



AYUNI LARISSA MENDES SENA

**MANEJO DA DENSIDADE E PREDIÇÃO
PROBABILÍSTICA MULTIVARIADA DE
MÚLTIPLOS PRODUTOS EM POVOAMENTOS
FLORESTAIS**

LAVRAS - MG

2011

AYUNI LARISSA MENDES SENA

**MANEJO DA DENSIDADE E PREDIÇÃO PROBABILÍSTICA
MULTIVARIADA DE MÚLTIPLOS PRODUTOS EM POVOAMENTOS
FLORESTAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Ciências Florestais, para a obtenção do título de Mestre

Orientador

Ph.D. Natalino Calegário

LAVRAS - MG

2011

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Sena, Ayuni Larissa Mendes.

Manejo da densidade e predição probabilística multivariada de múltiplos produtos em povoamentos florestais / Ayuni Larissa Mendes Sena. – Lavras : UFLA, 2011.

156 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2011.

Orientador: Natalino Calegário.

Bibliografia.

1. Manejo florestal intensivo. 2. Desbaste. 3. Competição. 4. Sortimento de madeira. 5. Função densidade de probabilidade variada. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 634.92

AYUNI LARISSA MENDES SENA

**MANEJO DA DENSIDADE E PREDIÇÃO PROBABILÍSTICA
MULTIVARIADA DE MÚLTIPLOS PRODUTOS EM POVOAMENTOS
FLORESTAIS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Ciências Florestais, para obtenção do título de Mestre

APROVADA em 08 de julho de 2011.

Dr. Paulo Fernando Trugilho UFLA

Dr. Daniel Furtado Ferreira UFLA

Ph.D. Natalino Calegário
Orientador

LAVRAS - MG

2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelos momentos de iluminação e força que me levaram a mais esta conquista. Que venham os próximos desafios!

Aos meus queridos pais, Eli Mendes e Euvaldo Sena, pelo amor incondicional e por todo apoio durante a elaboração deste trabalho. Amo muito vocês dois!

Aos meus queridos avós maternos Antônio Mendes Ferreira (*in memorian*) e Abadia de Sena Mendes (*in memorian*), exemplos de força, perseverança, humildade e simplicidade. Em especial à vovó pela maravilhosa visita onírica...

Aos meus queridos irmãos Magnun, Tauaru, Ariam, Ain-Zara e Aulus. Próximos ou distantes vocês são parte importante da minha vida.

Ao eterno amigo e companheiro Juliano Silva Minervino (Caju), bem como a toda família Minervino, pelo amor, pelas lições de vida e de amor ao próximo, pela convivência e confiança, pela compreensão e apoio nos momentos difíceis, pelas alegrias compartilhadas, pelos almoços deliciosos preparados com a ajuda da nossa querida vó Helena...Vocês são almas bondosas que Deus colocou na minha vida para me trazer a paz necessária para vencer. Serei eternamente grata!

Ao meu querido orientador, Professor Natalino Calegario, pelos momentos de alegria e de dificuldade, pelo incentivo, pelos valiosos ensinamentos, pela amizade e pela convivência.

Aos demais Professores do Departamento de Engenharia Florestal (DCF) e aos Professores do Departamento de Ciências Exatas (DEX) da Universidade Federal de Lavras, pelo conhecimento transferido com amor e dedicação e pela valiosa contribuição para a minha formação.

Aos queridos amigos: Diego, Leandro, Rafael, Rodrigo, Juliana, Letícia, Sayuri, Fernando, Nillo, Daniel, Marquinho, João Paulo (JP) e toda a turma da CNB; Ísis, Jonathas, Viviane, Simone Guimarães, Roger, Stefany e toda a turma do EIT e do Centro de Ensino Fundamental nº 8 de Taguatinga; Tatiane, Bárbara e Diego (Noinha), Naiane, Bolinha, Monic, Lucas e toda a turma do Cento de Ensino Médio JK; Saulo, Sérgio, Corsino, Luís Glauber (Peru), Júnior, Rodrigo (RPG), Diego Ni, Larissa, e a todas as outras amizades que fiz em diversas ocasiões da vida; Raquel Leão, Janaína Juliana, Ana Cláudia, Júlio Sam, Thaís, Marcela, Larissa, Lívia, Júlia, Camila, Eline, Taiana, Desireé, Juliana Marocolo, Fernanda Coelho (Dorety), Fernanda Miquelino, Fernanda Carvalho (Galinha), Cris, Marina, Raidan, Rober, Gustavo (Gabiru), Renato (Mineiro), Thiaguinho, Gabriel Damasco (Gazela) e Clarissa, Gabriel Vargas (Gabras), Gabriel Zanatta, Fabinho, Miguel, Jorge, Daniel (Tapioca), Gabriel (Giga), Natália Massaroto, Gustavo (Black), Raoni (um quase-imprestável), Luquinhas, e á todos os floresteiros da UnB. Adoro todos vocês e também aqueles que esqueci de mencionar aqui.

Às companheiras de república Juliana Pinto de Lima e Gabriela Vogas, pela paciência, pela amizade e pelo prazer da sua companhia.

Aos grandes amigos que conquistei durante o mestrado, pelo apoio, companheirismo, pelos momentos de farra e de estudo: Faustinho, Ricardo (Clavícula), Dona Fia e sua filha Adriana, Samuel, Nory, Rômulo, Ernani, Elliezer, Sabrina, Alisson (Janú), Antônio, Mariana, Carol Jarochinsky, Suzana Vieira, Patrika, Miroca, Boizão, Carol Cambraia, Gordo, Pedro, Andressa, Suzana Jayze, Maíra, Luzia, Rose, Deyse, Walmes Zeviani, Diogo Rossoni, Guto Toneli, Éverton (Estopa), Rodrigo (Cueca), Iedo, Bodinho, Cassiana e a todos os demais companheiros da UFLA. Vocês ficarão guardados no meu coração!

Aos Professores do Departamento de Engenharia Florestal da Universidade de Brasília, em especial José Roberto Rodrigues Pinto e Reginaldo Sérgio Pereira, pelos primeiros passos no caminho da ciência.

Aos amigos do Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (IBAMA), em especial à família COEND e aos coordenadores Antônio Celso Junqueira Borges e André de Lima Andrade, pelo apoio, compreensão, amizade e companheirismo, pelas discussões, batalhas e pela força para a construção de um país justo e sustentável.

Aos funcionários do DCF, em especial às secretárias Rose, Chica e Thaisa, pela ajuda e pelo apoio maravilhosamente prestados.

À Universidade de Brasília (UnB) e à Universidade Federal de Lavras (UFLA) pela minha formação como bacharel e mestre em Engenharia Florestal, respectivamente.

À International Paper S.A. pela cessão dos dados.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) por tornar viável a realização deste trabalho através da concessão de bolsa de estudos.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, meu MUITO OBRIGADA!

