de crescimento em volume (Grupo I). . . . .	59
4.9	Estatística EPAM para seleção das equações (Grupo I). . . . .	60
4.10	Estatística descritiva do $DAP$ , altura e volume dos clones de <i>Eucalyptus</i> spp., nas diferentes idades (Grupo II). . . . .	63
4.11	Seleção das equações de probabilidade de acordo com o teste KS (Grupo II). . . . .	65
4.12	Estimativas dos parâmetros das distribuições diamétricas selecionadas, nas diferentes idades (Grupo II). . . . .	66
4.13	Estimativas dos parâmetros dos modelos volumétricos (Grupo II). . . . .	72
4.14	Estatística EPAM para seleção das equações (Grupo II). . . . .	73
4.15	Volume ( $m^3/ha$ ) e IMA ( $m^3/ha/ano$ ) reais e estimados (Grupo II). . . . .	75

4.16 Estimativas dos parâmetros dos modelos de crescimento (Grupo II). . . . .	76
4.17 Estatística EPAM para seleção das equações (Grupo II). . . . .	77
4.18 Estatística descritiva do <i>DAP</i> , altura e volume dos clones de <i>Eucalyptus</i> spp., nas diferentes idades (Grupo III). . . . .	80
4.19 Seleção das equações de probabilidade de acordo com o teste KS (Grupo III).	82
4.20 Estimativas dos parâmetros das distribuições diamétricas selecionadas, nas diferentes idades (Grupo III). . . . .	83
4.21 Estimativas dos parâmetros dos modelos volumétricos (Grupo III). . . . .	89
4.22 Estatística EPAM para seleção das equações (Grupo III). . . . .	90
4.23 Volume ( $m^3/ha$ ) e IMA ( $m^3/ha/ano$ ) reais e estimados (Grupo III). . . . .	92
4.24 Estimativas dos parâmetros dos modelos de crescimento (Grupo III). . . . .	93
4.25 Estatística EPAM para seleção das equações (Grupo III). . . . .	94

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão de Literatura</b>	<b>5</b>
2.1	Modelos de Produção . . . . .	5
2.1.1	Distribuições Diamétricas . . . . .	5
2.1.2	Testes de Aderência . . . . .	16
2.1.3	Modelos Volumétricos . . . . .	17
2.2	Modelos de Crescimento . . . . .	20
2.3	Distribuições Simétricas . . . . .	21
2.3.1	Definição . . . . .	22
2.3.2	Distribuição Normal . . . . .	23
2.3.3	Distribuição t de Student . . . . .	24
2.3.4	Distribuição Exponencial Potência . . . . .	27
2.3.5	Distribuição Logística II . . . . .	29
2.4	Modelos Simétricos Não Lineares . . . . .	31
2.4.1	Definição . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Material e Métodos</b>	<b>35</b>
3.1	Caracterização do Experimento . . . . .	35
3.2	Análise Estatística . . . . .	38
3.2.1	Modelo de Schumacher e Hall Modificado I . . . . .	40
3.2.2	Modelo de Schumacher e Hall Modificado II . . . . .	41

<b>4 Resultados e Discussão</b>	<b>44</b>
4.1 Grupo I . . . . .	44
4.1.1 Distribuição Diamétrica . . . . .	47
4.1.2 Modelos Volumétricos . . . . .	55
4.1.3 Modelos de Crescimento . . . . .	59
4.2 Grupo II . . . . .	63
4.2.1 Distribuição Diamétrica . . . . .	64
4.2.2 Modelos Volumétricos . . . . .	72
4.2.3 Modelos de Crescimento . . . . .	76
4.3 Grupo III . . . . .	80
4.3.1 Distribuição Diamétrica . . . . .	81
4.3.2 Modelos Volumétricos . . . . .	89
4.3.3 Modelos de Crescimento . . . . .	93
<b>5 Conclusão</b>	<b>98</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>100</b>
<b>Apêndice</b>	<b>107</b>



# 1 Introdução

O uso da lenha no Nordeste como fonte energética ocorre desde o início da colonização, e vem sendo cada vez mais intenso, aumentando constantemente a pressão sobre os recursos florestais. O aumento da população, perante a urbanização, expansão das fronteiras agropecuárias e da indústria são os maiores agravantes (FIGUEIRÔA et al., 2005).

O bioma Caatinga, onde está localizado o Polo Gesseiro do Araripe-PE, vem sofrendo grande pressão, direta e indiretamente ao longo do tempo. A vegetação lenhosa da Caatinga é uma das fontes de energia mais utilizadas pela população nordestina. Este fato se deve, principalmente, a crescente demanda por recursos naturais renováveis, aumentando gradativamente a sua degradação.

O Polo Gesseiro do Araripe, localizado na microregião de Araripina, semiárido pernambucano, é um grande consumidor de biomassa vegetal que é usada na calcinação da gipsita. Essa região concentra as maiores reservas de gipsita exploráveis do Brasil e a segunda maior do mundo, com a grande vantagem de possuir minas facilmente exploráveis e produzir uma gipsita que chega a ser classificada como a melhor do mundo.

A cadeia produtiva do gesso no Estado de Pernambuco, está formada por um total de 39 mineradoras, 139 calcinadoras e 726 fábricas de pré-moldados, perfazendo cerca de 900 indústrias voltadas para a mineração, beneficiamento e fabricação de pré-moldados (SINDUSGESSO, 2012).

O setor de produção secundária, no qual se enquadram as calcinadoras do Araripe, consome, predominantemente, a biomassa florestal como fonte energética. Seu consumo oscila de acordo com os preços dos derivados de petróleo, principalmente, o óleo BPF (baixo poder de fusão). O alto preço do óleo BPF faz com que as empresas migrem para o consumo de lenha, aliado a outros fatores incentivadores como a precária fiscalização que facilita o uso de madeira proveniente de desmatamentos ilegais. A indústria do gesso no Araripe utiliza, aproximadamente, 3% de energia elétrica, 5% de óleo diesel, 8% de óleo BPF (baixo poder de fluidez), 10% de coque e 74% de lenha (ATECEL, 2006).

O bioma Caatinga vem sofrendo pressão antrópica e é explorado de forma desordenada. Uma alternativa econômica e ambiental viável é a implementação e o manejo sustentado de povoamentos florestais nativos ou o reflorestamento com florestas de rápido crescimento, com destaque para o *Eucalyptus* spp. por sua elevada taxa de crescimento, a facilidade de reprodução, a rusticidade, os altos índices de produtividade e características energéticas, como densidade da madeira e poder calorífico. Desta forma, o gênero *Eucalyptus* é o mais utilizado para a implantação de florestas com fins energéticos. Entretanto, a introdução de um gênero ou espécie vegetal em uma região necessita de estudos experimentais em escalas menores, pois possíveis problemas de ordem ambiental, fitossanitária e ecológica podem ser detectados na fase experimental.

A degradação ambiental no Araripe está fortemente associada ao beneficiamento mineral, predominantemente, a gipsita. Em consequência, os estoques lenheiros da região foram reduzidos ao longo do tempo. Desta forma, as indústrias são obrigadas a adquirir lenha de estados vizinhos, encarecendo os custos e alastrando o problema para outras áreas (GADELHA et al., 2012).

Em face deste fato, torna-se de interesse quantificar o crescimento e a produção de florestas, promovendo um planejamento criterioso da produção por meio da prescrição de regimes de manejos adequados visando à qualidade do produto final. Sendo assim, pode-se dizer que a predição do crescimento e da produção é parte fundamental do processo de planejamento dos povoamentos florestais. O conhecimento do crescimento e da produção presente e futura de árvores em povoamentos florestais é elemento fundamental no manejo florestal sustentável, sendo necessário possuir como uma das fontes de informações mais importante a existência de relações quantitativas e modelos que sejam consistentes e, numericamente, compatíveis para a predição do desenvolvimento do povoamento em qualquer idade (SCOLFORO, 1994).

O conhecimento da dinâmica de uma floresta depende de diversas informações, podendo ser destacada a avaliação do crescimento em diâmetro (CLUTTER et al., 1983). A variável diâmetro, obtida por medição direta das árvores, é bem correlacionada com outras variáveis, tais como o volume, a qualidade de produção e os custos de exploração (BARTOSZECK et al., 2004).

O estudo da distribuição diamétrica, por meio de modelos estatísticos, pode ser um fator de relevante importância para o bom planejamento, para o controle das atividades florestais a serem desenvolvidas, para o conhecimento das produções futuras, além de ser um instrumento para a predição da produção e o crescimento das árvores. Segundo

Scolforo (1998), a estrutura diamétrica de uma floresta, sob o ponto de vista da produção, permite caracterizar e indicar o estoque de madeira disponível anterior a uma exploração e fornecer informações que auxiliem na tomada de decisões sobre a necessidade de reposição florestal.

Outra variável de grande importância em estudos florestais é o volume. O volume representa umas das melhores formas de conhecer o potencial produtivo em florestas e o conhecimento do estoque madeireiro é essencial para todas as atividades de planejamento, sendo o volume individual, base para se conhecer todo um estoque que a floresta pode guardar (MACHADO et al., 2002; THOMAS et al., 2006; FRANCO et al., 1998). Os estudos da volumetria em plantios de *Eucalyptus* spp., nessa região, podem possibilitar decisões importantes para a economia local.

Os modelos de crescimento, bem como os modelos de produção, são estudados por meio de modelos lineares ou não lineares. Com o desenvolvimento computacional na década de 70, alguns modelos que exigiam a utilização de processos iterativos para a estimação dos parâmetros começaram a ser mais utilizados. Aplicações do modelo normal não linear, por exemplo, que assume uma estrutura não linear para os parâmetros teve um grande avanço em várias áreas. Esses modelos têm tido uma ampla variedade de aplicações, com a vantagem de obter parâmetros que são facilmente interpretáveis.

Os modelos supondo erros normais são utilizados para descrever a maioria dos fenômenos aleatórios, dado que a suposição de normalidade é muito atrativa para os erros dos modelos de regressão com resposta contínua. Contudo, as estimativas obtidas para os coeficientes dos modelos normais se mostravam sensíveis à presença de observações extremas. Alternativas à suposição de erros normais têm sido proposta na literatura. A fim de tentar reduzir a influência dessas observações extremas nas estimativas dos parâmetros, uma das alternativas é assumir para os erros distribuições mais robustas (caudas mais pesadas) do que a distribuição Normal (CYSNEIROS et al., 2005b).

Considerando a grande utilidade no uso de modelos não lineares na análise do crescimento e produção florestal e a real necessidade de considerar para os erros distribuições mais robustas do que a distribuição Normal, os modelos simétricos tendem a dar uma grande contribuição para trabalhos futuros no manejo sustentado de povoamentos florestais. Esses modelos guardam a estrutura da distribuição Normal, mas elimina a forma específica da densidade Normal para incluir densidades simétricas com caudas mais leves ou mais pesadas do que as caudas da distribuição Normal.

Os objetivos desta tese consiste em:

- Estimar a distribuição de frequência por classe diamétrica, em um povoamento clonal de *Eucalyptus* spp. ao longo do tempo;
- Ajustar modelos e comparar equações volumétricas por meio do modelo de Schumacher e Hall e do modelo de Spurr via modelos simétricos não lineares;
- Propor, ajustar e comparar novas formulações matemáticas para modelar o crescimento em volume via modelos simétricos não lineares.

## 2 Revisão de Literatura

### 2.1 Modelos de Produção

#### 2.1.1 Distribuições Diamétricas

A estatística tem contribuído de forma significativa para o desenvolvimento da ciência florestal. Seus conceitos, medidas e testes têm sido fundamentais, tanto para o diagnóstico de situações, como para previsões e tomada de decisões (SILVA et al., 2003).

A distribuição diamétrica indica a frequência com que uma certa classe de diâmetro aparece, representada em um povoamento, e permite ter uma visão da estrutura horizontal do povoamento.

Em 1928, Meyer estudando a forma apresentada pela distribuição de frequência, concluiu que quanto mais tolerante é a espécie florestal maior é a assimetria à esquerda, do mesmo modo como ocorre em povoamentos jovens. A distribuição do número de árvores por classe de diâmetro pode variar muito de uma espécie para outra ou de um grupo de espécies para outro (LAMPRECHT,1990).

As distribuições diamétricas são classificadas em: unimodal, multimodal, e decrescente. O termo unimodal caracteriza uma distribuição com um único ponto de maior frequência, como é o caso da curva da distribuição Normal. As distribuições unimodais são características de florestas equiâneas, como no caso de plantações. Algumas espécies de florestas naturais heterogêneas, quando tratadas isoladamente também podem apresentar este tipo de distribuição. As multimodais apresentam mais de um ponto de maior frequência, não sendo biologicamente importantes, pois não ocorrem naturalmente. É uma distribuição forçada, apresentando-se apenas em povoamentos florestais onde houve exploração em certas classes diamétricas intermediárias. As decrescentes se caracterizam por uma curva cuja frequência diminui ao se aumentar a classe de diâmetro. Esta distribuição, na literatura, é denominada de "J" invertido, descrito pela primeira vez em ciências florestais por De Licourt em 1898. É uma distribuição muito importante por ser carac-

terística de florestas onde há regeneração contínua. É o caso das florestas naturais de composição variada em espécies e idade. Os fatores diretamente relacionados com a evolução de distribuições diamétricas são as taxas de ingresso, crescimento e mortalidade, isto é, as mudanças no número de novos indivíduos do povoamento, incremento do diâmetro e perdas por mortalidade. Diante de tais condições, a forma da curva das distribuições depende desses fatores (BARTOSZECK et al., 2004).

A medida de qualquer diâmetro da árvore baseia-se na hipótese de que, em cada ponto de medição, o diâmetro obtido aproxima-se do diâmetro de um círculo. Em países que usam o sistema métrico, o diâmetro das árvores de povoamentos florestais é feito a 1,30 metros acima do nível da base e é denominado de diâmetro à altura do peito, abreviado como (*DAP*), e expresso em centímetros (VAN SUEST et al., 1959). O *DAP* é uma variável relevante em estudos florestais, pois é uma variável de fácil acesso, fácil medição e é o elemento de medida mais importante por servir de base para muitos outros cálculos.

Parte da estrutura de uma floresta pode ser explicada pela avaliação de sua distribuição diamétrica, a qual é definida pela caracterização do número de árvores por unidade de área e por intervalo de classe de diâmetro (PIRES O'BRIEN e O'BRIEN, 1995). A estrutura diamétrica de uma floresta, sob o ponto de vista da produção, permite caracterizar e indicar o estoque de madeira disponível anterior a uma exploração e fornecer informações que auxiliem na tomada de decisões sobre a necessidade de reposição florestal (SCOLFORO e THIERSCH, 1998; PULZ et al., 1999).

Os modelos de produção são importantes instrumentos que utilizam a distribuição diamétrica, subsidiando o planejamento florestal e, embora impliquem em uma simplificação da realidade, permitem obter um diagnóstico da distribuição diamétrica das árvores que compõem a floresta (MIGUEL et al., 2010).

Para que seja possível a construção das distribuições de frequência diamétrica, as classes devem ter amplitudes iguais. Na construção do histograma, o número de intervalos não deve ultrapassar vinte classes. Dessa forma, utilizando a fórmula de Sturges (FINGER, 1992), o número de classes é determinado pela seguinte expressão:

$$k = 1 + 3,3 \log n \quad (2.1)$$

em que  $k$  é o número de classes e  $n$  o número de observações.

Após a determinação do número de classes, a amplitude dos intervalos é determinada por:

$$h = \frac{AT}{k} \quad (2.2)$$

em que  $h$  é a amplitude da classe,  $AT$  é a amplitude total que é determinada pela diferença entre o maior valor e o menor valor na amostra e  $k$  o número de classes. Entretanto, na maioria dos casos, a distribuição do número de classes diamétricas e respectivas amplitudes são determinadas por critérios intrínsecos aos objetivos do plano de manejo florestal.

Os modelos de distribuição diamétrica se baseiam em funções probabilísticas que permitem descrever as alterações ocorridas na estrutura do povoamento, número de árvores por classe de diâmetro, nas relações hipsométricas e nas taxas de mortalidade, podendo todas essas características serem analisadas simultaneamente (ABREU et al., 2002).

Nos estudos de distribuição de frequência de indivíduos em populações florestais, tem-se utilizado várias funções de distribuição diamétrica. Bliss e Reinker (1964), pioneiros no uso dessas metodologias, utilizaram a distribuição Log-normal em estudos com povoamentos de *Pseudotsuga menziesii*. Nelson (1964) adotou a distribuição Gama em estudos de *Pinus taeda*. A distribuição Weibull, com dois ou três parâmetros, foi utilizada com maior ênfase por Bailey e Dell (1973). Leite et al. (1990) utilizaram a distribuição Weibull na determinação da produção de madeira de *Eucalyptus saligna* para celulose e energia. Scolforo (1992) utilizou a distribuição Weibull em *Pinus caribaea* var. *hondurensis* obtendo a compatibilidade da área basal determinada pela soma das classes diamétricas. Liu et al. (2002) utilizaram um modelo de mistura finita, com a função Weibull de três parâmetros assumindo a função densidade de probabilidade, para descrever as distribuições diamétricas de povoamentos mistos de espécies florestais. Em estudos com *Eucalyptus urophylla*, Miguel et al. (2010) utilizaram a distribuição Weibull para projetar a produção por classe diamétrica. Nascimento et al. (2012) utilizam modelo de projeção por classe diamétrica para florestas nativas por meio da distribuição Weibull.