RESUMO GERAL

Este trabalho tem como objetivo propor novas metodologias para o estudo do fenômeno do autodesbaste e para a quantificação dos sortimentos de madeira em povoamentos clonais de *Eucalyptus sp.*, visando à melhoria das ferramentas utilizadas no manejo intensivo de florestas puras e equiâneas. Para tal, este estudo foi dividido em duas seções, de modo que na primeira propôs-se um novo método para definição das parcelas superestocadas, avaliaram-se novos modelos para retratar o limite da máxima competição e, a partir do modelo selecionado, estabeleceu-se um novo índice de densidade para auxiliar a definição de regimes de desbaste. Na segunda seção avaliou-se ainda a adequação da distribuição normal bivariada para modelar a densidade conjunta dos diâmetros a várias alturas do fuste a fim de realizar a predição probabilística dos sortimentos. Na primeira parte deste estudo conclui-se que o modelo selecionado apresentou melhoria no ajuste e maior informação biológica na interpretação dos parâmetros, o que contribui com uma análise mais rica do limite superior da zona de máxima competição. O Índice de Densidade do Povoamento desenvolvido pode ser considerado de fácil utilização, sendo eficiente na identificação das áreas intensamente subestocadas, ainda que seu uso não dispense a construção de Diagramas de Manejo da Densidade. Os resultados obtidos na segunda seção deste trabalho demonstram que a função densidade de probabilidade (f.d.p.) normal bivariada não foi considerada adequada para a predição dos sortimentos, tendo em vista a grande discrepância entre os valores estimados pela função de afilamento aplicada às árvores amostradas no Inventário Florestal e aqueles estimados por esta f.d.p. Recomenda-se, portanto, que sejam avaliadas outras f.d.p. para modelar a densidade conjunta dos diâmetros a várias alturas do fuste, tais como as funções Weibull e Gamma bivariadas, tendo em vista que esta nova metodologia de predição confere maior agilidade e facilidade na estimativa dos múltiplos produtos florestais, pois dispensam os procedimentos de integração das funções de afilamento.

Palavras-chave: Manejo florestal intensivo. Desbaste. Competição. Sortimento de madeira. Função densidade de probabilidade bivariada.

GENERAL ABSTRACT

This work aims to propose new methodologies for studying the self-thinning phenomenon and to quantify timber assortments in clonal *Eucalyptus sp.* stands, focusing in the improvement of the tools used in intensive management of even-aged and monospecific forests. This study was divided into two sections, so that in the first one a new method for determining overstocked stands was proposed; new models were evaluated to portray the limit of maximum competition zone and from the selected model, a new stocking index were established to assist the definition of thinning regimes. In the second section it was evaluated the adequacy of the bivariate normal distribution to model the joint density of the diameters at different heights of the stem in order to perform probabilistic prediction of assortments. In the first part of this study, we concluded that the selected model showed improved fit and more biological information on the parameters, which contributes to a richer analysis of the upper limit of the zone of maximum competition. The Stand Density Index developed can be considered easy to use and efficient in identifying the areas heavily understocked, although its use does not dispense the construction of the Density Management Diagrams. The results obtained in the second section of this work show that the probability density function (p.d.f.) bivariate normal was not considered appropriate for predicting the assortments, considering the large discrepancy between the values estimated by the taper function applied to the trees sampled in Forest Inventory and those estimated by this p.d.f. It is recommended, therefore, to evaluate other p.d.f. to model the joint density of the diameters at different heights of the bole, such as the Bivariate Gamma and Weibull functions. This new method of prediction gives greater flexibility and ease in the estimation of multiple forest products, because this procedure does not require tapering functions integration.

Keywords: Intensive forest management. Thinning. Competition. Timber assortments. Bivariate probability density function.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2		
Figura 1	Localização da área de estudo.....	55
Figura 2	Relação entre altura total e diâmetro à altura do peito (DAP) observada na área de estudo.....	58
Figura 3	Comportamento da altura dominante e codominante média (<i>HDC</i>) em função da idade.....	60
Figura 4	Comportamento do volume individual (com casca) das árvores e o diâmetro à altura do peito (DAP) – A; e altura total (HT) – B.....	62
Figura 5	Distribuição dos resíduos padronizados do modelo logístico completo para relação hipsométrica.....	70
Figura 6	Distribuição dos resíduos padronizados do modelo logístico completo para classificação de sítio.....	72
Figura 7	Curvas de índice de sítio geradas pelo modelo logístico completo.....	73
Figura 8	Distribuição dos resíduos padronizados do modelo de Schumacher e Hall para o volume individual das árvores do povoamento.....	75
Figura 9	Relação entre a densidade de plantas por hectare (N) e o diâmetro médio quadrático (D_q) observada nas 605 unidades amostrais do inventário florestal.....	76
Figura 10	Relação entre a densidade de plantas por hectare (N) e o diâmetro médio quadrático (D_q) observada nas parcelas superestocadas selecionadas pelo método proposto por Keeney e Raiffa (1976) – A; e pela metodologia proposta baseada no coeficiente angular encontrado por Reineke (1933) – B.....	77
Figura 11	Distribuição dos resíduos padronizados dos modelos avaliados para descrever a relação máxima entre N e D_q	81
Figura 12	Aplicação do modelo VI para a determinação da máxima relação entre a densidade e o diâmetro médio quadrático e as zonas de manejo dos povoamentos: Zona de Competição e mortalidade Iminente – A; Zona de Estoque Completo – B; Zona de Aumento da Competição – C; Zona de Crescimento Livre – D.....	87

CAPÍTULO 3

Figura 1	Localização da área de estudo.....	104
Figura 2	Variação do perfil das árvores amostradas, por classe de idade (A) e material genético (B).....	107
Figura 3	Representação gráfica da probabilidade de ocorrência (área sob a curva) de uma tora com comprimento $h = h_2 - h_1$ e diâmetro da ponta mais fina ($d_{min.}$) inserido na classe intervalar $[d_2; d_1]$	116
Figura 4	Distribuição dos resíduos padronizados do modelo polinomial de 5º grau para representação do perfil das árvores.....	120
Figura 5	Quantis da distribuição Qui-quadrado versus as distâncias de Mahalanobis ordenadas obtidas a partir da matriz X' ($n = 5,000$).....	121
Figura 6	Densidades marginais das variáveis A – posições (alturas) no tronco (h_{ij}) e B - diâmetros a diferentes alturas (d_{ij}).....	122
Figura 7	Função densidade de probabilidade normal bivariada obtida a partir das estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\Sigma}_{BC}$ e S_{BC} para a matriz de dados transformados X_{BC}	123
Figura 8	Variação do diâmetro a várias alturas (posições no fuste) após a transformação de Box-Cox.....	125
Figura 9	Frequência observada versus densidade estimada e “P-P plot” para avaliação gráfica da qualidade do ajuste à distribuição normal para as variáveis h_{ij} (A) e d_{ij} (B).....	126
Figura 10	Quantis da distribuição Qui-quadrado versus as distâncias de Mahalanobis ordenadas obtidas a partir da matriz de dados transformados X_{BC}	127
Figura 11	Estimativas não-paramétricas (kernel) das densidades bivariadas da matriz de dados brutos X (A e B) e dos dados transformados pela equação de Box-Cox X_{BC} (C e D).....	129
Figura 12	Frequência observada versus densidade estimada e “P-P plot” para avaliação gráfica da qualidade do ajuste das distribuições Normal, Log-normal, Exponencial, Weibull e Gamma para as variáveis h_{ij} (A - E) e d_{ij} (F - J).....	133

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 2	
Tabela 1	Síntese das estatísticas descritivas correspondentes à amostra de parcelas e árvores utilizadas para o desenvolvimento dos modelos..... 57
Tabela 2	Modelos não-lineares avaliados para a relação de autodesbaste, em que $E(y) = E(x)$ e $x = D_d$ 64
Tabela 3	Estimativa dos parâmetros do modelo logístico completo para relação hipsométrica e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student..... 69
Tabela 4	Estatísticas utilizadas no diagnóstico da qualidade de ajuste do modelo hipsométrico proposto. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; S_{yx} (%): erro-padrão residual percentual..... 70
Tabela 5	Estimativa dos parâmetros do modelo logístico completo para crescimento em altura dominante e codominante média e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student..... 71
Tabela 6	Estatísticas utilizadas no diagnóstico da qualidade de ajuste do modelo de crescimento em altura dominante e codominante média. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; S_{yx} (%): erro-padrão residual percentual..... 72
Tabela 7	Estatísticas utilizadas na avaliação da qualidade do ajuste do modelo de Schumacher e Hall para a estimativa do volume individual. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; S_{yx} (%): erro-padrão residual percentual..... 73
Tabela 8	Estimativa dos parâmetros do modelo de Schumacher e Hall para estimativa do volume individual das árvores e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student..... 74
Tabela 9	Estimativa dos parâmetros dos modelos avaliados para a relação de autodesbaste e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student..... 79

Tabela 10	Estatísticas utilizadas no diagnóstico da qualidade de ajuste dos modelos avaliados para a relação de autodesbaste. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; S_{yx} (%): erro-padrão residual percentual.....	80
CAPÍTULO 3		
Tabela 1	Síntese das estatísticas descritivas correspondentes à amostra de parcelas e árvores utilizadas para o desenvolvimento dos modelos.....	106
Tabela 2	Dimensões mínimas dos múltiplos produtos madeireiros, adaptado de Campos e Leite (2006).....	109
Tabela 3	Estimativas dos parâmetros do modelo polinomial de 5º grau e respectivas estatísticas de significância. Onde t_c é a estatística do teste t de Student.....	119
Tabela 4	Diagnóstico da regressão linear para representação do perfil das árvores cubadas. Em que: AIC é o critério de informação de Akaike; BIC é o critério de informação Bayesiano; S_{yx} é o erro-padrão residual; S_{yx} (%) é o erro-padrão residual percentual.....	120
Tabela 5	Estatísticas de avaliação da qualidade do ajuste à distribuição normal para as variáveis h_{ij} e d_{ij} após a transformação de Box-Cox. Em que: logMV é o logaritmo da máxima verossimilhança; D é a estatística do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov.....	125
Tabela 6	Estatísticas de avaliação da qualidade do ajuste das distribuições marginais das variáveis h_{ij} e d_{ij} . Em que: logMV é o logaritmo da máxima verossimilhança; D é a estatística do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov.....	131

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO GERAL	15
1 INTRODUÇÃO	16
2 REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1 A Lei de Autodesbaste	18
2.2 Densidade e estocagem do povoamento florestal	23
2.3 Diagramas de Densidade	27
2.4 Efeitos do manejo da densidade sob o crescimento e a produção florestal	30
2.5 Afilamento do fuste	32
3 CONSIDERAÇÕES GERAIS	36
REFERÊNCIAS	37
CAPÍTULO 2 MODELOS NÃO-LINEARES PARA A DESCRIÇÃO DA RELAÇÃO DE AUTODESBASTE E PROPOSIÇÃO DE ÍNDICE DE DENSIDADE DO POVOAMENTO	48
1 INTRODUÇÃO	51
2 METODOLOGIA	55
2.1 Caracterização da área de estudo	55
2.2 Base de dados	56
2.3 Relação Hipsométrica	57
2.4 Classificação do sítio florestal	59
2.5 Volume individual	61
2.6 Curva de autodesbaste e Índice de densidade	62
2.7 Técnicas de ajuste e critérios de avaliação dos modelos	64
3 RESULTADOS E DISCUSSÃO	69
3.1 Relação Hipsométrica	69
3.2 Classificação do sítio florestal	71
3.3 Volume Individual	73
3.4 Curva de autodesbaste e Índice de densidade	75
4 CONCLUSÕES	91
REFERÊNCIAS	92
CAPÍTULO 3 PREDIÇÃO DA PRODUTIVIDADE DE SORTIMENTOS A PARTIR DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA APLICADA A DADOS DE AFILAMENTO DE FUSTES	98
1 INTRODUÇÃO	101
2 METODOLOGIA	104
2.1 Caracterização da área de estudo	104

2.2	Base de dados.....	105
2.3	Função de afilamento.....	107
2.4	Técnicas de ajuste e critérios de avaliação dos modelos.....	109
2.5	Distribuição bivariada.....	111
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	118
3.1	Função de afilamento.....	118
3.2	Distribuição Bivariada.....	121
4	CONCLUSÕES.....	135
5	RECOMENDAÇÕES.....	136
6	TRABALHOS FUTUROS.....	137
	REFERÊNCIAS.....	141
	APÊNDICES.....	144

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

1 INTRODUÇÃO

Segundo dados da Associação Brasileira de Produtores de Florestas Plantadas (ABRAF), em 2010, a área total ocupada por plantios de *Eucalyptus* e *Pinus* no Brasil totalizou pouco mais de 6,5 milhões de hectares, com um crescimento de 3,2% com relação ao período anterior, sobretudo em função do aumento da área plantada com eucalipto (ABRAF, 2011). Estas áreas estão concentradas principalmente nos estados de Minas Gerais (23,59%), São Paulo (18,53%) e Paraná (13,02%), sendo a maior parte destinada à produção de celulose e papel, siderurgia e fabricação de painéis reconstituídos.

Nas últimas décadas o setor florestal brasileiro vem apresentando crescimento expressivo e grande atratividade, tendo em vista a crescente demanda do mercado interno e externo; a elevada rentabilidade do negócio; a necessidade de diversificação da produção e de aumento da eficiência do uso do solo nas pequenas e médias propriedades rurais. Ademais, estima-se que a oferta de madeira proveniente de florestas nativas será drasticamente reduzida, em função da insustentabilidade da cadeia produtiva, da crescente escassez do recurso, das baixas taxas de crescimento da floresta e da redução das áreas disponíveis para exploração (RICE et al., 1997).

O manejo intensivo de florestas justifica-se, neste contexto, como alternativa eficaz e viável para a oferta de múltiplos produtos madeireiros com elevado valor agregado, de modo a atender às necessidades dos diversos mercados consumidores, garantir a geração de renda contínua e aumentar a eficiência econômica dos povoamentos florestais. A definição das intervenções silviculturais mais adequadas, bem como o correto planejamento florestal baseado em estimativas rápidas e precisas do volume de madeira disponível são essenciais ao cumprimento destes objetivos.