Em geral, utiliza-se várias distribuições de probabilidade com o intuito de se obter melhores ajustes. Abreu et al. (2002) utilizaram as distribuições Beta e Weibull em estudos com povoamentos de *Eucalyptus grandis*. Palahí et al. (2007) utilizaram as distribuições Beta, SB de Johnson, Weibull e Weibull Truncada para modelar a distribuição de diâmetro dos povoamentos florestais na Catalunha. Binoti et al. (2011) utilizaram as funções Weibull e Hiperbólica para comparar a eficiência para descrição de distribuições diamétricas de povoamentos de *Tectona grandis*. Binoti et al. (2012) utilizaram doze diferentes dis-

tribuições de probabilidade para descrever a distribuição diamétrica de povoamentos de *Tectona grandis* submetidos a desbaste.

Na literatura, encontram-se alguns estudos que propõem metodologias para projetar um povoamento florestal por meio das distribuições diamétricas. Hyink e Moser (1983) propuseram uma estrutura geral para projetar a produção florestal e uma estrutura padrão usando distribuições diamétricas. Silva (1986) desenvolveu uma nova metodologia de estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull por meio do método dos percentis. Dois novos métodos de obtenção dos parâmetros da distribuição Weibull usando dados de uma plantação de pinheiro taeda (*Pinus taeda* L.) foi proposto por Cao (2004). O primeiro método utiliza a técnica de regressão para estimar os parâmetros de escala e de forma da distribuição de Weibull. O segundo método é baseado também na técnica de regressão para ajustar a função de distribuição acumulada.

A estrutura básica para o desenvolvimento de modelos de crescimento e produção se dá por causa da probabilidade de descrever a estrutura diamétrica das populações, utilizando a função densidade de probabilidade (fdp), destacando-se a Gama, Log-normal, Weibull, Exponencial e a Normal (SCOLFORO e THIERSCH, 1998). Essas funções permitem estimar a provável distribuição dos diâmetros, descrevendo matematicamente a estrutura de um povoamento (BARRA et al., 2004). As funções densidade de probabilidade podem assumir diferentes formas de acordo com os seus parâmetros, e a escolha equivocada da fdp pode induzir a inferências incorretas sobre a população.

O principal problema em ajustes de distribuições tem sido a escolha da fdp para descrever as probabilidades de interesse. O critério para escolher uma distribuição é de que ela seja relativamente simples em termos de ajuste para obter a estimativa dos parâmetros, suficientemente flexível para ajustar-se a um espectro amplo de formas, facilmente integráveis dentro de vários intervalos de classes e, finalmente, ajustar-se bem aos conjuntos de observações (HAFLEY e SCHREUDER, 1977).

Para se obter as estimativas dos parâmetros das distribuições adotadas, uma das alternativas é recorrer ao método de máxima verossimilhança. A importância desse método de estimação consiste nas boas propriedades assintóticas dos estimadores, tais como consistência, convergência e eficiência assintótica. Os estimadores são encontrados por meio da maximização numérica do logaritmo da função de verossimilhança. Para algumas distribuições se faz necessário a utilização de procedimentos iterativos. Os métodos iterativos para o cálculo dos estimadores de máxima verossimilhança são bastante utilizados na prática e, em geral, mostram-se imprescindíveis quando a dimensão do espaço paramétrico



é grande (CORDEIRO, 1999). Entre os métodos iterativos, destacam-se: algoritmo de Newton-Raphson, Escore de Fisher, Marquardt, Simplex, entre outros.

Após a obtenção das estimativas dos parâmetros e, conseqüentemente, a escolha da distribuição de probabilidade mais apropriada, é possível caracterizar a dinâmica da população. Para obter a probabilidade da variável diâmetro em um determinado intervalo, aplica-se o seguinte procedimento:

$$P(d_1 \leq y \leq d_2) = \int_{d_1}^{d_2} f(y)dy, \quad (2.3)$$

em que  $f(y)$  é a fdp adotada,  $d_1$  o limite inferior em uma determinada classe diamétrica e  $d_2$  o limite superior em uma determinada classe diamétrica. O número estimado de árvores em um determinado intervalo de diâmetro é o produto do valor encontrado da probabilidade pelo número total de árvores do povoamento.

### a) Distribuição Normal

Os primeiros trabalhos consideraram a distribuição Normal somente como uma aproximação conveniente para distribuição Binomial. O reconhecimento da sua importância teórica foi propagado por Laplace e por Gauss no início do século XIX. A primeira derivação da distribuição Normal, como uma aproximação da distribuição Binomial, parece ter sido publicada por De Moivre em um folheto, escrito em latim, com data de 12 de novembro de 1733. Em 1738 De Moivre publicou uma tradução desse folheto com alguns acréscimos. Em 1774 Laplace obteve a distribuição Normal como aproximação da distribuição Hipergeométrica e quatro anos depois defendeu a tabulação da probabilidade (WALCK, 2001).

A distribuição Normal, conhecida também como distribuição de Gauss ou Gaussiana, é a distribuição mais utilizada, tanto por constituir uma boa aproximação para um grande número de distribuições e devido a todo desenvolvimento teórico e aplicado estabelecido no decorrer dos anos. Essa distribuição é amplamente utilizada na área da engenharia florestal e ciências biológicas, sendo uma das mais importantes distribuições contínuas, em consequência de muitas variáveis aleatórias biométricas seguirem uma distribuição aproximadamente Normal.

Diz-se que  $Y$  segue uma distribuição Normal se sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y-\mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad y \in \Re, \quad -\infty < \mu < \infty \quad e \quad \sigma > 0. \quad (2.4)$$

Assim,  $Y$  é denotado por  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Se  $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ ,  $Z$  é conhecida como distribuição Normal padrão ou Normal reduzida  $N(0, 1)$ . A função de densidade da Normal padrão é dada por:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (2.5)$$

Para o cálculo das probabilidades é necessário trabalhar com a distribuição acumulada de  $Z$ , usualmente representada por  $\Phi(z)$ , sendo

$$\Phi(z) = P[Z \leq z] = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy. \quad (2.6)$$

A distribuição Normal possui algumas propriedades.

- i) Se  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$  então  $a + bY \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$ , em que  $a, b \in \Re$  com  $b \neq 0$ .
- ii) Se  $X$  e  $Y$  têm distribuições normais, então a soma  $U = X + Y$ , bem como a diferença  $V = X - Y$  também apresentam distribuições normais.
- iii) Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $U$  e  $V$ , dadas na propriedade (ii), também serão independentes.

Seguem algumas relações da distribuição Normal com outras distribuições (CYSNEIROS et al., 2005b).

- i)  $R \sim Rayleigh(\sigma^2)$  é a distribuição de Rayleigh se  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .
- ii)  $Y \sim \chi_v^2$  é a distribuição qui-quadrado com  $v$  graus de liberdade se  $Y = \sum_{k=1}^v X_k^2$  em que  $X_k \sim N(0, 1)$ , para  $k = 1, \dots, v$ , são distribuições normais padrões independentes.
- iii)  $Z \sim Cauchy(0, 1)$  se  $Z = X/Y$  para  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y \sim N(0, 1)$  distribuições Normais padrões independentes.
- iv) Se  $Z = e^X$  e  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $Z$  é a distribuição Log-normal, isto é,  $Z \sim LN(\mu, \sigma^2)$ .

Na prática, a Log-normal de dois parâmetros é uma importante distribuição deduzida da Normal. Uma propriedade procedente da distribuição Normal é que se os  $Y_i$ 's são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com  $Y_i \sim LN(\mu, \sigma^2)$ , então a média geométrica

$\bar{z} = (\pi z_i)^{1/n}$  segue também uma Log-normal, isto é,  $LN(\mu, \sigma^2/n)$ .

O valor esperado e a variância da variável aleatória  $Y$  com distribuição Normal são dados por:

$$E(Y) = \mu \quad (2.7)$$

e

$$V(Y) = \sigma^2. \quad (2.8)$$

O estimador da média  $\mu$  é  $\bar{y}$  e  $s^2$  é o estimador não viesado da variância  $\sigma^2$ . Esses estimadores são conjuntamente suficientes para  $\mu$  e  $\sigma^2$ .

Como ilustração, observa-se na Figura 2.1 o gráfico da função densidade da distribuição Normal padrão.

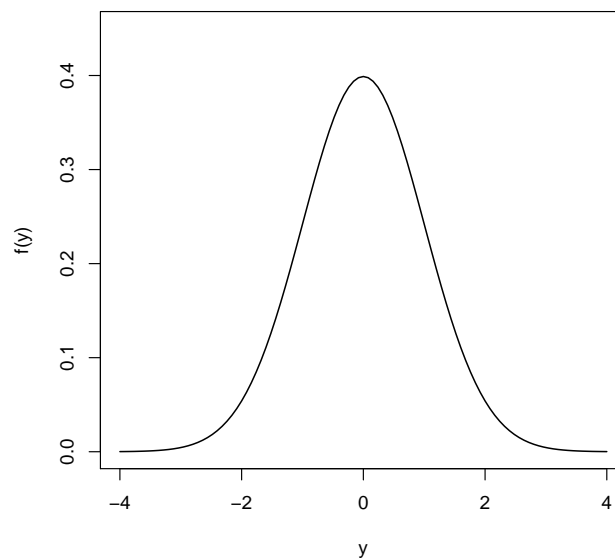


Figura 2.1: Densidade da distribuição Normal padrão

### b) Distribuição Log-normal

A distribuição Log-normal é uma alternativa a distribuição Normal, já que o logaritmo da variável resposta  $y$  pode seguir uma distribuição Normal. As curvas desta distribuição são assimétricas à direita (WALCK, 2001).

Uma variável aleatória  $Y$  tem distribuição Log-normal se sua função densidade é dada por

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad (2.9)$$

em que  $y > 0$  e os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma > 0$ .

O valor esperado e a variância da variável aleatória  $Y$  com distribuição Log-normal são determinadas pelas expressões:

$$E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (2.10)$$

e

$$V(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\exp\sigma^2 - 1\right). \quad (2.11)$$

Como ilustração, observa-se na Figura 2.2 o gráfico da função densidade da distribuição Log-normal para  $\mu = 0$  e diferentes valores de  $\sigma$ .

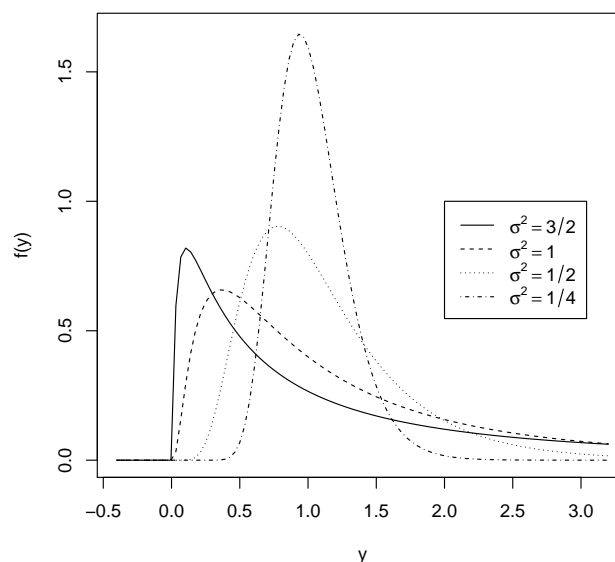


Figura 2.2: Densidade da distribuição Log-normal

### c) Distribuição Weibull

A função de Weibull foi desenvolvida em 1928 por Fischer e Tippert, sendo aplicada em 1939 por Weibull, físico sueco, no estudo de resistência de materiais (PRODAN et al., 1997).

Na área florestal, a distribuição Weibull foi utilizada pela primeira vez por Bailey e Dell (1973), com dois ou três parâmetros, sendo  $\alpha$  o parâmetro de locação, que corresponde ao valor do diâmetro mínimo encontrado,  $\beta$  o parâmetro de forma e  $\sigma$  o parâmetro de escala. A distribuição se reduz a dois parâmetros quando a distribuição inicia-se na origem, ou seja, quando o parâmetro  $\alpha$  que controla a posição da curva sobre o eixo das abscissas assume o valor zero ou uma constante equivalente ao diâmetro mínimo observado na população florestal. Pela sua flexibilidade, dependendo dos valores dos parâmetros, a distribuição Weibull pode assumir uma ampla variedade de formas de distribuição de frequência por classe de diâmetro.

Uma variável aleatória  $Y$  tem distribuição Weibull se sua função densidade é expressa por

$$f(y) = \left(\frac{\beta}{\sigma}\right) \left(\frac{y-\alpha}{\sigma}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{y-\alpha}{\sigma}\right)^{\beta}\right], \quad (2.12)$$

em que  $y > \alpha$ , sendo  $\alpha$  o diâmetro mínimo encontrado,  $\beta > 0$  e  $\sigma > 0$ . O parâmetro de escala  $\sigma$  controla o intervalo de valores que a curva assume e o parâmetro  $\beta$  controla a grande variedade de formas que a distribuição pode assumir. Por exemplo, para  $\beta < 1$  define a forma decrescente da distribuição,  $\beta = 1$  uma distribuição Exponencial,  $\beta \cong 3,6$  uma distribuição aproximadamente Normal com assimetria negativa e  $\beta$  entre 1 e 3,6 uma distribuição aproximadamente Normal com assimetria positiva.

O valor esperado e a variância da variável aleatória  $Y$  com distribuição Weibull são determinadas pelas expressões:

$$E(Y) = \sigma \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (2.13)$$

e

$$V(Y) = \sigma^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)^2 \right\}, \quad (2.14)$$

onde  $\Gamma$  é a função gama.

A distribuição Weibull tem sido extensivamente utilizada em estudos de crescimento e produção florestal, com vários trabalhos publicados, podendo citar os trabalhos de Smalley & Bailey (1974) e Nogueira et al. (2005). Muitos resultados de pesquisas de ajuste de distribuição diamétrica têm indicado a distribuição Weibull como a mais apropriada para estimar as frequências por classe de diâmetro (GADOW, 1984; BORDERS et al., 1987; ABREU et al., 2002; MIGUEL et al., 2010).

Na Figura 2.3 observa-se o gráfico da função densidade da distribuição Weibull para  $\alpha = 0$  e diferentes valores de  $\sigma$  e  $\beta$ .

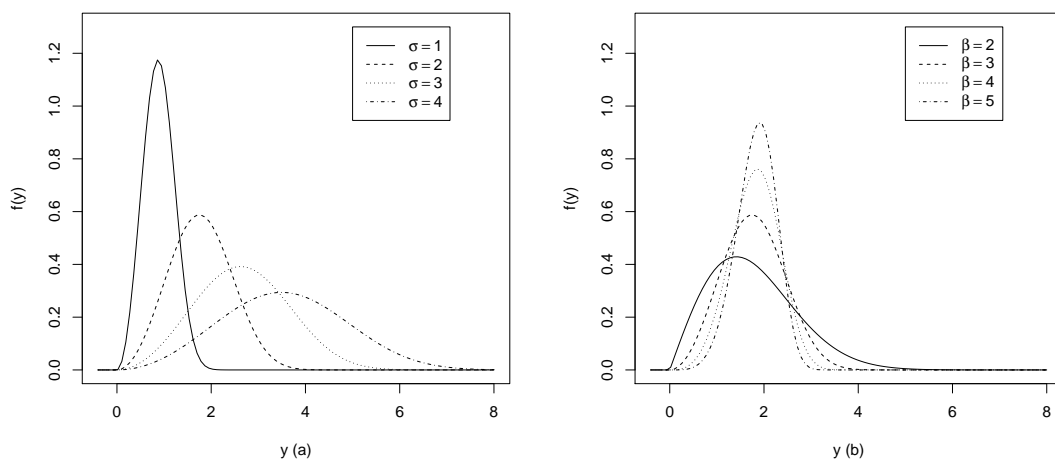


Figura 2.3: Densidade da distribuição Weibull para  $\beta = 3$  e diferentes valores de  $\sigma$  (a) e diferentes valores de  $\beta$  e  $\sigma = 2$  (b)

#### d) Distribuição Gama

A distribuição Gama é uma distribuição muito genérica que engloba, entre outras distribuições conhecidas, a distribuição Exponencial e a distribuição Qui-quadrado. Por ser um caso geral da distribuição Exponencial e da distribuição Qui-quadrado, a distribuição Gama tem grande importância tanto na teoria quanto nas aplicações estatísticas. Essa distribuição é uma função flexível, podendo ser aplicada em florestas nativas ou plantadas, podendo assumir diferentes formas, passando por diferentes graus de assimetria de acordo com os valores dos seus parâmetros.