Assim, este trabalho se justifica pela necessidade de apresentar melhorias às técnicas existentes para a descrição da relação máxima entre a densidade e o tamanho médio das árvores, de modo a colaborar com a uma melhor definição dos regimes de desbaste, bem como propor novos métodos para a predição dos sortimentos madeireiros, visando ao melhor planejamento das atividades.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A Lei de Autodesbaste

Yoda et al. (1963) formularam uma teoria para explicar a relação entre o tamanho médio e a densidade dos indivíduos de seis espécies herbáceas cultivadas isoladamente, a qual denominaram “Lei de autodesbaste”. Segundo estes autores, em povoamentos puros e equiâneos, existe uma densidade máxima acima da qual se inicia a mortalidade de indivíduos, caracterizada pelo ponto onde a capacidade produtiva do sítio está completamente utilizada. A tolerância à superlotação varia entre as espécies e, à medida que o tempo passa, os limites superiores convergem para um nível fixo de densidade. Embora a qualidade do sítio e a fertilização proporcionem maiores taxas de crescimento, não alteram a densidade máxima suportada para um dado tamanho médio dos indivíduos – um fenômeno independente da idade (RENEIKE, 1933).

Segundo estes autores, em escala logaritma, a máxima relação entre o tamanho médio atingível pelas plantas para qualquer densidade pode ser determinada por uma reta com inclinação igual a -1,5 (equação 1):

$$\ln \bar{w} = k - 1,5 \ln \rho \quad (1)$$

Em que:

\bar{w} é o tamanho médio individual das plantas, k é o parâmetro do intercepto;

ρ é a densidade, representada pelo número de plantas por unidade de área.

Na equação acima é permitido representar a produtividade, ou seja, o tamanho médio das plantas por unidade de área, de modo que a inclinação da reta será igual a -0,5 (WELLER, 1987).

Alguns autores, especialmente Zeide (1985; 1987), acreditam que o limite superior da relação entre o tamanho médio dos indivíduos e a densidade é mais bem representado por uma reta no espaço log-log, sobretudo diante das facilidades de ajuste. Entretanto, diante do comportamento frequentemente observado nos conjuntos de dados de tamanho médio e densidade, os modelos não-lineares assintóticos representam com maior precisão a relação máxima entre estas variáveis (SMITH; HANN, 1984).

Drew e Flewelling (1977) demonstram que a equação (1) pode ser empiricamente obtida através de uma análise dimensional, na qual a dimensão básica L refere-se a uma medida linear obtida em uma parte específica da planta, S é a área ocupada por um indivíduo e ρ é a densidade:

$$S \propto \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

$$S \propto L^2 \text{ (a área é uma função quadrática da dimensão linear) e} \quad (3)$$

$$w \propto L^3 \text{ (o peso é uma função cúbica da dimensão linear) então:} \quad (4)$$

$$S \propto L^2 \propto (L^3)^{2/3} \propto w^{2/3} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (2), tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \propto (w)^{2/3}, \text{ então:} \quad (6)$$

$$w \propto (\rho)^{-3/2}, \text{ ou} \quad (7)$$

$$w = C(\rho)^{-3/2} \quad (8)$$

$$\ln w = \ln C - \frac{3}{2} \ln \rho \quad (9)$$

Entre as espécies arbóreas, nas quais o tamanho médio é representado pelo diâmetro médio (DAF) ou diâmetro quadrático médio (D_{1q}), verifica-se uma variação nos valores da inclinação da reta, embora estejam próximos ao coeficiente proposto por Yoda et al. (1963). Reineke (1933) estimou um valor de -1,605 para 12 espécies dentre as 14 estudadas. MacKinnney e Chaiken (1935) obtiveram uma inclinação de -1,707 para *Pinus taeda*. McArdle et al. (1961) encontraram um valor próximo a -1,54 para *Pseudotsuga menziesii*. Bailey (1972) relata uma inclinação constante igual a -1,58 para *Pinus radiata* na Nova Zelândia.

Trabalhos mais recentes confirmam a variação na inclinação da reta para espécies arbóreas. Mabvurira e Miina (2002) obtiveram um coeficiente igual a -1,52 para povoamentos de *Eucalyptus grandis* no Zimbábue. Em povoamentos de *Pinus sylvestris*, localizados na Espanha, foram estimados valores entre -1,829 e -1,815 (PALAHÍ et al., 2003; RÍO et al., 2001). Kurinobu et al. (2006) encontraram uma estimativa para a inclinação igual a -1,67 para *Acacia mangium*. Segundo White (1980), uma variação entre -1,8 e -1,3 no valor da inclinação é considerada representativa da lei de autodesbaste, sem que haja, no entanto, evidência objetiva de que os valores deste intervalo sejam estatisticamente próximos a -1,5.

Os trabalhos desenvolvidos por Sackville-Hamilton et al. (1995) demonstram que a relação entre o índice de área foliar e a biomassa requerida para sua manutenção possui grande influência na inclinação da reta que delimita a zona de máxima competição.

Harper (1977) demonstra que o intercepto desta relação linear também varia entre as espécies. Em geral, espécies tolerantes à sombra apresentam valores superiores em comparação às intolerantes. Da mesma forma, coníferas possuem maiores valores para o intercepto que folhosas. Isto significa que, para um determinado tamanho médio, mais indivíduos das espécies tolerantes à sombra ou de coníferas sobreviverão (WHITE; HARPER, 1970).

A variação observada na estimativa dos parâmetros que determinam as curvas de autodesbaste pode ser explicada por diferenças biológicas entre as espécies (JACK; LONG, 1996), sítio e idade em condições de elevada variação (WELLER, 1987), formato da curva de distribuição diamétrica (KIKUZAWA, 1999) e até mesmo técnicas de amostragem aplicadas no levantamento florestal (DUCEY, KNAPP, 2010).

Pretzsch e Biber (2005) demonstram que, enquanto a inclinação da reta não é afetada pelo sítio, a posição da curva (intercepto) para o povoamento completamente estocado é máxima sob condições ótimas do sítio, decrescendo à medida que tais condições se tornam subótimas.

Analisando as relações de autodesbaste observadas em povoamentos de *Picea sitchensis* e *Pseudotsuga menziesii* na Grã Bretanha e no Canadá, Comeau et al. (2010) concluíram que fatores relacionados à procedência genética, à fisiologia das espécies, à arquitetura da copa, à capacidade de absorção de luz e ao clima afetam significativamente a máxima relação entre D_q e densidade de indivíduos. Os resultados obtidos por estes autores indicam ainda a necessidade de obtenção de valores regionais para os parâmetros desta relação, já que grandes variações na qualidade do sítio florestal apresentaram influência significativa da determinação das curvas.

A partir das curvas que representam a máxima relação entre tamanho médio e densidade, Drew e Flewelling (1977) introduziram o conceito de zona de competição e mortalidade iminentes, delimitada por duas retas: a primeira

corresponde à relação máxima entre o diâmetro médio e a densidade e a segunda, paralela à primeira e em densidades inferiores, a partir das quais a mortalidade apresenta relação direta com a densidade. Segundo estes autores, o manejo da densidade reduzirá drasticamente as chances de ocorrer mortalidade em povoamentos situados nesta zona, reduzindo assim as perdas volumétricas. Diversos estudos têm demonstrado que o limite inferior desta zona corresponde a 50 - 60% da relação máxima, dependendo da espécie (JACK; JONG, 1996).