A distribuição Gama é uma distribuição de probabilidade contínua com dois parâmetros, sendo  $\alpha$  o parâmetro de forma e  $\beta$  o parâmetro de escala. Essa distribuição pode

apresentar uma grande variedade de formas, dependendo, portanto, dos parâmetros de forma  $\alpha$  e de escala  $\beta$ . Para valores de  $\alpha$  muito altos, a distribuição Gama tende à distribuição Normal.

Uma variável aleatória  $Y$  tem distribuição Gama com parâmetros  $\alpha$  (parâmetro de forma) e  $\beta$  (parâmetro de escala) se sua função densidade é dada por

$$f(y) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), \quad (2.15)$$

em que  $y > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $\Gamma$  é a função gama.

O valor esperado e a variância da variável aleatória  $Y$  com distribuição Gama podem ser obtidos por:

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.16)$$

e

$$V(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (2.17)$$

Como ilustração, observa-se na Figura 2.4 o gráfico da função densidade da distribuição Gama com diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

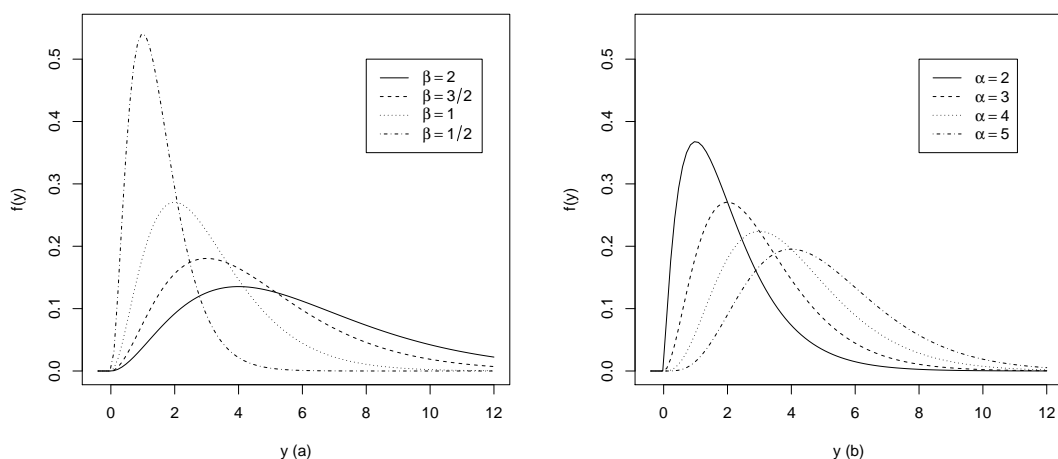


Figura 2.4: Densidade da distribuição Gama para  $\alpha = 3$  e diferentes valores de  $\beta$  (a) e diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta = 1$  (b)

### 2.1.2 Testes de Aderência

Existem diferentes maneiras de se avaliar o ajuste das funções adotadas em distribuições diamétricas. Os testes de Aderência, bastante utilizados para esta finalidade, referem-se ao grau de concordância entre uma distribuição observada e uma teórica esperada. A determinação da distribuição com melhor ajuste pode ser definida por meio dos seguintes testes: Anderson-Darling (AD), Qui-quadrado ( $\chi^2$ ), Kolmogorov-Smirnov (KS) e Cramér-von Mises (W-Sq), ou até mesmo por uma análise de variância.

Esses testes de aderência são determinados pelas seguintes estatísticas (CONOVER, 1980):

#### a) Qui-quadrado ( $\chi^2$ )

O teste Qui-quadrado tem como princípio básico comparar as possíveis divergências entre as frequências observadas e esperadas, sendo utilizado para verificar se a distribuição das frequências observadas ajusta-se a um modelo teórico pré-determinado (CONOVER, 1980).

A estatística Qui-quadrado ( $\chi^2$ ) é definida como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \quad (2.18)$$

em que  $O_i$  é a frequência observada na  $i$ -ésima classe diamétrica,  $E_i$  é a frequência esperada na  $i$ -ésima classe diamétrica,  $m$  é o número de classes diamétricas e  $p$  é o número de parâmetros da distribuição de probabilidade a ser testada. Os graus de liberdade para o teste  $\chi^2$  é igual a  $m - p - 1$ .

#### b) Teste de Kolmogorov-Smirnov (KS)

A estatística Kolmogorov-Smirnov (KS) é definida como

$$KS = \sup_y |F_n(y) - F(y)|. \quad (2.19)$$

A estatística de KS é baseada na maior diferença entre  $F_n(y)$  e  $F(y)$ , ou seja, baseia-se em uma medida de discrepância entre a função de distribuição empírica  $F_n(y)$  e a função de distribuição acumulada paramétrica proposta  $F(y)$ .



### c) Teste de Anderson-Darling ( $A^2$ )

A estatística de Anderson-Darling pertence a classe quadrática das funções de distribuição empírica. Essa classe de estatísticas é baseada no quadrado da diferença  $(F_n(y) - F(y))^2$ .

A estatística de Anderson-Darling ( $A^2$ ) é definida como

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(y) - F(y))^2 [F(y)(1 - F(y))]^{-1} dF(y). \quad (2.20)$$

### d) Teste de Cramér-von Mises ( $W^2$ )

A estatística de Cramér-von Mises ( $W^2$ ) também pertence a classe quadrática das funções de distribuição empírica e é definida como

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(y) - F(y))^2 dF(y). \quad (2.21)$$

O teste de aderência Qui-quadrado apresenta limitações quando a frequência de uma classe é inferior a cinco. Esta limitação não ocorre no teste de Kolmogorov-Smirnov, sendo normalmente mais eficiente que o Qui-quadrado em amostras menores que trinta observações. Os testes de Anderson-Darling, Cramér-von Mises e Kolmogorov-Smirnov são baseados na função de distribuição empírica, apresentando maior poder e invariância dos pontos médios dos intervalos escolhidos em relação aos pontos médios observados no teste de aderência Qui-quadrado.

## 2.1.3 Modelos Volumétricos

A análise de dados de volume é fundamental em manejo florestal, além de ser a variável mais utilizada na comercialização de madeira. Por meio do volume é possível conhecer todo potencial madeireiro disponível em um povoamento florestal, haja vista que o volume individual fornece subsídios para a avaliação do estoque de madeira e análise do potencial produtivo da floresta (THOMAS et al., 2006).

A volumetria baseada na metodologia matemática trata, fundamentalmente, de uma avaliação de subconjuntos (volume comercial e total) para se obter o volume de madeira em uma unidade de área, geralmente, um hectare (PELLICO NETTO, 2004). Primeiramente, consideram-se as árvores de uma espécie, depois se pode formar um subconjunto com

espécies que apresentam similaridades de forma e tamanho, e assim por diante.

O volume do tronco ( $V$ ) é considerado uma função do diâmetro a 1,30 m do nível do terreno ( $DAP$ ), da altura ( $H$ ) e a expressão de forma ( $f$ ). A expressão de forma é estimada pela razão entre o volume do tronco e o volume de um cilindro, que tem diâmetro igual ao  $DAP$  e altura igual à altura total da árvore, sendo a relação envolvida representada por:  $V = g(DAP;H;f)$  (CLUTTER et al., 1983).

Tendo por vista que o fuste de uma árvore não é um cilindro perfeito, mas sim com diferentes formas, existem procedimentos específicos para determinar o volume real. Uma das maneiras é a cubagem rigorosa. A partir do estudo da forma das árvores, algumas fórmulas matemáticas foram desenvolvidas para determinar o volume com ou sem casca do fuste das árvores, como as propostas por Huber, Newton, Smalian, entre outros. Normalmente, a expressão mais utilizada é a de Smalian, devido à facilidade dos cálculos e a operacionalidade na obtenção dos dados (SOARES et al., 2006).

As fórmulas de Huber, Newton e Smalian são expressas, respectivamente, por:

$$V = g_{\frac{1}{2}}l, \quad (2.22)$$

$$V = \frac{1}{6}l \left( g_1 + 4g_{\frac{1}{2}} + g_2 \right) \quad (2.23)$$

e

$$V = \left( \frac{g_1 + g_2}{2} \right) l, \quad (2.24)$$

em que  $V$  é volume da seção, em  $m^3$ ,  $g_{\frac{1}{2}}$  a área seccional no meio da tora,  $g_1$  a área seccional da base da tora,  $g_2$  a área seccional no final da tora, em  $m^2$ , e  $l$  o comprimento da seção, em  $m$ . A somatória de todos os volumes das seções da árvore resulta no volume total da mesma (SOARES et al., 2006).

Geralmente, as equações volumétricas são da seguinte forma: simples entrada ou local que usa, unicamente, o diâmetro a altura do peito ( $DAP$ ) ou a circunferência a altura do peito ( $CAP$ ) como variável independente; as de dupla entrada ou regionais, que usam o ( $DAP$ ) ou ( $CAP$ ) com a altura da árvore; e as formais, que além do  $DAP$  ou  $CAP$  e altura, incluem também a forma da árvore como variável independente (SILVA et al., 1978). Outros tipos de modelos descritos na literatura dispensam a medida da altura total da árvore e

incluem como variáveis independentes os diâmetros em diversos pontos ou ao longo do fuste, como em estudo realizado por Silva e Borders (1993). Esses modelos resultam em uma ferramenta especial: as equações, que são capazes de prever o crescimento e a produção sob certas condições (SPATHELF e NUTTO, 2000).

Os modelos mais clássicos são: Schumacher e Hall (1933) e o de Spurr (1952). Eles descrevem os processos relacionados ao crescimento das árvores até a estimação volumétrica de povoamentos florestais, baseando-se em equações ou sistemas de equações volumétricas que têm como variáveis independentes o (*DAP*) e a altura da árvore (*H*) (MACHADO et al., 2002; ASSIS et al. 2004; SANTANA et al., 2005).

A seguir alguns modelos comumente utilizados para estimativa de volumes de árvores:

Modelo de Schumacher e Hall

$$V_i = \beta_0 DAP_i^{\beta_1} H_i^{\beta_2} \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2.25)$$

Modelo de Spurr

$$V_i = \beta_0 (DAP_i^2 H_i)^{\beta_1} \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2.26)$$

Modelo de Scolforo e Silva

$$V_i = \beta_0 + \beta_1 CAP_i^2 H_i^{\beta_2} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2.27)$$

Modelo de Honner

$$V_i = \frac{DAP_i^2}{\beta_0 + \beta_1 H_i^{-1}} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.28)$$

em que  $V_i$  é o volume da *i*-ésima árvore,  $DAP_i$  é o diâmetro à altura do peito da *i*-ésima árvore,  $CAP_i$  é a circunferência à altura do peito da *i*-ésima árvore,  $H_i$  é a altura total da *i*-ésima árvore,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros do modelo e  $\varepsilon_i$  o erro associado da *i*-ésima árvore. Esses e outros modelos volumétricos podem ser visto em Imaña-Encinas et al. (2009).

## 2.2 Modelos de Crescimento

Uma das maneiras de se obter conhecimentos sobre o crescimento das espécies é por meio de modelos de crescimento. Esses modelos auxiliam nas pesquisas e no manejo das florestas de várias formas. Um dos importantes usos inclui a possibilidade da predição de produção em tempos futuros, partindo das condições atuais.

Estudos de crescimento tratam do desenvolvimento de mecanismos de predição das características quantitativas de um povoamento florestal em condições específicas. Essa predição é importante para a avaliação econômica das alternativas de manejo. O crescimento individual de árvores pode ser expresso como o incremento em diâmetro, área basal, altura, volume ou massa.

A análise do crescimento, utilizando modelos matemáticos e estatísticos, está cada vez mais sofisticada no setor florestal e, segundo Clutter et al. (1983) e Davis e Johnson (1987), uma das principais tarefas atribuídas ao profissional da área é entender como ocorre o crescimento das árvores de um povoamento, qual tratamento silvicultural adotar e prever qual será a época de corte e a produtividade do plantio.

O desenvolvimento de novos modelos de crescimento tem tido avanços consideráveis nas ciências florestais, como ocorreu com a generalização de Chapman-Richards para o modelo de Bertalanffy e trabalhos de Prodan (1968) dando um tratamento compreensivo de várias funções de crescimento e leis de crescimento estudadas com referência ao crescimento florestal.

O comportamento de crescimento específico para cada região, aliado à integração com fatores selecionados do ambiente, possibilita ao silvicultor reconhecer e visualizar em conjunto as características distintas da floresta, permitindo relacionar a capacidade produtiva do povoamento, bem como realizar o zoneamento da produtividade, dos atributos da espécie, do solo e/ou relevo e do clima, possibilitando o desenvolvimento de ferramentas para tomada de decisão na intervenção nos povoamentos (HESS e SCHNEIDER, 2010).

Os modelos de crescimento são formulações lineares ou não lineares que procuram explicar as relações de crescimento inerentes a várias partes do organismo vegetal, até a sua maturidade, em situações ambientais distintas. Na literatura, são propostos vários modelos para descrever curvas de crescimento em volume, entre eles:

Modelo de Chapman-Richards

$$V_{ij} = \beta_0 [1 - \exp(-\beta_1 t_{ij})]^{\beta_2} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m; \quad (2.29)$$

Modelo de Schumacker

$$\ln V_{ij} = \beta_0 + \beta_1 (1/t_{ij}) + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m; \quad (2.30)$$

Modelo de Prodan modificado

$$V_{ij} = \frac{t_{ij}^2}{\exp(\beta_1 t_{ij} + \beta_2 t_{ij}^2)} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m; \quad (2.31)$$

em que  $V_{ij}$  é o volume da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição,  $t_{ij}$  é a idade da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros do modelo e  $\varepsilon_{ij}$  o erro associado da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição. Outros modelos de crescimento em volume podem ser visto em Hess e Schneider (2010).

## 2.3 Distribuições Simétricas

Usualmente em inferência estatística, considera-se a hipótese de que os erros aleatórios apresentam distribuição Normal. Contudo, em estudos de fenômenos naturais essa hipótese não é sempre adequada. Uma solução é considerar modelos distribucionais mais adequados do que a Normal para este tipo de problema.

Nesta tese será abordada a família de distribuições simétricas com suporte na reta real. Esta família gera uma classe geral de distribuições com a mesma simetria que a distribuição Normal padrão. Pertencem a esta classe as seguintes distribuições: t de Student, Cauchy, t de Student Generalizada, Kotz, Kotz Generalizada, Exponencial Potência, Logística tipo I, Logística tipo II, entre outras. Para maiores detalhes sobre a família de distribuições simétricas em modelo de regressão ver Cysneiros et al. (2005b).

Esta classe de distribuições tem recebido crescente atenção na literatura. Em Chmielewski (1981), Fang et al. (1990), Fang e Zhang (1990), Fang e Anderson (1990) e Gupta e Varga (1993) pode ser encontrada uma revisão das áreas em que são aplicadas as distribuições simétricas. Lange et al. (1989) propuseram o modelo baseado na suposição de erros t de Student. Little (1988) e Yamaguchi (1990) utilizaram o modelo baseado na

suposição de erros com distribuição Normal Contaminada. Nesses modelos adicionam-se parâmetros os quais permitem ajustar a curtose da distribuição. Cysneiros et al. (2005b) utilizaram algumas distribuições simétricas em estudos de luminosidade de novo produto alimentício e em estudos cujo interesse era relacionar o peso das lentes dos olhos de coelhos europeus e a idade do animal. Paula e Cysneiros (2009) utilizaram os modelos simétricos em estudos de estimativa de risco sistemático. Lima-Filho et al. (2012) estudaram o modelo de crescimento de Chapman-Richards por meio dos modelos simétricos.

### 2.3.1 Definição

Diz-se que a variável aleatória  $Y$  tem distribuição simétrica, com suporte em  $\mathfrak{R}$ , com parâmetros de locação  $\mu \in \mathfrak{R}$  e de escala  $\phi > 0$ , se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\phi}} g(u), \quad y \in \mathfrak{R}, \quad (2.32)$$

para alguma função  $g(\cdot)$  denominada função geradora de densidade, em que  $u = \frac{(y-\mu)^2}{\phi}$ , com  $g(u) > 0$ , para  $u > 0$  e  $\int_0^\infty u^{-1/2} g(u) du = 1$ . Esta condição é necessária para que  $f(y; \mu, \phi)$  seja uma função densidade de probabilidade. Assim, denota-se por  $Y \sim S(\mu, \phi)$  e denomina-se de variável aleatória simétrica.

Algumas propriedades da distribuição Normal podem ser estendidas para a classe de distribuições simétricas.

i) Se  $Y \sim S(\mu, \phi)$ , então a função característica de  $Y$  é dada por  $\psi(iZ) = e^{i\mu} \varphi(t^2\phi)$ ,  $t \in \mathfrak{R}$  para alguma função  $\varphi$ , com  $\varphi(u) \in \mathfrak{R}$  para  $u > 0$ . Quando existem,  $E(Y_i) = \mu_i$  e  $Var(Y_i) = \xi\phi$ , em que  $\xi > 0$  é uma constante dada por  $\xi = -2\varphi'(0)$ , com  $\varphi'(0) = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u} |_{u=0}$  e que não depende dos parâmetros  $\mu$  e  $\phi$  (FANG et al., 1990). Se  $u^{-\frac{1}{2}(k+1)}g(u)$  for integrável então o  $k$ -ésimo momento de  $Y$  existe.

ii) Se  $Y \sim S(\mu, \phi)$ , então  $a + bY \sim S(a + b\mu, b^2\phi)$ , em que  $a, b \in \mathfrak{R}$  com  $b \neq 0$ , ou seja, a distribuição de qualquer transformação linear de uma variável aleatória com distribuição simétrica é também simétrica.

iii) Berkane e Bentler (1986) considerando uma distribuição simétrica padrão  $Z \sim S(0, 1)$  e a existência de seus momentos mostraram que a função característica de  $Z$  pode ser expandida como

$$\psi_Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \mu'_k \frac{t^k}{k!}, \quad (2.33)$$

em que  $\mu'_k = E(Z^k) = i^k \psi_z^{(k)}(0)$ , com  $\psi_z^{(k)}(0)$  denotando a  $k$ -ésima derivada de  $\psi_z^{(k)}(t)$  avaliada em  $t = 0$ . Então,

$$\mu'_k = \begin{cases} 0 & k \text{ ímpar} \\ \frac{(2m)!}{2^m m!} (\mu'_2)^m \{k(m) + 1\} & k = 2m, m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

sendo

$$k(m) = \frac{\varphi^m(0)}{\{\varphi^{(1)}(0)\}^m} - 1, \quad (2.34)$$

em que  $\varphi^{(r)}(0)$  é a  $r$ -ésima derivada da função  $\varphi$ , avaliada em zero. Os coeficientes  $k(m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , são conhecidos como parâmetros de momentos e generalizam o coeficiente de curtose  $\gamma_2 = 3\{k(2) + 1\}$  de uma distribuição  $S(\mu, \phi)$  (MUIRHEAD, 1982).

Cambanis et al. (1981) observaram que a família de distribuições simétricas coincide com a classe de distribuições elípticas univariadas. Na última década surgiram contribuições importantes a partir dos trabalhos de Kelker (1970) para as distribuições elípticas univariadas e multivariadas. Pode-se citar alguns trabalhos que discutem alguns aspectos dessas distribuições, tais como Berkane e Bentler (1986), Rao (1990), Cambanis et al. (1981), Anderson e Fang (1987), Cordeiro (2004), Cysneiros e Paula (2005a), Russo et al. (2009), Cysneiros et. al. (2010) e Cordeiro e Andrade (2011).

A seguir, são apresentadas algumas distribuições simétricas com suporte na reta real para  $Y \sim S(\mu, \phi)$  em que  $u = (y - \mu)^2 / \phi$ .

### 2.3.2 Distribuição Normal

A distribuição Normal tornou-se amplamente aceita como a base da maioria dos trabalhos estatísticos. Alguns resultados devidos a Muirhead (1982), Devlin et al. (1976) caracterizaram a distribuição Normal, chamada de Normal Composta, dentro da classe de distribuições simétricas.

Diz-se que  $Y \sim S(\mu, \phi)$  tem distribuição Normal se sua função geradora de densidade  $g(\cdot)$  é da forma

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u/2), \quad u > 0, \quad (2.35)$$

então,  $Y$  tem distribuição Normal denotada por  $Y \sim N(\mu, \phi)$ , e sua função característica é dada por

$$\psi_Y(t) = e^{it\mu} \exp(-t^2\phi/2), \quad t \in \mathfrak{R}. \quad (2.36)$$

Se  $Y \sim N(\mu, \phi)$ , os momentos centrais de ordem  $r$  são

$$\mu_r = E\{(Y - \mu)^r\} = \begin{cases} 0, & r \text{ ímpar} \\ \sigma^r r! / \{2^{r/2} (r/2)!\}, & r \text{ par} \end{cases}$$

e, portanto, o coeficiente de curtose é  $\gamma_2 = 3$ .

### 2.3.3 Distribuição t de Student

A distribuição t de Student surgiu dos trabalhos de William Sealy Gosset que era um químico e matemático inglês. Quando se formou, em 1899, Gosset foi trabalhar para a destilaria Dublin de Arthur Guinness e Son, na qual iria aplicar os seus conhecimentos de estatística para a seleção das melhores espécies de cevada. Um outro funcionário da Guinness tinha publicado um trabalho que continha alguns segredos da cervejeira. Para prevenir futuras revelações dos “segredos” da marca, a Guinness proibiu que os seus empregados pudessem publicar quaisquer trabalhos independentemente do conteúdo. Então, Gosset usou o pseudônimo “Student” para as suas publicações. O seu feito mais conhecido foi a distribuição t de Student, também conhecida como a distribuição t-Gosset (WALCK, 2001).

A maior aplicação da distribuição t de Student é na construção de testes de hipóteses e intervalos de confiança relacionados a valores esperados da distribuição. A distribuição t de Student também é utilizada para modelar o comportamento de dados que provêm de uma distribuição com caudas mais pesadas que a distribuição Normal, permitindo reduzir a influência de observações aberrantes.

A distribuição t de Student com  $\nu$  graus de liberdade foi originada pela razão de duas variáveis aleatórias independentes. Suponha que  $Z$  tenha distribuição Normal com média 0



e variância 1 e que  $V$  tenha distribuição Qui-quadrado com  $\nu$  graus de liberdade. Suponha, também, que as variáveis  $Z$  e  $V$  sejam independentes. Assim,

$$t = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}, \quad (2.37)$$

tem distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  graus de liberdade. Essa distribuição permite ajustar a curtose dos dados por meio dos graus de liberdade “ $\nu$ ”.

A função densidade de probabilidade da  $t$  de Student é definida por:

$$f(y) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, \quad (2.38)$$

em que  $\Gamma$  é a função gamma. Usando-se a função beta,  $B$ , a função densidade de probabilidade pode ser escrita como:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\nu}B(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}. \quad (2.39)$$

A variável aleatória  $Y \sim S(\mu, \phi)$  tem distribuição  $t$  de Student se sua função geradora de densidade  $g(\cdot)$  é da forma

$$g(u) = \frac{\nu^{\nu/2}}{B(1/2, \nu/2)} (\nu + u)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \nu > 0, u > 0, \quad (2.40)$$

em que  $B(\cdot, \cdot)$  é a função Beta. Assim,  $Y$  é denotada por  $Y \sim t(\mu, \phi, \nu)$ .

A função característica pode ser encontrada em Fang et al. (1990). Utilizando algumas propriedades tem-se que se  $Y = V^{1/2}Z$ , em que  $V \sim GI(\nu/2, \nu/2)$  é uma Gama inversa,  $\nu > 0$  e  $Z \sim N(0, 1)$  sendo independentes, então  $Y \sim t(0, 1, \nu)$ .

Se  $Y \sim t(0, 1, \nu)$  tem-se que:

i) Se  $\nu > r$ , seus momentos de ordem  $r$  existem e são definidos por

$$E(Y^r) = \begin{cases} 0, & r \text{ ímpar} \\ \frac{\nu^{r/2}\Gamma(\frac{r+1}{2})\Gamma(\frac{\nu-r}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}, & r \text{ par} \end{cases}$$

em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama. Assim, tem-se que,  $E(Y) = 0$  para  $\nu > 1$  e  $Var(Y) = \frac{\nu}{\nu-2}$  para  $\nu > 2$ . O momento de ordem  $r$  é infinito se  $r$  for par e  $r \geq \nu$ .

ii) O desvio médio é dado por

$$E(|Y|) = \frac{v^{1/2}\Gamma(\frac{v-1}{2})}{\Gamma(1/2)\Gamma(v/2)}. \quad (2.41)$$

iii) O coeficiente de curtose é  $\gamma_2 = 3 + \frac{6}{v-4}$ , para  $v > 4$ . Este coeficiente é maior que o coeficiente da distribuição Normal.

iv)  $Y^2 \sim F(1, v)$ , sendo  $F$  a distribuição  $F$  de Snedecor com 1 e  $v$  graus de liberdade.

v) Se  $W = \left(\frac{v+1}{v+Y^2}\right)$ , então

$$E(Y^{2k}W^l) = \frac{\left(-\frac{v+1}{2}\right)^l B[(2k+1)/2, \{v+2(l-k)\}/2]}{v^{l-k} B(1/2, v/2)}, \quad (2.42)$$

para  $l = 0, 1, 2$  e  $k = 1, 2, \dots$

vi) A função densidade de  $Y$  tem pontos de inflexão em  $\{-(v/(v+2))^{1/2}, (v/(v+2))^{1/2}\}$ .

vii) Segundo Manoukian (1985), a variável aleatória  $U = (1 + v/Y^2)^{-1}$  tem distribuição Beta com parâmetros  $a = 1/2$  e  $b = v/2$ .

De acordo com as propriedades citadas, pode-se verificar que a distribuição  $t(\mu, \phi, v)$  tende a uma distribuição Normal  $N(\mu, \phi)$  quando  $v \rightarrow \infty$ .

A Figura 2.5 a seguir apresenta os gráficos da função densidade da distribuição t de Student com 3 graus de liberdade e da função densidade da distribuição Normal padrão.

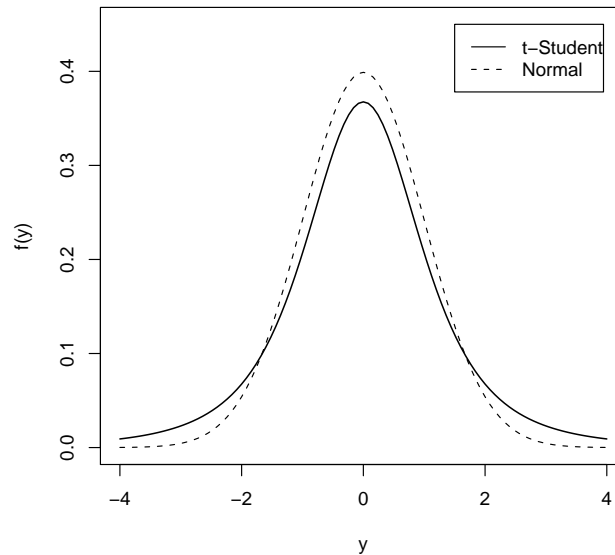


Figura 2.5: Densidades da distribuição t de Student ( $\nu = 3$ ) e distribuição Normal padrão.

### 2.3.4 Distribuição Exponencial Potência

A primeira formulação dessa distribuição pode ser atribuída a Subbotin (1923) cuja função de densidade de probabilidade (fdp) é expressa por:

$$f(\varepsilon) = \frac{mh}{2\Gamma(1/m)} e^{-h^m|\varepsilon|^m}, \quad (2.43)$$

em que  $-\infty < \varepsilon < \infty$ ,  $h > 0$  e  $m \geq 1$ .

Seguindo o procedimento introduzido por Pearson (1895), Lunetta (1963) derivou uma diferente parametrização da distribuição Exponencial Potência resolvendo a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial \log f}{\partial y} = p \left( \frac{\partial f - \log a}{y - c} \right), \quad (2.44)$$

em que  $a$  e  $c$  são constantes.

Assim, a função de densidade da distribuição Exponencial Potência é dada por

$$f(y) = \frac{1}{2\sigma\tau^{1/\tau}\Gamma(1+1/\tau)} \exp\left(-\frac{|y-\mu|^\tau}{\tau\sigma^\tau}\right), \quad (2.45)$$

em que  $-\infty < y < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma > 0$  e  $\tau > 0$ .

É importante notar que, embora com uma diferente parametrização, a distribuição Exponencial Potência pode ser tratada também por métodos bayesianos quando existe o problema para especificar uma distribuição a priori adequada (BOX e TIAO 1992, CHOY e SMITH 1997 e ACHCAR e PEREIRA 1999). Uma distribuição Exponencial Potência bivariada foi introduzida por Simone (1968) e Taguchi (1978), ao passo que uma formulação multivariada dessa distribuição pode ser encontrada em Fang et al. (1990) e Krzanowski e Marriott (1994).

Na estimação dos parâmetros da distribuição Exponencial Potência, assumindo que o parâmetro de forma  $p$  é conhecido, os parâmetros de locação e escala devem ser facilmente obtidos pelo uso do método de estimação de máxima verossimilhança. Entretanto, a estimação do parâmetro de forma é, em geral, um problema. Vários procedimentos interessantes têm sido propostos na literatura, sendo um deles baseado no método de máxima verossimilhança. Em geral, a derivação de estimadores de máxima verossimilhança não traz, formalmente, muitos problemas e os estimadores têm propriedades adequadas, pelo menos assintoticamente.

Uma variável aleatória  $Y \sim S(\mu, \phi)$  tem distribuição Exponencial Potência  $Y \sim EP(\mu, \phi, \tau)$  (BOX e TIAO, 1992) se a sua função geradora de densidade  $g(\cdot)$  é da forma

$$g(u) = C(\tau) \exp\left\{-\frac{1}{2}u^{1/(1+\tau)}\right\}, \quad -1 < \tau \leq 1, u > 0, \quad (2.46)$$

em que  $C(\tau)^{-1} = \Gamma\left(1 + \frac{1+\tau}{2}\right) 2^{1+(1+\tau)/2}$ .

Tem-se ainda que

$$E(Y) = \mu \quad (2.47)$$

e

$$Var(Y) = 2^{(1+\tau)} \left[ \frac{\Gamma\left\{\frac{3(1+\tau)}{2}\right\}}{\Gamma\left(\frac{1+\tau}{2}\right)} \right] \phi. \quad (2.48)$$

O parâmetro  $\tau$  pode ser analisado como uma medida de curtose, ou mesmo, como uma medida de não normalidade, pois quando  $\tau = 0$  obtém-se a distribuição Normal. Quando  $\tau = 1$  tem-se a distribuição Exponencial Dupla. Se  $\tau$  tende a  $-1$ , a distribuição tende a uma uniforme  $(\mu - \sqrt{3\phi}, \mu + \sqrt{3\phi})$ . Quando  $\tau > 0$ , tem-se que  $\gamma_2 > 3$ , ou seja, a distribuição é leptocúrtica. Quando  $\tau < 0$ , tem-se que  $\gamma_2 < 3$ , ou seja, a distribuição é platicúrtica.

A Figura 2.6 a seguir apresenta o gráfico da função densidade da distribuição Exponencial Potência ( $\tau = 0,3$ ) comparado com a função densidade da distribuição Normal padrão.

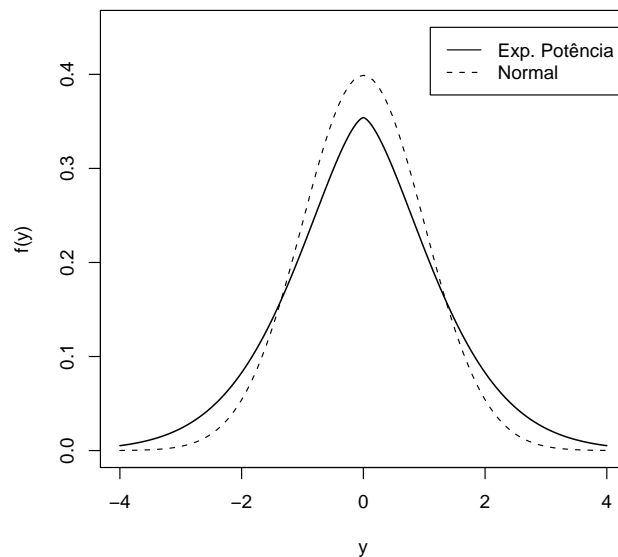


Figura 2.6: Densidades da distribuição Exponencial Potência ( $\tau = 0,3$ ) e distribuição Normal padrão.

### 2.3.5 Distribuição Logística II

Segundo Gumbel (1944), a distribuição Logística surgiu de uma maneira puramente estatística como distribuição limite ( $n \rightarrow \infty$ ) de medidas padronizadas (média de maiores e menores valores) de amostras aleatórias de tamanho  $n$ . Gumbel e Keeney (1950) mostraram que a distribuição Logística é obtida como a distribuição limite de um múltiplo apropriado do “quociente extremo” dado por *Maximo/Minimo*. Talacko (1956) mostrou que a Logística é a distribuição limite ( $r \rightarrow \infty$ ) da variável padronizada correspondente a  $\sum_{j=1}^r j^{-1} X_j$ , em que  $X_j$ 's são variáveis aleatórias independentes cada uma tendo distribuição valor extremo tipo I.

O fato adicional de que a distribuição Logística tem forma similar a distribuição Normal torna ela proveitosa em ocasiões apropriadas. Substituindo a Normal pela Logística obtém-se uma simplificação das análises sem trazer grandes discrepâncias na teoria.

Diferentes formas de generalizações da distribuição Logística têm sido propostas na literatura. A função densidade da distribuição Logística II é dada por

$$f(y) = \frac{\alpha e^{-\alpha y} (1 + e^{-y})^\alpha - \alpha e^{-y(1+\alpha)} (1 + e^{-y})^{\alpha-1}}{(1 + e^{-y})^{2\alpha}}, \quad -\infty < y < \infty, \quad \alpha > 0, \quad (2.49)$$

em que  $\alpha$  é um parâmetro de locação.