Drew e Flewelling (1979) aprofundaram a discussão acerca dos efeitos da lei de autodesbaste sob a produção volumétrica em povoamentos florestais, identificando zonas de manejo apropriadas a cada objetivo específico. De acordo com estes autores, em povoamentos com densidade abaixo do ponto de fechamento de copa (aproximadamente 15% da relação máxima), o crescimento volumétrico por área é proporcional a densidade. No gradiente de densidade relativa que vai de 15 a 40%, perdas no incremento volumétrico individual são compensadas pelo aumento do crescimento total do povoamento, que atinge seu ponto máximo entre 40 e 55%. Para valores acima de 55%, o crescimento total líquido diminui, pois aumentam as chances de ocorrer mortalidade.

Outros estudos apresentam zonas de manejo cujos limites são definidos no intervalo 25 a 60% da máxima relação entre D_m e a densidade de plantas por hectare (KUMAR et al., 1995). Estes autores consideram que a competição entre os indivíduos do povoamento se inicia a 25% da máxima relação (ponto de fechamento de copa), onde o crescimento volumétrico individual é máximo e decresce com o aumento da densidade. Na região definida pelas curvas 25 e 35% observa-se um equilíbrio entre o crescimento volumétrico das árvores individuais e do povoamento (JACK; JONG, 1996). A zona que caracteriza a ocupação ótima do sítio é delimitada pelas curvas correspondentes a 35 e 60% da curva máxima, na qual se obtém um crescimento volumétrico total próximo

ao máximo a cerca de 40% da relação máxima (MARSHALL et al., 1992 citados por JACK; JONG, 1996).

Diante dos postulados acima, diversos trabalhos foram desenvolvidos no sentido de maximizar a relação entre produção volumétrica total e crescimento individual e reduzir os níveis de mortalidade (LONG, 1985). Estes objetivos são alcançados quando a produção biológica e os recursos disponíveis no sítio florestal são concentrados nos indivíduos maiores e mais vigorosos através do controle da densidade, seja por desbastes sucessivos ou pela regulação do espaçamento inicial (SPURR et al., 1957), de modo que seja estabelecido o equilíbrio entre o crescimento volumétrico individual e global, conforme os objetivos específicos da produção florestal.

2.2 Densidade e estocagem do povoamento florestal

O grau de utilização da capacidade produtiva dos sítios florestais é expresso por medidas de densidade e estocagem do povoamento. Ainda que sejam conceitos frequentemente confundidos, uma distinção clara deve ser estabelecida entre estes dois termos. De acordo com Gingrich (1967), a densidade é uma medida quantitativa do povoamento em termos de área basal, número de árvores ou volume por área, que reflete o grau de aglomeração de fustes no local. O grau de estocagem, por outro lado, é uma medida relativa que descreve a adequação de determinada densidade ao objetivo específico do manejo do povoamento e ao potencial produtivo do local. Assim, uma floresta que apresenta densidade igual a 18 m²/ha pode ser classificada como sub ou superestocada, dependendo da densidade que é considerada desejável.

A densidade pode ser expressa em termos absolutos como função simples dos parâmetros diretamente mensuráveis no povoamento, tais como número de árvores, área basal, volume e cobertura de copa por área; em uma

escala relativa dada pela percentagem em relação a uma densidade teórica, desejável ou média; ou por índices que envolvem uma série de conceitos biométricos (HUSCH et al., 1982). Para Clutter et al. (1983) é importante lembrar que quase todas as medidas de densidade são dinâmicas e não estáticas, já que as características do povoamento alteram-se ao longo do tempo.

Índices de densidade são formas eficientes de representar a densidade do povoamento, já que relacionam informações sobre o tamanho médio das árvores (peso, volume, altura ou DAP) e a densidade (LONG; SMITH, 1984).

Curtis (1970) discute os fundamentos dos índices de densidade mais utilizados no ramo florestal e conclui que a escolha dentre eles é função da disponibilidade de informação, da conveniência na obtenção dos dados e da rapidez na visualização e interpretação, havendo poucas diferenças entre o significado e a precisão. Para atender aos objetivos do manejo madeireiro, o índice de densidade escolhido deverá ser objetivo e facilmente obtido, biologicamente compatível e altamente correlacionado com o crescimento e a produção da floresta (CLUTTER et al., 1983).

O índice de densidade de Reineke é um dos mais utilizados para expressar a densidade, auxiliando na tomada de decisão sobre as intervenções silviculturais (LONG, 1985). Representa basicamente o número de plantas por hectare existentes em um povoamento com diâmetro médio quadrático (\bar{D}_q) igual a 10 polegadas (25,40 cm) (HUSCH et al., 1982). Para um dado valor de \bar{D}_q existe um número máximo de árvores por unidade de área, independente da idade e da qualidade do sítio. Esta propriedade é bastante interessante e permite a comparação entre diferentes povoamentos (CLUTTER et al., 1983).

Antes mesmo da formulação da lei de autodesbaste, Reineke (1933) observou que, em povoamentos equiâneos completamente estocados, a máxima relação entre o \bar{D}_q e o número de árvores por acre (N) é não linear, obedecendo à seguinte expressão:

$$N = \alpha D_q^\beta \quad (10)$$

Em que:

α e β são coeficientes que definem a curva de referência, ou seja, o número de árvores por hectare em povoamentos completamente estocados, para todos os diâmetros quadráticos médios, de modo que a densidade dos outros povoamentos pode ser expressa como uma porcentagem da densidade máxima.

Esta relação é frequentemente expressa na forma linear pela equação:

$$\ln N = k - \beta \ln D_q \quad (11)$$

Em que:

$k = \ln \alpha$ é uma constante que varia com a espécie.

Muitos trabalhos destacam as dificuldades encontradas na estimativa dos parâmetros da curva que representa o limite superior desta relação, principalmente em função da imprecisão na determinação das parcelas que realmente representam situações de estocagem máxima (BI et al., 2000; ZEIDE, 1991). O método mais simples consiste na utilização da escala logaritma para a delimitação de uma reta com inclinação fixa e posicionamento visual próximo ao valor máximo obtido no conjunto de dados (McCARTER; LONG, 1986; PUETTMANN et al., 1993; SOLOMON; ZHANG, 2002). Em outros estudos tem-se empregado diversos métodos estatísticos, dentre os quais se destacam os métodos dos mínimos quadrados ordinários (COMEAU et al., 2010; LONSDALE, 1990), análise de componentes principais (MOHLER et al., 1978);

redução do eixo principal (ZEIDE, 1987) e função estocástica de fronteira (WEISKITTEL et al., 2009; ZHANG et al., 2005).

No entanto, para Reineke (1933) e Drew e Flewelling (1979), o ajuste de uma curva média para o conjunto de dados definirá com mais precisão a relação entre D_q e N para quaisquer povoamentos, caso as condições de aleatorização das amostras no inventário florestal sejam cumpridas. Ainda segundo estes autores, a curva máxima é mais adequada para corrigir as distorções provocadas pela realização de desbastes por alto, nos quais a retirada inicial dos maiores indivíduos provocará a subestimação desta relação em função da redução nos valores de D_q após as intervenções.