A função acumulada da distribuição Logística II é dada por

$$F(y) = 1 - \frac{e^{-\alpha y}}{(1 + e^{-y})^\alpha}, \quad -\infty < y < \infty, \quad \alpha > 0. \quad (2.50)$$

Uma variável aleatória  $Y \sim S(\mu, \phi)$  tem distribuição Logística II se sua função geradora de densidade  $g(\cdot)$  é da forma

$$g(u) = \frac{e^{-u^{1/2}}}{(1 + e^{-u^{1/2}})^2}, \quad u > 0. \quad (2.51)$$

Dessa forma, a variável aleatória é denotada por  $Y \sim LII(\mu, \phi)$ .

A sua função característica é dada por

$$\psi_y(t) = \frac{2 \left( e^{it\mu} \pi \phi^{1/2} t \right)}{\left( e^{\pi \phi^{1/2} t} - e^{-\pi \phi^{1/2} t} \right)}, \quad t \in \mathfrak{R}. \quad (2.52)$$

Tem-se que  $E(Y) = \mu$ ,  $Var(Y) = \pi^2 \phi / 3$  e  $\gamma_2 = 4,2$ , que é maior que as curtoses das distribuições Normal e Logística I.

A Figura 2.7 apresenta o gráfico da função densidade da distribuição Logística II padrão comparado com a função densidade da distribuição Normal padrão.

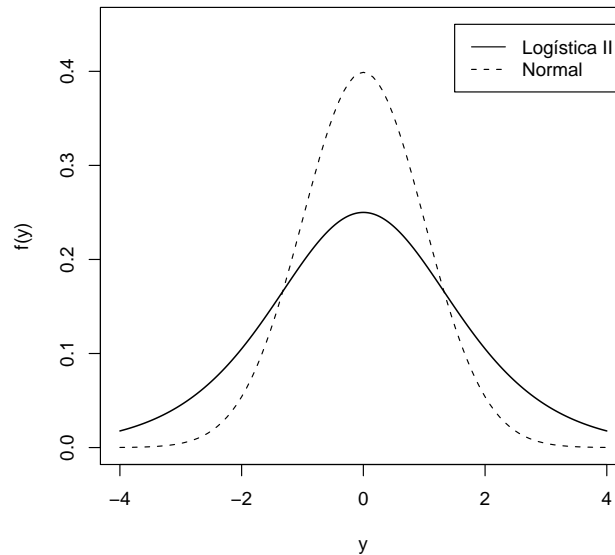


Figura 2.7: Densidades da distribuição Logística II padrão e distribuição Normal padrão.

## 2.4 Modelos Simétricos Não Lineares

Os modelos lineares são bastante utilizados para um grande número de aplicações em regressão, com o objetivo de relacionar uma variável resposta a uma ou mais variáveis explicativas. Porém, em algumas situações um modelo não linear pode ser mais apropriado, uma vez que os fenômenos biológicos geralmente não são lineares. A principal característica dos modelos não lineares biológicos é que eles são deduzidos a partir de suposições teóricas e os parâmetros resultantes são interpretáveis. Assim, aproximá-los por modelos lineares, mesmo que sejam alcançados ajustes satisfatórios, prejudicaria bastante à interpretação dos parâmetros de interesse.

Os modelos não lineares são aplicados em diversas áreas. Uma aplicação frequente pode ser para explicar, por exemplo, o volume de árvores em função do diâmetro e altura ou a altura de árvores em função do diâmetro nos chamados modelos hipsométricos. Fenômenos produzindo curvas sigmoidais, frequentemente encontrados na agricultura, biologia, ecologia, engenharia e economia, são explicados por meio dos modelos não lineares.

As principais técnicas desenvolvidas para os modelos não lineares, até o início dos

anos 70, eram restritas à suposição de normalidade para a variável resposta. Taylor (1992) propôs o ajuste de um modelo de regressão linear supondo erros com distribuição Exponencial Potência com um parâmetro extra de forma. Arellano-Valle (1996) apresentou vários resultados sobre as propriedades, inferência e aplicações a modelos de regressão em distribuições elípticas. Cordeiro et al. (2000) obtiveram a correção do viés do estimador de máxima verossimilhança na classe de modelos não lineares simétricos. Ferrari e Uribe-Opazo (2001) estendem esses resultados para modelos de regressão linear simétricos. Cordeiro (2004) desenvolveu uma correção de Bartlett para os modelos de regressão não lineares simétricos generalizando os resultados de Ferrari e Uribe-Opazo (2001). Galea et al. (2005) apresentaram alguns resultados sobre modelagem, em particular sobre o desenvolvimento da análise inferencial e de diagnóstico na classe não lineares com erros simétricos independentes. Cordeiro e Andrade (2011) introduziram uma nova classe de modelos simétricos transformados para estender o modelo de Box e Cox (1964).

### 2.4.1 Definição

A família simétrica de densidades de locação-dispersão guarda a estrutura da distribuição Normal, mas elimina a forma específica da densidade Normal para incluir densidades simétricas com caudas mais leves ou mais pesadas do que as caudas da distribuição Normal (CYSNEIROS et al., 2005b).

Para introduzir uma estrutura regressora na classe de distribuições (2.32), toma-se a componente sistemática do modelo linear generalizado para o vetor da média  $\mu = E(Y)$  dado por

$$g(\mu) = \eta(\beta) = h(x, \beta), \quad (2.53)$$

em que  $g(\cdot)$  é conhecida e duas vezes diferenciável,  $\eta(\beta)$  é o preditor não linear,  $x$  é uma matriz  $n \times p$  de posto completo e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$  é um conjunto de parâmetros não lineares desconhecidos a serem estimados.

Os modelos simétricos assumem que as variáveis aleatórias  $Y_1, \dots, Y_n$  podem ser tratadas como distribuídas independentemente seguindo a componente aleatória (2.32) e a componente sistemática (2.53). Desta forma, o modelo definido em (2.32) e (2.53) é dito modelo simétrico não linear.



### a) Inferência

O principal objetivo na análise de modelos simétricos é fazer inferências no vetor de parâmetros  $\beta$  e no parâmetro de dispersão  $\phi$ . A log-verossimilhança para os parâmetros do modelo pode ser expressa como:

$$l(\beta, \phi) = -\frac{n}{2} \log \phi + \sum_{i=1}^n \log g \{ \phi^{-1} (y_i - \mu_i)^2 \}, \quad (2.54)$$

A log-verossimilhança apresentada pode ser maximizada incondicionalmente usando alguns software como o SAS, Matlab, R ou a linguagem de programação Ox.

A função escore para o vetor de parâmetro  $\beta$  e parâmetro de dispersão  $\phi$  é expressa como:

$$U_{\beta} = \phi^{-1} X^T H D (y - \mu) \quad (2.55)$$

e

$$U_{\phi} = (2\phi)^{-1} \{ \phi^{-1} Q(\mu, y) - n \}. \quad (2.56)$$

Os parâmetros  $\beta$  e  $\phi$  são globalmente ortogonais e então os estimadores de máxima verossimilhança de  $\beta$  e  $\phi$  são assintoticamente independentes devido a sua normalidade assintótica e a estrutura bloco diagonal da matriz de informação conjunta, isto é,  $K = \text{diag}(K_{\beta}, k_{\phi})$ , em que  $K_{\beta} = 4a\phi^{-1} X^T H^2 X$  e  $k_{\phi} = n(4b - 1)/(4\phi^2)$  são, respectivamente, as matrizes de informação para  $\beta$  e  $\phi$ ,  $H = \text{diag}\{\mu_i'\}$  e  $Q(\mu, y) = (y - \mu)^T D (y - \mu)$  (CORDEIRO e ANDRADE, 2011).

Os estimadores de máxima verossimilhança de  $\beta$  e  $\phi$  são obtidos pela solução do sistema de equações dado por

$$U_{\beta} = 0 \quad (2.57)$$

e

$$U_{\phi} = 0. \quad (2.58)$$

As formulações acima são não lineares e não podem ser resolvidas explicitamente.

No entanto, podem ser resolvidas por meio de um método iterativo, como por exemplo o método escore de Fisher. Assim, o processo iterativo reduz para

$$\beta^{(m+1)} = (X^T H^{(m)2} X)^{-1} X^T H^{(m)2} \delta^{(m)} \quad (2.59)$$

e

$$\phi^{(m+1)} = \frac{1}{n} Q(\mu^{(m)}, y), \quad (2.60)$$

em que  $\delta^{(m)} = \eta^m + (4a)^{-1} H^{(m)(-1)} D^{(m)} (y - \mu^{(m)})$ .

Aproximações iniciais  $\beta^{(1)}$  e  $\phi^{(1)}$  escolhidas, são usadas para avaliar  $H^{(1)}$ ,  $D^{(1)}$  e  $\delta^{(1)}$  e assim produzirem a próxima estimativa para  $\beta^{(2)}$ . Então, atualiza-se  $\mu^{(2)}$  e  $Q(\mu^{(2)}, y)$  para encontrar  $\phi^{(2)}$  e assim continuando as iterações até que as estimativas  $\beta$  e  $\phi$  sejam obtidas.

As expressões de  $D$ ,  $a$  e  $b$  são facilmente derivadas para muitas distribuições simétricas e podem ser vistas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Expressões de  $D$ ,  $a$  e  $b$  para algumas distribuições simétricas.

Distribuição	$D$	$a$	$b$
Normal	$I$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$t$ de Student	$diag \left\{ \frac{v+1}{(v+u_i)} \right\}$	$\frac{(v+1)}{4(v+3)}$	$\frac{3(v+1)}{4(v+3)}$
Logística II	$diag \left\{ \frac{\exp(-\sqrt{u_i}) - 1}{\sqrt{u_i}(1 + \exp(-\sqrt{u_i}))} \right\}$	$\frac{1}{12}$	0,60749
Exponencial Potência	$diag \left\{ \frac{1}{(1+k)u_i^{k/(k+1)}} \right\}$	$\frac{\Gamma\{(3-k)/2\}}{4(2^{k-1})(1+k)^2\Gamma\{(k+1)/2\}}$	$\frac{(k+3)}{4(k+1)}$

Os modelos simétricos são uma nova linha de pesquisa em ciência florestal e a expectativa é que essa nova metodologia venha a contribuir na obtenção de estimativas mais precisas.

## 3 Material e Métodos

### 3.1 Caracterização do Experimento

A Região do Araripe, localizada na mesorregião do sertão pernambucano representa 18% do território estadual com uma área de 1857,9 km<sup>2</sup> (PERNAMBUCO, 2012). Em março de 2002 foi implantado na Estação Experimental do Instituto Agrônomo de Pernambuco na Chapada do Araripe - PE, o Módulo de Experimentação Florestal em uma área de 2,352 ha, com 15 híbridos do gênero *Eucalyptus* e nove espécies naturais e exóticas.

Visando atender a carência de informações, esse experimento tem como objetivo selecionar clones de *Eucalyptus* spp., por meio de estudos de modelagem de crescimento, mortalidade, sobrevivência, volumetria, calorimetria, entre outros. Na Figura 3.1 é possível observar uma vista parcial do experimento.



Figura 3.1: Vista parcial do experimento

A região na qual o experimento foi realizado possui as seguintes coordenadas geográficas de posição 07°29'00 S e 40°36'00 W e altitude de 816 metros. O clima regional predominante é do tipo BShw' de Koppen, quente e seco das baixas latitudes, com chuvas de verão. A presença da Chapada do Araripe confere uma diferenciação no clima regional, elevando a pluviometria e registrando cerca de 735 mm anuais. A temperatura média é 24,6° C, a máxima é de 33° C e a mínima de 15,9° C, com cerca de 2° C de amplitude térmica. O solo é do tipo latossolo vermelho-amarelo (ENCARNAÇÃO, 1980; ARAUJO et al., 2005).

O experimento é formado por 15 clones de *Eucalyptus* spp. Foi utilizado um delineamento inteiramente casualizado, com quatro repetições por clone. Cada clone foi plantado em quatro parcelas de 49 árvores. No entanto, as árvores da borda são desconsideradas do estudo, perfazendo assim um total de 25 árvores por parcela (Figura 3.2), plantadas no espaçamento 3x2 m, perfazendo 21 metros de largura e 14 de comprimento num total de 294 m<sup>2</sup> de parcela, totalizando 1500 árvores, sendo 100 árvores plantadas por clone.

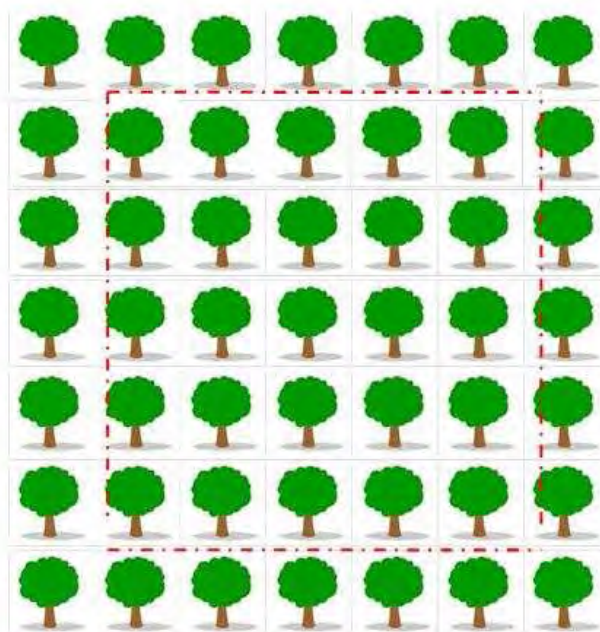


Figura 3.2: Planta baixa da parcela

É possível observar, na Tabela 3.1, os 15 tratamentos utilizados no experimento. As mudas dos clones de *Eucalyptus* spp. foram provenientes da Comercial Agrícola Paineiras LTDA, localizada no município de Urbano Santos, no Estado do Maranhão.

Tabela 3.1: Clones de *Eucalyptus* spp. usados no Módulo de Experimentação Florestal para a Região do Araripe, em Araripina-PE.

Tratamento	Clones	Descrição
01	C49	<i>Eucalyptus tereticornis</i> (cruzamento natural)
02	C80	Híbrido de <i>E. urophylla</i> x <i>E.tereticornis</i> (polinização controlada)
03	C315	Híbrido de <i>E. urophylla</i> x <i>E.tereticornis</i> (polinização controlada)
04	C101	Híbrido de <i>E. urophylla</i> x <i>E.tereticornis</i> (polinização controlada)
05	C78	Híbrido de <i>E. urophylla</i> x <i>E.tereticornis</i> (polinização controlada)
06	C156	Híbrido de <i>E. urophylla</i> x <i>E. tereticornis</i> x <i>E. pellita</i> (pol. controlada)
07	C39	<i>Eucalyptus urophylla</i> (cruzamento natural)
08	C27	<i>Eucalyptus brassiana</i> (cruzamento natural)
09	C51	Híbrido de <i>E. urophylla</i> x <i>E.tereticornis</i> (polinização controlada)
10	C158	Híbrido de <i>E. urophylla</i> x <i>E.tereticornis</i> (polinização controlada)
11	C41	<i>Eucalyptus urophylla</i> (cruzamento natural)
12	C31	<i>Eucalyptus brassiana</i> (cruzamento natural)
13	C25	<i>Eucalyptus brassiana</i> (cruzamento natural)
14	C33	<i>Eucalyptus urophylla</i> (cruzamento natural)
15	C11	<i>Eucalyptus brassiana</i> (cruzamento natural)

A primeira mensuração do experimento ocorreu aos dois meses, depois aos seis meses e posteriormente a cada seis meses até os 90 meses, data em que as árvores do experimento foram cortadas. Durante o experimento, em cada unidade amostral, foram medidas as variáveis circunferência à altura do peito (*CAP*) e altura da árvore (*H*). No entanto, a medição da variável *CAP* teve início a partir dos 12 meses. Isso se deve ao fato de que antes disso as árvores ainda não atingiram uma altura mínima de 1,30 m. As *CAP*'s foram obtidos com fita métrica, com precisão de décimos de centímetros e, posteriormente, transformados para diâmetro à altura do peito ( $DAP = CAP/\pi$ ). Para a medição da altura, utilizou-se um hipsômetro com uma precisão de décimos de metro.

## 3.2 Análise Estatística

Antes do ajuste das distribuições diamétricas, dos modelos volumétricos e de crescimento, com a finalidade de constatar ou não diferenças volumétricas significativas entre os tratamentos, realizou-se o teste Scott-Knott (Scott e Knott, 1974). Os detalhes dos resultados do teste podem ser visto em Rocha (2012). De acordo com os resultados encontrados, foi possível dividir os clones de *Eucalyptus* em três diferentes grupos. Desta forma, todas as análises realizadas nesta tese respeitaram a formação desses grupos. Na Tabela 3.2 observa-se a distribuição dos tratamentos por grupo após aplicação do teste.

Tabela 3.2: Agrupamento dos tratamentos após aplicação do teste Scott-Knott.

Grupo	Tratamentos
I	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15
II	7
III	11

Inicialmente, com o objetivo de compreender melhor o conjunto de dados, realizou-se um estudo descritivo da taxa de mortalidade, *DAP*, altura e volume.

Antes de iniciar o ajuste das distribuições diamétricas, para se ter uma ideia da assimetria e outliers da variável *DAP*, foi apresentado o box-plot.

Para gerar as prognoses diamétricas foi necessário conhecer a estrutura de frequência por classe de diâmetro, em função do tempo. Desta forma, para todas as idades foram ajustadas as seguintes distribuições de probabilidade: Normal, Log-normal, Weibull e Gama. Os parâmetros das fdp foram estimados a partir do método de máxima verossimilhança. Após o ajuste das distribuições adotadas, foram construídos os histogramas com as respectivas curvas das distribuições de probabilidade.

As funções foram processadas e ajustadas utilizando o programa SAS, pelo procedimento CAPABILITY (Proc Capability). A Proc Capability é um componente do SAS que apresenta como recurso uma variedade de análises e recursos estatísticos, dentre elas, os ajustes de funções de distribuição de frequência e testes de aderência. Utilizou-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, em cada tempo estudado, para determinar a distribuição de probabilidade que melhor representa a distribuição diamétrica.

Por fim, após a obtenção da fdp para cada tempo estudado e as respectivas estimativas dos parâmetros, é possível gerar as prognoses para o regime de manejo do povoamento

de *Eucalyptus* spp. Essas estimativas são calculadas resolvendo a integral descrita na fórmula (2.3) para as fdp selecionadas pelo critério adotado.

Posteriormente, para obter as equações volumétricas, foi necessário determinar o volume individual das árvores. No período de 12 aos 84 meses utilizou-se o fator de forma para determinar o volume individual das árvores. Na última medição, época em que as árvores foram cortadas, foi utilizado a fórmula de Smalian.

Na prática, em geral, ajustam-se os modelos volumétricos normal não lineares supondo erros multiplicativos. A justificativa para esse procedimento é o fato do modelo ser linearizável quando os erros são multiplicativos. Para os modelos volumétricos de Shumacher e Hall e de Spurr foi considerado erros aditivos e o ajuste procedeu de forma não linear. Desta forma, para estimar o volume dos *Eucalyptus*, por exemplo, a partir do modelo de Schumacher e Hall por meio dos modelos simétricos, temos que:

$$g(\mu_i) = \beta_0 DAP_i^{\beta_1} H_i^{\beta_2}, \quad (3.1)$$

em que  $\mu_i$  é a média de  $y_i$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros a serem estimados. Os modelos foram ajustados supondo diferentes distribuições simétricas para os erros, tais como: Normal, t de Student, Exponencial Potência e Logística II. Os parâmetros  $\tau$  e  $\nu$  das distribuições Exponencial Potência e t de Student, respectivamente, foram estimados através da verossimilhança perfilada.

A função densidade de probabilidade de  $y_i$  é definida por,

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\phi}} g(u), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

em que  $u = \frac{(y-\mu)^2}{\phi}$  e a função geradora de densidade  $g(u)$  pode assumir diversas formas. Para a distribuição Normal,  $g(u)$  é definido por:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u/2). \quad (3.3)$$

Assim, a log-verossimilhança do modelo é dada por:

$$l(y; \mu, \phi) = -\frac{n}{2} \ln \phi - n(u/2), \quad (3.4)$$

em que  $u = \frac{(y-\mu)^2}{\phi}$ ,  $y$  é o volume da árvore,  $\mu = \beta_0 DAP^{\beta_1} H^{\beta_2}$  e  $\phi$  o parâmetro de escala.

Desta forma, a log-verossimilhança é dada por:

$$l(y; \mu, \phi) = -\frac{n}{2} \ln \phi - n \left[ \frac{(y - \beta_0 DAP^{\beta_1} H^{\beta_2})^2}{2\phi} \right]. \quad (3.5)$$

Assim, por meio de métodos iterativos é possível obter a estimativa de  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\phi$ . Desta forma, é possível ajustar os modelos volumétricos e modelos de crescimento associados as distribuições simétricas. Para esses ajustes, o  $l(y; \mu, \phi)$  e  $\mu$  e assumirá diferentes formas de acordo com o modelo e a distribuição simétrica selecionada. Para maiores detalhes consultar o apêndice desta tese.

No ajuste dos modelos volumétricos, utilizou-se como padrão o modelo de Schumacher e Hall e o modelo de Spurr associados a distribuição Normal.

Após a determinação das equações volumétricas, foram calculados o volume por hectare (*vol/ha*) e o incremento médio anual (IMA).

Após o ajuste dos modelos volumétricos associados as distribuições simétricas, realizou-se o ajuste dos modelos de crescimento. No entanto, os modelos de crescimento, em geral, utilizam apenas o tempo como variável dependente. Assim, devido a esse fato, as estimativas desses modelos ficam distorcidas. Essa distorção aumenta quanto maior for a variabilidade da variável resposta. Desta forma, dada a dinâmica com que os modelos estatísticos vêm sendo aplicado nas pesquisas, gerando novos modelos para situações gerais e específicas, novos estudos nas áreas de ciências florestais são altamente justificáveis.

Desta forma, nesta tese se propõe novas formulações matemáticas com o objetivo de obter equações de crescimento mais precisas e eficientes nas estimativas de volume em árvores de *Eucalyptus* spp. na região da Chapada do Araripe-PE.

### 3.2.1 Modelo de Schumacher e Hall Modificado I

O primeiro modelo proposto é uma extensão do modelo de Schumacher e Hall. A ideia foi incorporar a variável tempo ao modelo. Desta forma, será possível avaliar o volume das árvores ao longo do tempo. O modelo citado é expresso por:

$$V_{ij} = \beta_0 DAP_{ij}^{\beta_1} H_{ij}^{\beta_2} t_{ij}^{\beta_3} + \varepsilon_{ij}, \quad (3.6)$$

em que  $V_{ij}$  é o volume da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição,  $DAP_{ij}$  é o diâmetro à altura do



peito da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição,  $H_{ij}$  é a altura total da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição,  $t_{ij}$  é a idade da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  parâmetros do modelo e  $\varepsilon_{ij}$  o erro associado da  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima medição.

### 3.2.2 Modelo de Schumacher e Hall Modificado II

O segundo modelo proposto também é uma extensão do modelo de Schumacher e Hall. Todavia, a ideia foi incorporar a variável tempo no expoente da função exponencial. Assim, o modelo citado é expresso por:

$$V_{ij} = \beta_0 DAP_{ij}^{\beta_1} H_{ij}^{\beta_2} \exp^{-\beta_3 t_{ij}} + \varepsilon_{ij}. \quad (3.7)$$

Para efeito de comparação, utilizou-se o modelo de Chapman-Richards como padrão. No entanto, com o objetivo de dar condições de igualdade perante os modelos propostos, a variável  $DAP$  e altura foram incorporados ao termo assintótico. Desta forma, o modelo de Chapman-Richards passa a ser expresso por:

$$V_{ij} = \beta_0 DAP_{ij}^{\beta_1} H_{ij}^{\beta_2} [1 - \exp(-\beta_3 t_{ij})]^{\beta_4} + \varepsilon_{ij}. \quad (3.8)$$

Uma limitação desses modelos é o fato de necessitarem do diâmetro e altura da árvore na estimativa do volume em um tempo futuro. No entanto, existe na literatura florestal metodologias para se corrigir tal limitação. Clutter et al. (1983) considera métodos para obter previsões de produções futuras. Aborda-se a seguir, uma das alternativas de aproximações para previsões futuras.

Considere a equação para volume de pinheiros desenvolvida por Bennet (1970):

$$\ln(\hat{V}) = 5,98812 - 121,713/S - 19,758/A + 0,89683 \ln(B), \quad (3.9)$$

em que  $V$  é o volume da árvore,  $S$  é o índice de sítio,  $A$  é a idade da árvore e  $B$  é a área basal. Essa equação de produção é baseada no modelo de Schumacher (1939).

Quando valores atuais de idade, índice de sítio e área basal são usados nesta equação, uma estimativa do volume atual da árvore é obtida. Se o volume em alguma projeção futura da idade é desejado, ele pode ser estimado resolvendo a equação para valores apropriados para o índice de sítio, a idade futura e área basal predita na idade projetada. Valores apropriados para as duas primeiras variáveis são mais simples de serem obtidas.

Portanto, o problema consiste basicamente em obter uma projeção futura para a variável área basal. A equação dada por Bennet (1970) é expressa por:

$$\ln(B_2) = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) \ln(B_1) + 5,1649 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right), \quad (3.10)$$

em que  $A_1$  é a idade atual,  $A_2$  é a idade projetada,  $B_1$  é a área basal atual e  $B_2$  é a área basal estimada na idade projetada.

Resolvendo a equação 3.10 obtem-se uma projeção futura para a área basal. Desta forma, substituindo o valor projetado da área basal na equação 3.9 é obtido o volume projetado.

Baseado nessa aproximação, propomos a seguir um modelo para estimar o *DAP* e altura ( $H$ ) com o objetivo de projetar o volume em uma idade futura. Para tal finalidade, o modelo de crescimento de Chapman-Richards é considerado

$$y_{ij} = \beta_0 [1 - \exp(-\beta_1 t_{ij})]^{\beta_2} + \varepsilon_{ij}, \quad (3.11)$$

em que  $y$  é o *DAP* ou altura,  $t$  é a idade projetada,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros do modelo e  $\varepsilon$  o erro associado.

Para obter o *DAP* e altura estimada na idade projetada é necessário obter uma equação para a variável *DAP* e uma para a variável altura. Posteriormente, com as estimativas do *DAP* e altura, a solução é obtida para os modelos 3.6 e 3.7, projetando assim o volume na idade futura.

Uma vez que o desenvolvimento de novos modelos tem tido avanços consideráveis nas ciências florestais, a expectativa é que esses modelos gerem estimativas mais precisas e, ao mesmo tempo, forneçam uma ferramenta de avaliação a mais no planejamento do manejo florestal sustentado.

O ajuste desses modelos ocorre de forma similar aos modelos volumétricos. Esses modelos foram ajustados a partir do programa SAS, pelo procedimento Proc NLP. Este procedimento oferece um conjunto de técnicas de otimização para minimizar ou maximizar uma função contínua não linear. Para gerar as estimativas dos parâmetros para os modelos simétricos não lineares, por este procedimento, é necessário determinar a função de máxima verossimilhança da distribuição simétrica adotada.

Após a seleção dos modelos de crescimento, um gráfico de linha foi construído levando

em consideração a curva média dos volumes real e ajustado.

Procedimentos de identificação e comparação de modelos têm sido propostos na literatura. Uma das estatísticas mais utilizadas para comparar o ajuste de modelos é o erro percentual absoluto médio (EPAM). Essa estatística é definida pela seguinte expressão:

$$EPAM(\%) = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|, \quad (3.12)$$

em que  $n$  é o número de observações,  $y_i$  o valor observado e  $\hat{y}_i$  o valor estimado.

Após o cálculo do erro percentual absoluto médio, um ranqueamento entre os modelos foi realizado.

Após a seleção da equação, de acordo com o critério estabelecido anteriormente, uma análise dos resíduos percentuais foi realizada com o intuito de validar o modelo. Usando o gráfico do resíduo percentual é possível observar quanto as estimativas do modelo adotado se distanciam do valor real, em percentual. Os resíduos percentuais são calculados a partir da seguinte expressão

$$E\% = \left( \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right), \quad (3.13)$$

em que  $y_i$  é o valor observado e  $\hat{y}_i$  o valor estimado.

## 4 Resultados e Discussão

### 4.1 Grupo I

Inicialmente, foi realizado um estudo descritivo com o objetivo de compreender melhor o comportamento dos clones de *Eucalyptus* spp. adotados no experimento.

Na Tabela 4.1 observa-se a taxa de mortalidade em cada clone de *Eucalyptus* spp. estudado. Para o grupo I, o número total de árvores sobreviventes no experimento foi de 1028 árvores. Destaca-se, com uma baixa taxa de mortalidade, os clones correspondentes aos tratamentos 2, 9 e 10. Entretanto, os tratamentos 12 e 15 obtiverem taxas de mortalidade superior a 50 %, inviabilizando economicamente a utilização desses tratamentos na região. Essa taxa elevada deve-se, principalmente, a um ataque de formiga ocorrido nos respectivos tratamentos.

Tabela 4.1: Taxa de mortalidade dos clones de *Eucalyptus* spp. por tratamento (Grupo I).

Tratamento	Taxa de mortalidade (%)
01	12
02	2
03	19
04	12
05	31
06	18
08	21
09	5
10	7
12	57
13	22
14	15
15	51

Na Tabela 4.2 observa-se a média e o coeficiente de variação (CV) para as variáveis *DAP* (cm), altura (m) e volume ( $m^3$ ). Na medição realizada aos 12 meses as árvores apresentaram um *DAP* médio de 3,9 cm, uma altura média de 4,3 m e um volume médio de 0,003  $m^3$ . O experimento foi finalizado aos 90 meses, período em que as árvores apresentaram um *DAP* médio de 12,3 cm, uma altura média de 15,7 m e um volume médio de 0,092  $m^3$ . Aos 12 meses foi o período em que ocorreu a maior variabilidade relativa nas três variáveis analisadas. A variável *DAP* obteve um coeficiente de variação, na maior parte do tempo, em torno de 17 %. A variável altura apresentou menor variabilidade, dentre as três variáveis estudadas. Nesta variável, o coeficiente de variação teve uma tendência de redução ao longo do tempo, finalizando o estudo com um CV em torno de 10 %. A variável volume apresentou uma elevada variabilidade relativa, chegando a obter um CV, aos 12 meses, superior a 50%. Durante todo o período analisado, essa variável apresentou CV superior a 36%, certamente, devido as diferentes taxas de crescimento entre os clones.

Tabela 4.2: Estatística descritiva do *DAP*, altura e volume dos clones de *Eucalyptus* spp., nas diferentes idades (Grupo I).

Medidas	Tempo (meses)	<i>DAP</i> (cm)		Altura (m)		Volume ( $m^3$ )	
		Média	CV	Média	CV	Média	CV
01	12	3,9	19,9	4,3	18,0	0,003	51,5
02	18	5,7	16,8	6,6	14,6	0,008	40,0
03	24	7,2	15,6	8,4	12,9	0,017	36,9
04	30	8,2	15,4	9,7	12,2	0,025	38,1
05	36	8,9	16,9	10,4	11,8	0,032	42,1
06	42	9,3	17,4	11,1	11,6	0,037	44,0
07	48	9,6	17,4	11,6	11,6	0,042	44,0
08	54	9,9	17,5	12,2	11,7	0,047	44,1
09	60	10,2	17,3	12,7	11,3	0,052	43,2
10	66	10,4	17,2	13,3	10,9	0,056	42,7
11	72	10,6	17,4	13,9	10,4	0,061	42,8
12	78	11,0	17,5	14,6	10,1	0,069	42,7
13	84	11,6	17,6	15,1	10,3	0,080	42,8
14	90	12,3	18,1	15,7	10,1	0,092	43,3

### 4.1.1 Distribuição Diamétrica

Observa-se na Figura 4.1 o box-plot da variável *DAP* no período de 12 meses até os 90 meses. Dentre as 1028 árvores, o menor *DAP* foi de 0,64cm, aos 12 meses, e o maior *DAP* foi de 22,7 cm, aos 90 meses. Observa-se também um crescimento mais acentuado durante os primeiros 36 meses. É possível notar, ainda, a partir dos 36 meses algumas observações extremas, ou seja, algumas árvores começam a ter um crescimento mais acentuado que outras. Esse comportamento repete-se até o fim do estudo. Observa-se também uma certa simetria até os 30 meses, comportamento que não se repete a partir dos 36 meses.

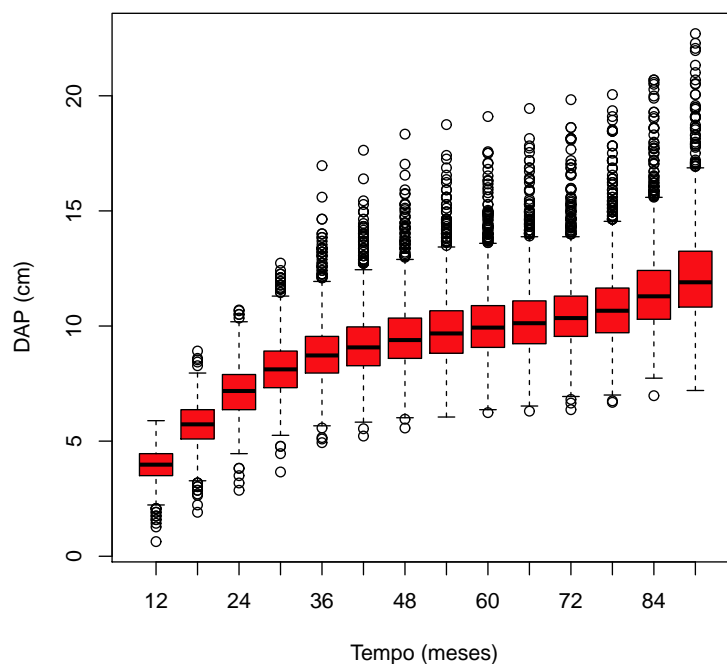


Figura 4.1: Evolução do *DAP*, nas diferentes idades dos tratamentos (Grupo I).