Zeide (1991) destaca que, independente do método utilizado para a obtenção da curva máxima, deve-se assumir que os dados disponíveis representam a combinação máxima entre tamanho médio e densidade de árvores por hectare. Ainda que esta pressuposição não seja passível de validação, este autor considera que uma maior disponibilidade de dados aumenta a credibilidade desta hipótese.

Diante da definição da curva que determina a máxima relação de autodesbaste é possível expressar numericamente o Índice de Densidade de Reineke (*SDI*) como sendo:

$$SDI = \alpha 25,40^\beta \quad (12)$$

Quando N e D_q forem conhecidos, o índice de densidade será expresso por:

$$SDI = N \left(\frac{25,40}{D_q} \right)^\beta \quad (13)$$

Desde a proposição do Índice de densidade de Reineke, diversos autores têm buscado modelos parcimoniosos e biologicamente válidos para representar esta relação para as espécies florestais, de modo que sua aplicação seja geral, onde se citam os trabalhos de Matthew et al. (1995) e Tewari (2007).

2.3 Diagramas de Densidade

Diagramas de densidade são modelos que representam graficamente as relações entre densidade, altura, diâmetro e volume em povoamentos puros e equiâneos (ÁLVAREZ-GONZALÉZ et al., 2005). São considerados a forma mais eficiente para projetar, desenvolver e avaliar alternativas para o manejo da densidade em florestas, já que permitem prever o volume e o número de árvores sob diferentes estratégias silviculturais (NEWTON, 1997).

Os diagramas de densidade são construídos para cada espécie através de índices de densidade (ex. índice de Reineke - SDI) e equações que relacionam D_q e volume total (v) com a densidade (N) e altura dominante e co-dominante (\overline{HDC}) (CASTEDO-DORADO et al., 2009; VALBUENA et al., 2008). Estas equações formam sistemas onde N e \overline{HDC} são variáveis exógenas (definidas independente do sistema) e v e D_q variáveis instrumentais endógenas (BORDERS, 1989). As curvas dos modelos ajustados são representadas graficamente, localizando D_q no eixo das abscissas e N no eixo das ordenadas, e isolinhas representam \overline{HDC} , v e o índice de densidade (SDI) (BARRIO-ANTA; ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, 2005).

Sua utilização consiste em definir limites superiores e inferiores adequados para os níveis do estoque de crescimento, definindo o regime mais apropriado de desbaste (VALBUENA et al., 2008). Ainda conforme estes

autores, esta é a etapa mais crítica na gestão da densidade e deve ser feita cuidadosamente em função dos objetivos da produção florestal.

Neste sentido, diagramas de densidade compõem um método objetivo para determinar o momento e a intensidade das intervenções e são ferramentas úteis e de baixo custo que auxiliam a tomada de decisão a respeito do controle da densidade, visando atender objetivos específicos como: minimizar o tempo necessário para a obtenção de produtos madeireiros com alto valor de mercado; controlar a matocompetição nos estágios iniciais do desenvolvimento da floresta; otimizar o manejo da paisagem e dos serviços ambientais fornecidos (NEWTON, 1997).

Valbuena et al. (2008) construíram diagramas de densidade para auxiliar o manejo de povoamentos de baixa produtividade de *Pinus halepensis* e *Pinus pinaster* no leste da Espanha. Estes autores sugeriram que esses povoamentos deveriam ser manejados entre 35 e 60% do máximo *SDI* para cada espécie, a fim de evitar a mortalidade de indivíduos (limite superior) e promover a máxima utilização do sítio (limite inferior). Estas recomendações resultaram na prescrição de dois sistemas de desbaste a serem aplicados para as duas espécies, obtendo ao final da rotação 220 – 260 m³/ha com árvores com D_q entre 31 e 31,7 cm para *P. halepensis* e 275 – 300 m³/ha e D_q entre 35,5 e 38,5 cm para *P. pinaster*.

Stankova e Shibuya (2007) utilizaram diagramas de densidade para determinar a densidade inicial de plantios de *Pinus sylvestris* e *Pinus nigra* visando a produção de toras de alto valor comercial e concluíram que, considerando uma taxa de mortalidade entre 75 e 95% e a maximização da qualidade do produto final, os povoamentos devem ser inicialmente constituídos por 1.000 – 1.500 arvs./ha e 1.500 – 2.000 arvs./ha para a primeira e segunda espécie, respectivamente.

Castedo-Dorado et al. (2009) desenvolveram um diagrama de densidade visando definir estratégias de desbaste que reduzam perdas por quebras devido a ocorrência de ventos e nevascas em plantios de *Pinus radiata* no norte da Espanha. Para isso, incluíram nas equações para estimar D_q e v um coeficiente de afilamento dado pela relação entre DAP e altura total (H_T). Concluíram que a zona ótima para o manejo desta espécie situa-se acima de 22% do máximo índice de densidade utilizado no estudo.

Vacchiano et al. (2008) propuseram um diagrama para a gestão da densidade de *Pinus sylvestris* no norte da Itália visando a redução da erosão e do deslizamento de rochas em áreas montanhosas, e identificaram que a região ótima situa-se entre 25 e 50% do máximo SDI e é caracterizada por densidades superiores a 700 árvores/ha e D_q variando entre 17 e 30 cm.

Com poucas exceções (KIKUZAWA, 1982), grande parte dos estudos publicados sobre diagramas de densidades referem-se à aplicação desta ferramenta ao manejo de coníferas e folhosas em regiões temperadas, havendo poucas referências para outras espécies em regiões tropicais (KUMAR et al., 1995). Esses autores simularam com sucesso regimes de desbastes visando múltiplos produtos madeireiros através do diagrama de densidade para *Tectona grandis* na Índia.

Diagramas de densidade vêm sendo utilizados em outras simulações de desbastes no sentido de maximizar a disponibilização de produtos florestais com alto valor agregado (NEWTON, 2003, 2006). Entretanto, esse autor reforça que, nessas ocasiões, tais sistemas são propostos com base em conceitos puramente técnicos e que a escolha do melhor regime de desbaste deverá sempre considerar critérios econômicos.

2.4 Efeitos do manejo da densidade sob o crescimento e a produção florestal

Os efeitos da aplicação de desbastes sob o comportamento do estoque de crescimento vêm sendo amplamente estudados, sobretudo nas regiões temperadas. Em geral, os estudos têm demonstrado que, quando corretamente aplicados, desbastes melhoram o vigor da floresta remanescente em função da remoção dos piores indivíduos e concentram os recursos disponíveis no desenvolvimento das árvores de interesse, permitindo assim rotações mais longas e reduzindo o tempo necessário à obtenção de produtos com maiores dimensões (GRUSCHOW; EVANS, 1959; SPURR et al., 1957).

A definição da intensidade e idade da intervenção não pode ser generalizada, já que depende de diversos fatores como a espécie, espaçamento inicial, sobrevivência e principalmente da qualidade do sítio (RYTTER; STENER, 2005).

Conforme os resultados obtidos por Skovsgaard (2009), o efeito do desbaste sob o crescimento volumétrico do povoamento é fortemente dependente do sítio, havendo um gradiente de redução da produção volumétrica à medida que desbastes pesados são implementados em sítios pobres.