Na seleção da melhor equação de probabilidade para a determinação da distribuição de frequência por classe de diâmetro, nas diferentes idades do tratamento, foi utilizado o teste de aderência Kolmogorov-Smirnov (KS).

Na Tabela 4.3 é possível observar o valor da estatística do teste KS ao longo do tempo. A distribuição Weibull melhor representou os dados nos meses 12 e 18. A distribuição Normal e Gama foram as mais apropriadas, respectivamente, aos 24 e 30 meses. A distribuição Log-normal representou a distribuição diamétrica na maior parte do período avaliado, ou seja, foi a distribuição mais apropriada dos 36 aos 90 meses.

Tabela 4.3: Seleção das equações de probabilidade de acordo com o teste KS (Grupo I).

Tempo (meses)	Distribuições				Distribuição Selecionada
	Normal	Log-normal	Weibull	Gama	
12	0,059	0,103	0,058	0,089	Weibull
18	0,075	0,109	0,052	0,098	Weibull
24	0,067	0,100	0,071	0,089	Normal
30	0,076	0,064	0,088	0,059	Gama
36	0,102	0,069	0,097	0,079	Log-normal
42	0,106	0,070	0,092	0,082	Log-normal
48	0,106	0,070	0,091	0,082	Log-normal
54	0,116	0,080	0,092	0,092	Log-normal
60	0,114	0,078	0,093	0,090	Log-normal
66	0,114	0,078	0,093	0,090	Log-normal
72	0,114	0,078	0,099	0,091	Log-normal
78	0,124	0,087	0,104	0,099	Log-normal
84	0,114	0,077	0,101	0,089	Log-normal
90	0,100	0,063	0,081	0,076	Log-normal

Na Tabela 4.4 observa-se as estimativas dos parâmetros, por meio do método de máxima verossimilhança, das distribuições selecionadas pelo teste de aderência KS.



Tabela 4.4: Estimativas dos parâmetros das distribuições diamétricas selecionadas, nas diferentes idades (Grupo I).

Tempo (meses)	Distribuição	coeficientes			
		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
12	Weibull	3,92	3,98	0,25	5,27
18	Weibull	5,71	5,08	1,02	5,58
24	Normal	7,17	1,12	–	–
30	Gama	8,17	1,25	42,42	0,19
36	Log-normal	8,87	1,50	–	–
42	Log-normal	9,26	1,54	–	–
48	Log-normal	9,64	1,60	–	–
54	Log-normal	9,92	1,64	–	–
60	Log-normal	10,20	1,57	–	–
66	Log-normal	10,37	1,69	–	–
72	Log-normal	10,64	1,74	–	–
78	Log-normal	10,96	1,80	–	–
84	Log-normal	11,62	1,92	–	–
90	Log-normal	12,27	2,09	–	–

Nas Figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 é possível observar os gráficos das distribuições dos diâmetros e as respectivas curvas das distribuições Normal, Weibull, Log-normal e Gama nas diferentes idades, possibilitando observar o comportamento de cada função em relação às idades estudadas, e de como ocorrem as distribuições das árvores de acordo com as classes diamétricas, confirmando os resultados encontrados no teste de aderência.

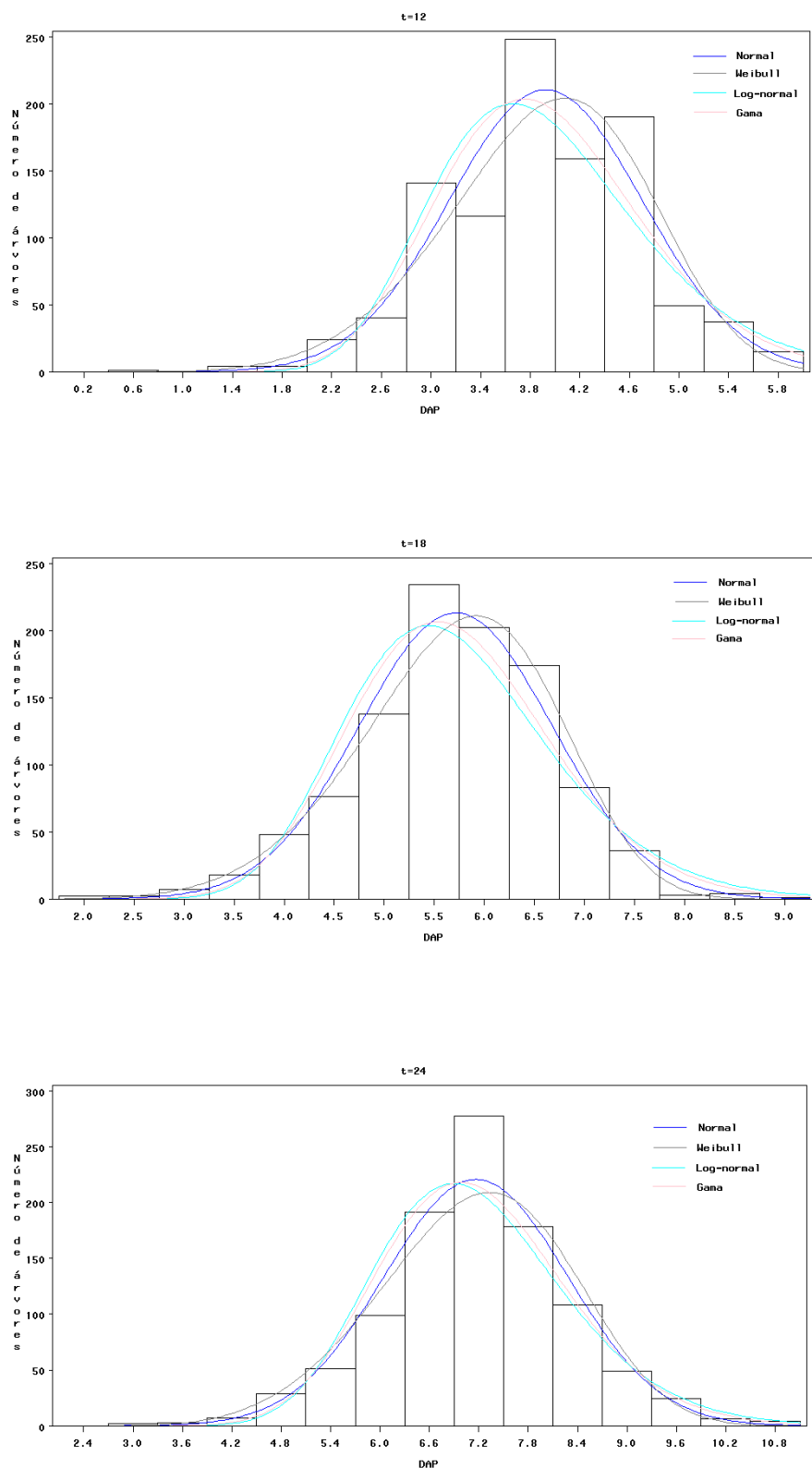


Figura 4.2: Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 12, 18 e 24 meses (Grupo I).

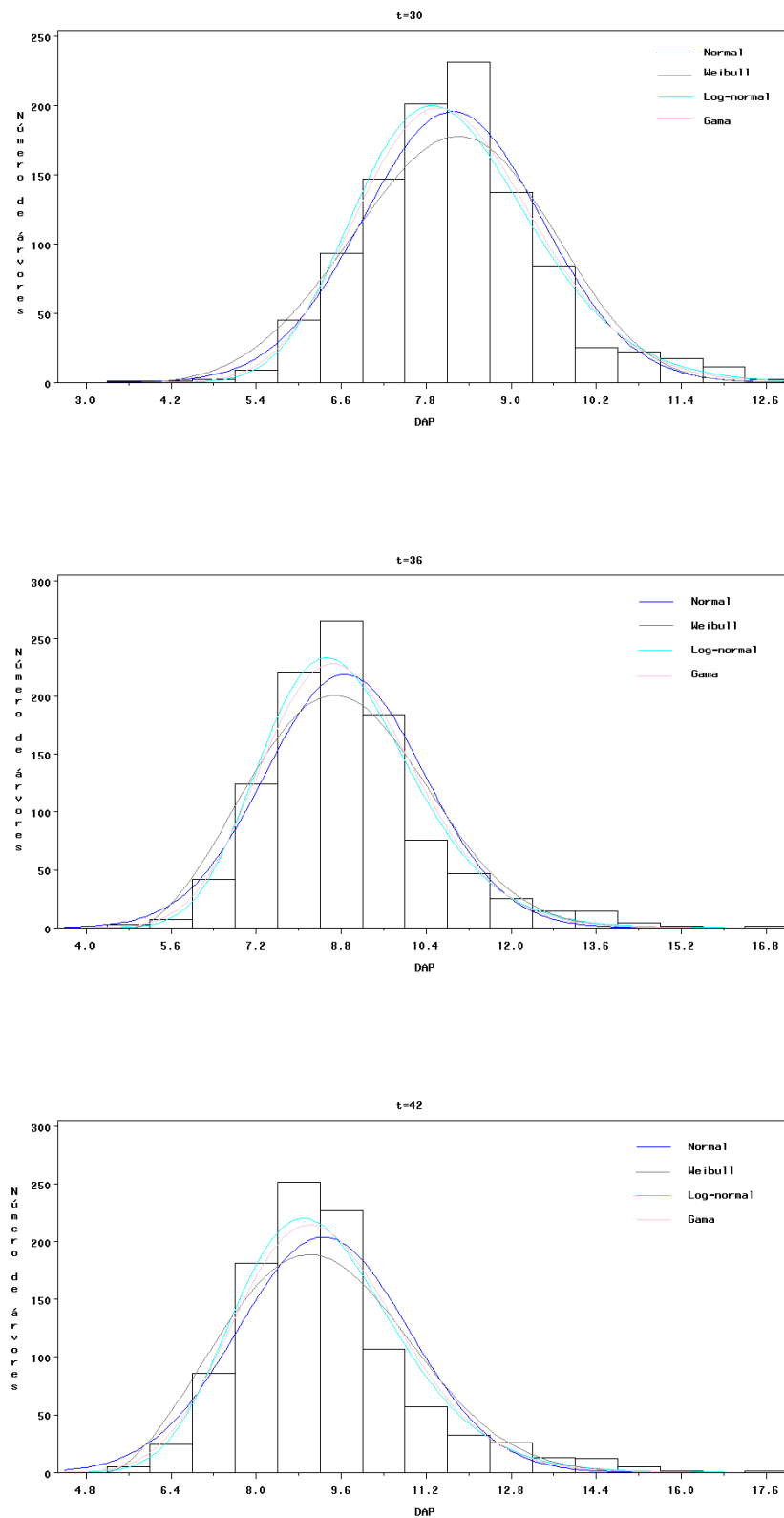


Figura 4.3: Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 30, 36 e 42 meses (Grupo I).

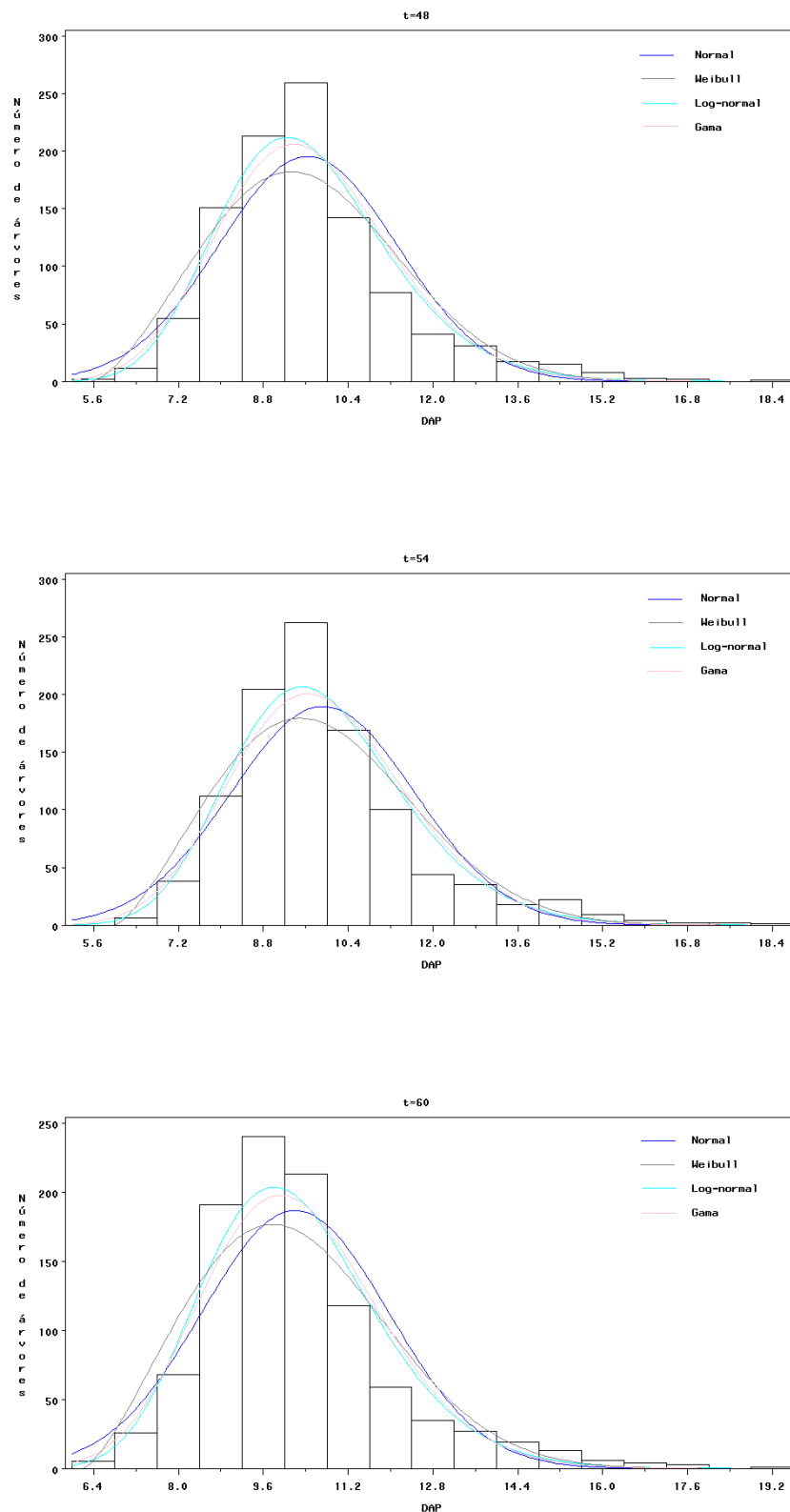


Figura 4.4: Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 48, 54 e 60 meses (Grupo I).

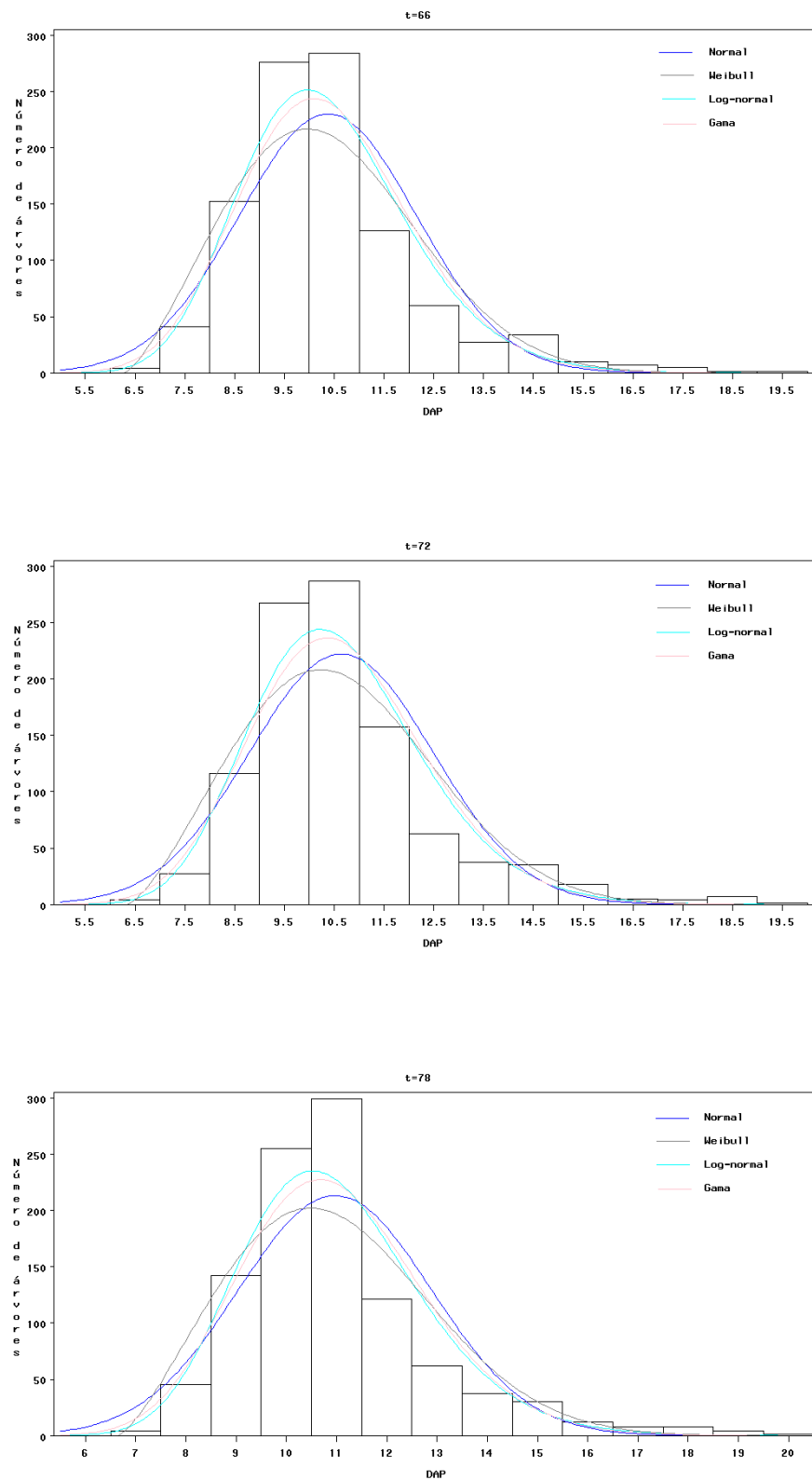


Figura 4.5: Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 66, 72 e 78 meses (Grupo I).