Medhurst et al. (2001) avaliaram o efeito de diferentes intensidades de desbastes aplicados em diversas idades em povoamento de *Eucalyptus nitens*. De acordo com estes autores, maiores taxas de crescimento individual são observadas em altas intensidades de desbaste, compensando as perdas de produtividade global. Entretanto, desbastes muito pesados podem afetar severamente o povoamento de modo que este não seja capaz de reutilizar completamente os recursos disponíveis no sítio durante a rotação, sobretudo quando tardiamente aplicados. Recomendam neste sentido, que desbastes tardios e intensos devem ser implementados apenas para espécies de rápido crescimento em áreas altamente produtivas.

Avaliando o impacto da intensidade e da idade do primeiro desbaste em povoamentos de *Tectona grandis* na Costa Rica, Kanninen et al. (2004) concluíram que o melhor momento para a realização da intervenção é aos quatro anos, por permitir uma rápida resposta de crescimento. Neste estudo, o incremento corrente anual em DAP variou entre 1,30 e 2,80 cm, sendo maior nas parcelas severamente desbastadas. No entanto, este incremento diminuiu ao longo do tempo, assim como o incremento volumétrico e em área basal.

Schneider et al. (1998) analisaram a produção de *Eucalyptus grandis* sob diferentes intensidades de desbaste e não encontraram diferenças significativas entre a produção máxima (756,3 m³/ha), obtida nos blocos não desbastados, e a produção dos blocos com redução de 40% da área basal (639,6 m³/ha). Estes resultados reforçam a ideia de que, sob regimes de desbaste apropriados à idade do povoamento e à qualidade do sítio, perdas volumétricas pela remoção de indivíduos são compensadas por ganhos em incremento diamétrico. Neste estudo, para todas as intensidades de desbaste avaliadas, houve deslocamento da curva de distribuição diamétrica para a direita, indicando o aumento significativo das dimensões das árvores remanescentes.

O aumento do crescimento individual pós desbaste está profundamente relacionado aos maiores volumes de copa, área foliar por planta e porção de solo explorado pela massa radicular, em função do aumento do espaço disponível para o crescimento e da redução da competição por luz (MUÑOZ et al., 2008; PINKARD; NEILSEN, 2003).

Segundo Andrade et al. (2007), em povoamentos desbastados, um maior incremento em área seccional ocorre nas porções inferiores do tronco; com o aumento da competição decorrente do crescimento pós desbaste, ao longo do tempo, este incremento é deslocado para as porções superiores do fuste, até 50% da altura total. Estes resultados evidenciam o efeito dos desbastes na melhoria da

forma dos fustes, proporcionando maior aproveitamento no processamento da madeira serrada (MÄKINEN et al., 2005, PÉREZ; KANNINEN, 2005).

Ainda que desbastes apresentem efeitos positivos sobre o crescimento secundário, pouca ou nenhuma influência tem sido detectada para o crescimento em altura (MEDHURST et al., 2001; PINKARD; NEILSEN, 2003).

2.5 Afilamento do fuste

A cubagem rigorosa é o método direto de obtenção do volume das árvores abatidas mais utilizado na rotina de inventários florestais. Este procedimento pode ser realizado pelo método absoluto, dentre os quais se destacam os métodos de Smalian, Huber e Newton; e pelos métodos relativos, destacando-se os métodos de Hohenald e FAO.

Leite e Andrade (2002) apresentam nova proposta metodológica para estimativa do volume das árvores, denominada método geométrico ou da altura relativa. O método foi desenvolvido e testado em povoamentos de *Pinus* e *Eucalyptus* e, mais recentemente, na estimativa do volume comercial de angico branco (CARVALHO et al., 2010) e está baseado no afilamento das árvores tomando como base três coeficientes angulares ao longo dos fustes.

Segundo Scolforo (2005), denomina-se função de afilamento, de forma ou “*taper*”, a representação matemática do perfil de um tronco. Os modelos de perfil são muito usados para modelar a forma das árvores, ajustados a partir dos pares de dados de altura e diâmetro obtidos nos procedimentos de cubagem rigorosa. Estes modelos estimam o diâmetro (ou raio) a uma determinada altura do tronco, a altura comercial relativa a um diâmetro mínimo de uso, bem como o volume parcial ou total do fuste via integração das áreas seccionais (HUSCH et al., 1982).

No Brasil, tradicionalmente, os estudos da forma das árvores baseiam-se em equações que permitem estimar o diâmetro ou raio a qualquer altura do tronco, tais como os trabalhos desenvolvidos por Assis et al. (2001), Figueiredo-Filho et al. (1996), Fischer et al. (2001), Guimarães e Leite (1992), Mendonça et al. (2007), Schneider et al. (1996) e Silva et al. (1997). Por outro lado, sob a ótica de que são valores mínimos de diâmetro que restringem o uso comercial de uma tora, estudos de perfil vêm sendo desenvolvidos no sentido de ajustar modelos que estimem a altura em qualquer parte do tronco em função do diâmetro ou raio, tais como os trabalhos de Calegario (2002) e Pires e Calegario (2007).

Além disso, as equações de afilamento têm sido muito bem estudadas para as espécies de rápido crescimento, sendo possível citar apenas os trabalhos desenvolvidos por Chichorro et al. (2003) e Soares et al. (2011) que avaliaram modelos de perfil para quantificar múltiplos produtos de madeira de espécies nativas brasileiras.

Campos e Leite (2006) apresentam uma lista dos modelos de perfil mais utilizados na área florestal, com destaque para os modelos de Kozak, Demaerschalk e Ormerod. De acordo com Scolforo (2005), o modelo de Demaerschalk foi o primeiro a apresentar compatibilidade entre o volume total e a soma dos volumes parciais estimados a partir da integração da função de afilamento.

Ao avaliar diferentes funções de afilamento em povoamentos de *Pinus elliotti* na região nordeste do Paraná, Scolforo et al. (1998) verificaram que as equações de Amateis e Burkhardt e polinomiais forneceram estimativas acuradas dos diâmetros ao longo do fuste a partir da primeira tora padrão, recomendando o uso do polinômio de potência fracionária, seguido pela equação de Amateis e Burkhardt e pelo polinômio de quinto grau.

De acordo com Rios (1997), com o avanço das técnicas de computação aplicada, é possível trabalhar com modelos mais complexos para retratar o perfil dos fustes, tais como os modelos polinomiais segmentados e não-segmentados e os modelos sigmoidais. É possível ainda realizar análises estatísticas mais complexas, permitindo inserir nos modelos os mais variados fatores que afetam a forma das árvores, tais como idade, sítio, material genético, densidade etc.

Sharma e Parton (2009) avaliaram o efeito da densidade de plantas sobre o perfil das árvores de *Pinus banksiana* e *Picea mariana* a partir do uso da teoria dos modelos não-lineares mistos, demonstrando que o efeito desta variável sobre o afilamento é mais pronunciado em *P. banksiana*.

Pouco estudo tem investigado o tamanho ideal de uma amostra para obter um bom ajuste de modelos de perfil. Kitikidou e Chatzilazarou (2008) avaliaram os métodos de Demaerschalk e Kozak para a determinação do tamanho amostral ótimo, demonstrando a eficiência dos dois métodos. Todavia, o método de Demaerschalk resultou em maior redução nos custos da amostragem, tendo em vista que este método visa à determinação do número ótimo de pares de observação altura-diâmetro, que podem ser obtidos em um número reduzido de árvores.