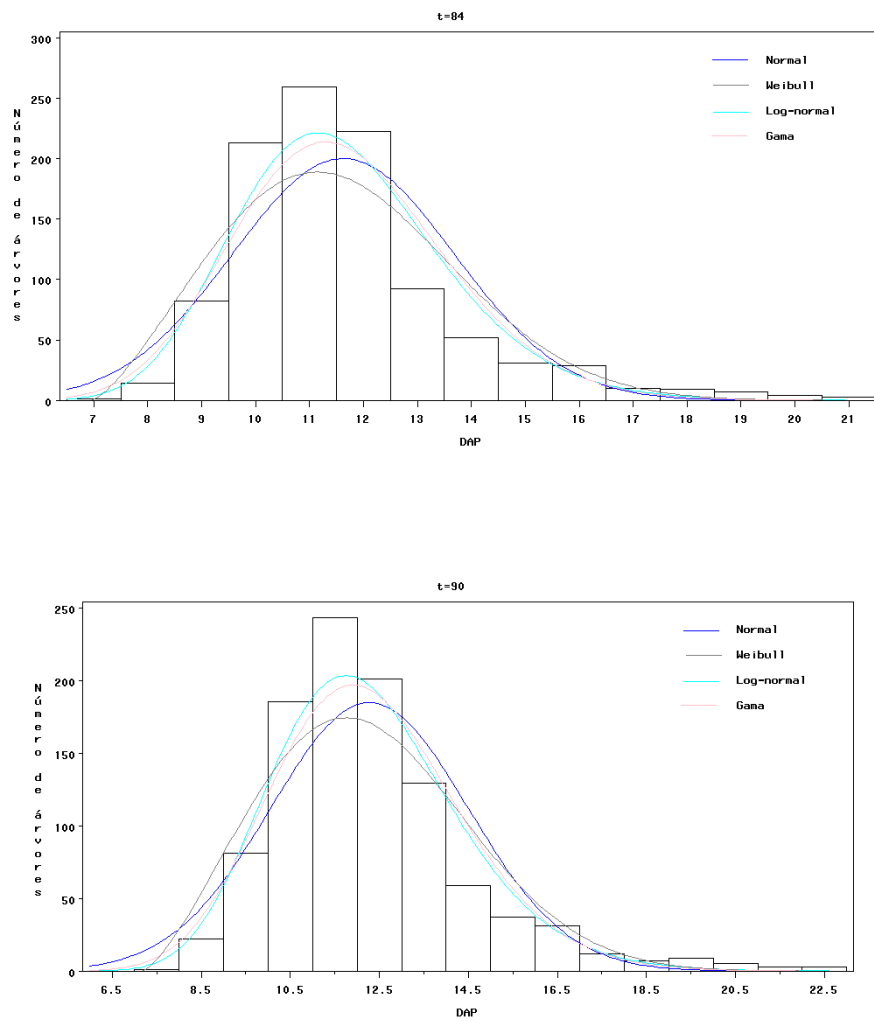


Figura 4.6: Distribuições diamétricas e as curvas das distribuições ajustadas, nas idades 84 e 90 meses (Grupo I).

### 4.1.2 Modelos Volumétricos

Após determinação da distribuição de frequência por classe diamétrica dos clone de *Eucalyptus* spp. ao longo do tempo, procedeu-se com os ajustes dos modelos volumétricos.

Na Tabela 4.5 observa-se as estimativas dos parâmetros e os erros padrões dos modelos volumétricos associados as distribuições simétricas.

Tabela 4.5: Estimativas dos parâmetros dos modelos volumétricos (Grupo I).

Modelos	Distribuições	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
Schumacher	Normal	313,604341	1,879068	0,963802
		(6,728354)	(0,004099)	(0,005499)
	$t_3$	196,750873	1,842815	1,109920
		(1,608249)	(0,001991)	(0,002023)
e	Exponencial	146,864029	1,781028	1,169438
Hall	Potência ( $\tau = 0,8$ )	(1,519225)	(0,002598)	(0,002610)
	Logística II	264,119258	1,891847	1,039026
		(1,920097)	(0,001968)	(0,002032)
Spurr	Normal	337,574190	0,945294	–
		(0,648411)	(0,001185)	–
	$t_3$	357,294313	0,976652	–
		(0,487526)	(0,000728)	–
	Exponencial	354,781234	0,974185	–
	Potência ( $\tau = 0,8$ )	(0,578957)	(0,000879)	–
Logística II	353,897746	0,971304	–	
	(0,529272)	(0,000834)	–	

Para selecionar o modelo que melhor se ajustou aos dados, utilizou-se o critério EPAM (Tabela 4.6). O modelo que obteve o melhor resultado, pelo critério EPAM, foi o modelo de Schumacher e Hall associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade. Observa-se que a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade foi melhor nos dois modelos avaliados. Um aspecto que merece destaque é o fato dos modelos com distribuições mais robustas se saírem melhores do que os modelos associados a distribuição Normal. Esses resultados ressaltam a importância de novos estudos envolvendo essas distribuições na área florestal.

Tabela 4.6: Estatística EPAM para seleção das equações (Grupo I).

Modelos	Distribuições	EPAM	Ranqueamento
Schumacher	Normal	3,25	7
	$t_3$	2,46	1
e	Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ )	2,52	2
Hall	Logística II	2,54	3
	Normal	3,33	8
Spurr	$t_3$	2,60	4
	Exponencial Potência ( $\tau = 0,8$ )	2,63	5
	Logística II	2,71	6

Considerando que, em geral, o modelo normal é o mais utilizado em estudos florestais, na Figura 4.7 observa-se o erro percentual versus o índice das observações para o modelo de Schumacher e Hall associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade, modelo com melhor resultado, e o modelo de Schumacher e Hall e o modelo de Spurr associados a distribuição Normal, como testemunha. Verifica-se que no modelo de Schumacher e Hall associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade os erros percentuais estão mais próximos de zero e melhores distribuídos, validando assim o modelo selecionado. Observa-se também que os modelos adotados como testemunha estão subestimando o volume das árvores nas primeiras medições.



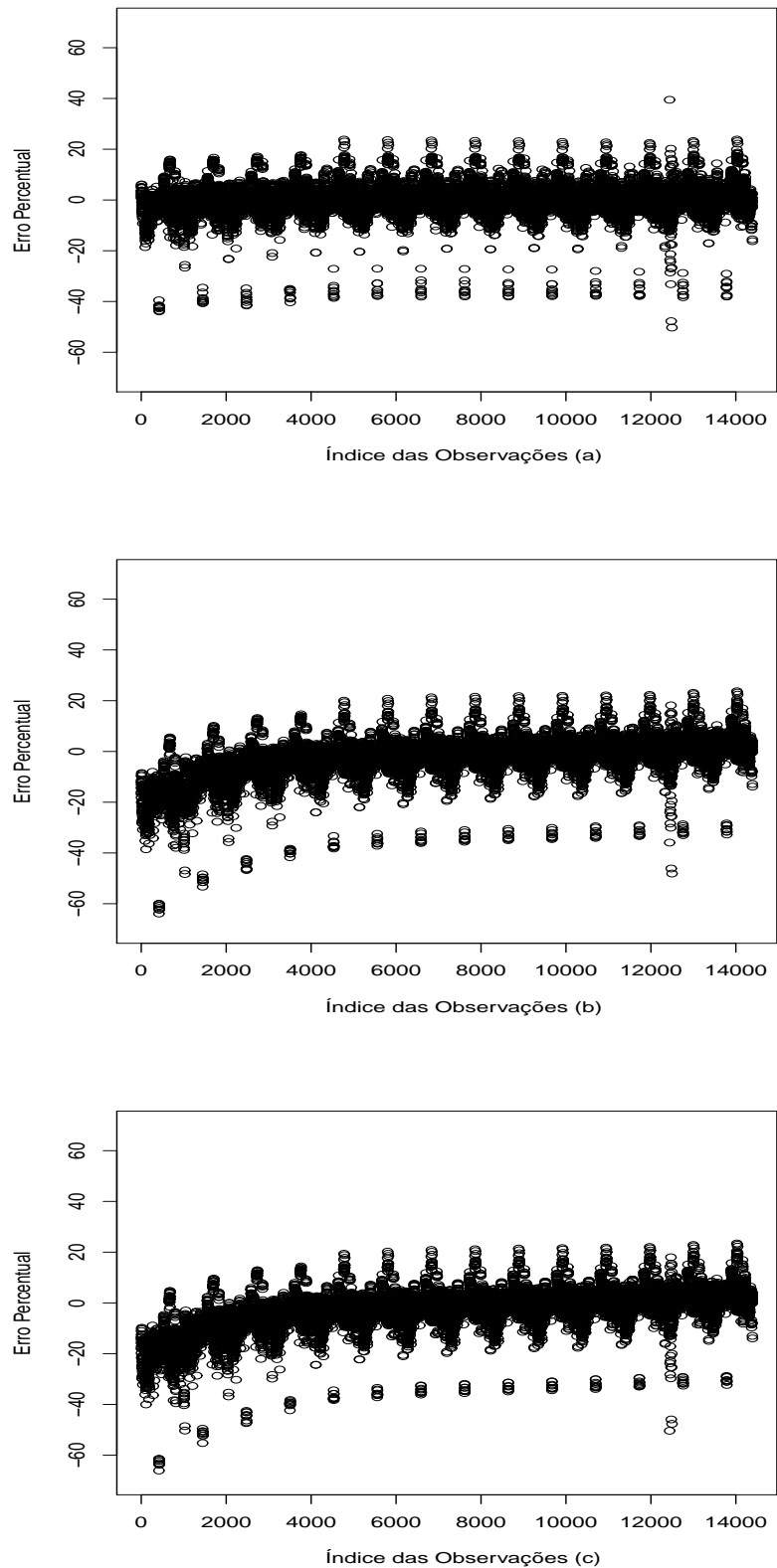


Figura 4.7: Erro percentual dos modelos de Schumacher e Hall associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade (a), Schumacher e Hall associado a distribuição Normal (b) e Spurr associado a distribuição Normal (c) (Grupo I).

Desta forma, a equação final para estimar o volume dos clone de *Eucalyptus* spp. é dada por:

$$\hat{V}_i = 0,196750873DAP_i^{1,842815}H_i^{1,10992}, \quad (4.1)$$

em que  $\hat{V}_i$  é o volume estimado da i-ésima árvore, em  $m^3$ ,  $DAP_i$  é o diâmetro da i-ésima árvore, em metros, e  $H_i$  é a altura da i-ésima árvore, em metros.

Na Tabela 4.7 observa-se volume real e projetado, em  $m^3/ha$ , bem como o incremento médio anual (IMA) observado e estimado, em  $m^3/ha/ano$ . Os volumes estimados correspondem aos modelos de Schumacher e Hall associado a distribuição t de Student com 3 graus de liberdade (modelo 1), Schumacher e Hall associado a distribuição Normal (modelo 2) e Spurr associado a distribuição Normal (modelo 3).

O valor registrado para o volume real ( $121,54 m^3/ha$ ) está de acordo com os valores encontrados por Oliveira et al. (2009), em plantios de *Eucalyptus* nos estados de Minas Gerais e Bahia, variando entre 80,36 a  $139,97 m^3/ha$ , e por Oliveira et al. (1998), que encontraram em estudo realizado com *Eucalyptus* no Cerrado uma produção de  $123,37 m^3/ha$ . O IMA no Polo Gesseiro do Araripe foi de  $16,20 m^3/ha/ano$ , resultado próximo aos registrados por Soares et al. (2009) em plantios de híbridos de *Eucalyptus* sp., no município de Monte Dourado, no estado do Pará, o que pode ser considerado bastante animador uma vez que na região do Pará a precipitação ultrapassa 2.000 mm ao ano, bastante diferente do cenário que ocorre na área em que foi realizado este estudo.

Outro aspecto importante observado na Tabela 4.7 é o volume estimado para os três modelos selecionados. No modelo 1, modelo com melhor ajuste, o volume estimado ( $m^3/ha$ ) está muito próximo ao real, ou seja, observou-se um erro de estimativa de aproximadamente 1%. Observa-se também que os três modelos estão subestimando o volume.

Tabela 4.7: Volume ( $m^3/ha$ ) e IMA ( $m^3/ha/ano$ ) reais e estimados (Grupo I).

Modelos	Vol Real ( $m^3/ha$ )	Vol Estimado ( $m^3/ha$ )	IMA Real ( $m^3/ha/ano$ )	IMA Estimado ( $m^3/ha/ano$ )
Modelo 1		120,33		16,04
Modelo 2	121,54	118,74	16,20	15,83
Modelo 3		118,60		15,81

### 4.1.3 Modelos de Crescimento

Uma vez que o estudo do crescimento presente e futuro é fundamental no manejo florestal sustentável, observa-se na Tabela 4.8 as estimativas dos parâmetros e os erros padrões dos modelos de crescimento em volume associados as distribuições simétricas.

Tabela 4.8: Estimativas dos parâmetros dos modelos de crescimento em volume (Grupo I).

Modelos	Distribuições	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$
Chapman	Normal	340,851143	1,826564	0,907522	0,028176	0,252453
		(5,821502)	(0,003354)	(0,004998)	(0,002732)	(0,025654)
	$t_3$	247,216439	1,872602	1,051395	0,031669	0,046664
Richards	Exponencial	(3,102554)	(0,002348)	(0,004076)	(0,008180)	(0,017144)
		169,444838	1,804870	1,135915	0,112776	0,131686
	Potência ( $\tau = 0,8$ )	(2,845874)	(0,003643)	(0,004072)	(0,022429)	(0,053534)
Modelo de	Logística II	143,472134	1,774788	1,174429	0,186367	0,283666
		(2,258433)	(0,003394)	(0,003828)	(0,053430)	(0,029514)
	Normal	286,204052	1,884673	0,784636	0,137711	–
Schumacher e Hall	Normal	(5,844779)	(0,003850)	(0,006910)	(0,003558)	–
		274,017932	1,909854	0,963696	0,048015	–
	$t_3$	(1,595808)	(0,001635)	(0,003682)	(0,002137)	–
modificado I	Exponencial	196,551064	1,841319	1,040666	0,043029	–
		(1,515928)	(0,002062)	(0,004729)	(0,002805)	–
	Potência ( $\tau = 0,8$ )	284,045828	1,910521	0,925296	0,064878	–
Modelo de	Logística II	(4,273898)	(0,003129)	(0,005238)	(0,002468)	–
		423,198276	1,883379	0,795449	-0,002238	–
	Normal	(9,150349)	(0,003860)	(0,006796)	(0,000059)	–
Schumacher e Hall	Normal	338,221151	1,924021	0,952277	-0,000809	–
		(5,001611)	(0,001461)	(0,001823)	(0,000032)	–
	$t_3$	300,097314	1,895544	0,969969	-0,000943	–
modificado II	Exponencial	300,097314	1,895544	0,969969	-0,000943	–
		(5,776136)	(0,003651)	(0,005634)	(0,000048)	–
	Potência ( $\tau = 0,8$ )	346,612835	1,914162	0,928222	-0,001058	–
Modelo de	Logística II	(6,116405)	(0,003292)	(0,005286)	(0,000042)	–
		346,612835	1,914162	0,928222	-0,001058	–