A partir das equações de afilamento pode-se estimar com precisão os volumes total e parcial das árvores por meio da integração da função *taper* nos intervalos de altura pré-definidos. Conforme apresentado abaixo:

$$d_{ij} = f(h_{ij}, HT_i, DAP_i) \quad (14)$$

$$v = \frac{\pi}{40.000} \int_{x_1}^{x_2} h \times d_{ij}^2 dh \quad (15)$$

Em que:

d_{ij} é o diâmetro da j -ésima posição do fuste da i -ésima árvore em centímetros, estimado a partir da função de afilamento;

h_{ij} é a altura (posição) j do fuste comercial da i -ésima árvore;

HT_i é a altura total da i -ésima árvore;

DAP_i é o diâmetro a altura do peito, medido a 1,30 m do solo, da i -ésima árvore;

h é a altura da tora que se deseja obter o volume, podendo ser substituída pela altura total ou comercial da árvore;

x_1 e x_2 são os intervalos de integração da variável altura, que definem o comprimento da tora.

Segundo Demaerschalk (1971) e Gregoire et al. (2000), o erro na estimativa volumétrica obtida a partir do procedimento descrito acima é função tão somente dos erros associados às estimativas dos parâmetros da função *taper* utilizada.

Williams e Reich (1997) demonstraram que o cômputo da correlação existente entre o diâmetro e as alturas ao longo do fuste no ajuste dos modelos de perfil contribui significativamente para a redução dos erros de estimativa, implicando em melhorias no estudo do afilamento e na determinação do volume a partir das funções *taper*.

Com base no exposto acima, observa-se que o estudo das relações de afilamento é comumente realizado a partir de análise de regressão. A utilização de outros métodos estatísticos, tais como as técnicas de análise multivariada, ainda é muito incipiente, podendo ser citados apenas os trabalhos de Fries e Matern (1966) e Guimarães e Leite (1992), que utilizaram análise de componentes principais para investigar as variações na estrutura dos dados e, assim, definir o modelo de regressão mais adequado para descrever o perfil das árvores.

3 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Com base na literatura consultada, verifica-se a existência de lacunas de conhecimento e possibilidades de melhorias das técnicas existentes para o estudo das relações de competição e autodesbaste em povoamentos florestais puros e equiâneos, bem como do afilamento de fustes e, conseqüentemente, predição de sortimentos de madeira, visando ao desenvolvimento de métodos precisos para auxiliar a tomada de decisão durante o manejo florestal intensivo.

Neste sentido, o aprimoramento das técnicas computacionais aplicada à análise estatística estimulou o desenvolvimento deste estudo, tendo em vista a possibilidade de buscar modelos mais precisos e biologicamente compatíveis para representar o limite da zona de máxima competição em povoamentos clonais de *Eucalyptus sp.* Ademais, o crescente interesse pela utilização de funções densidade de probabilidade (f.d.p.) multivariadas na área florestal (LI et al. 2002; RUPSYS; PETRAUSKAS, 2009; SCHREUDER; HAFLEY, 1977; TEWARI; GADOW, 1999; WANG; RENNOLLS, 2007; ZUCCHINI et al., 2001) estimularam o desenvolvimento, neste estudo, de um método de predição probabilística dos sortimentos, a partir da distribuição normal bivariada aplicada aos dados da cubagem rigorosa. Pretende-se, portanto, contribuir com o desenvolvimento e aplicação de análises mais robustas e informativas a respeito dos padrões estruturais da floresta visando à compreensão do seu potencial produtivo e econômico.

REFERÊNCIAS

ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J. G.; RUÍZ- GONZÁLEZ, A. D.; RODRÍGUEZ-SOALLEIRO, R.; BARRIO-ANTA, M. Ecoregional site index models for *Pinus pinaster* in Galicia (northwestern Spain). **Annals of Forest Science**, v. 62, n. 2, p. 115-127, mar. 2005.

ANDRADE, C. M.; FINGER, C. A. G.; THOMAS, C.; SCHNEIDER, P. R. Variação no incremento anual ao longo do fuste de *Pinus taeda* L., em diferentes idades e densidades populacionais. **Ciência Florestal**, v. 17, n. 3, p. 239-246, jul./set. 2007.

ASSIS, A. L. de, SCOLFORO, J. R. S.; MELLO, J. M. de; ACERBI-JÚNIOR, F. W.; OLIVEIRA, A. D. de. Comparação de modelos polinomiais segmentados e não-segmentados na estimativa de diâmetros e volumes ao longo do fuste de *Pinus taeda*. **Cerne**, v. 7, n. 1, p. 20-40, jan./jun. 2001.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PRODUTORES DE FLORESTAS PLANTADAS. ABRAF. **Anuário estatístico da ABRAF 2011**: ano base 2010. Brasília: ABRAF, 2011. 130p. il. Color

BAILEY, R.L. **Development of unthinned stands of *Pinus radiata* in New Zealand**. 1972. 73 f. PhD Thesis (Ph. D.). University of Athens, Athens, Greece, 1972.

BARRIO-ANTA, M.; ÁLVAREZ-GONZÁLEZ, J. G.; Development of a stand density management diagram for even-aged pedunculate oak stands and its use in designing thinning schedules. **Forestry**, v. 78, n. 3, p. 209-216, jul. 2005.

BI, H.; WAN, G.; TURVEY, N. D. Estimating the self-thinning boundary line as a density-dependent stochastic biomass frontier. **Ecology**, v. 81, n. 6, p. 1477-1483, jun. 2000.

BORDERS, B. Systems of equations in Forest stand modelling. **Forest Science**, v. 35, n. 2, p. 548-556, jun. 1989.

- CALEGARIO, N. **Modeling eucalyptus stand growth based on linear and nonlinear mixed-effect models**. 2002. 123 f. Thesis (Doctor of Philosophy in Forest Science), University of Georgia, Georgia, USA, 2002.
- CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: perguntas e respostas**. 2. ed. rev. e ampl..Viçosa: Editora UFV, 2006. 470p. il.
- CARVALHO, S. de P. C e.; MENDONÇA, A. R. de; LIMA, M. P. de. Different strategies to estimate the commercial volume of *Anadenanthera colubrine* (Vell.) Brenan. **Cerne**, v. 16, n. 3, p. 399-406, jul./set. 2010.
- CASTEDO-DORADO, F. CRESCENTE-CAMPO, F.; ÁLVAREZ-ÁLVAREZ, P.; BARRIO-ANTA, M. Development of a stand density management diagram for radiata pine stands including assessment of stand stability. **Forestry**, v. 82, n. 1, p. 1-16, jan. 2009.
- CHICHORRO, J. F.; RESENDE, J. L. P.; LEITE, H. G. Equações de volume e de taper para quantificar múltiplos produtos de madeira em floresta atlântica. **Revista Árvore**, v. 27, n. 6, p. 799-809, nov./dez. 2003.
- CLUTTER, J.L.; FORTSON, J.C.; PIENAAR, L.V.; BRISTER, G.H.; BAILEY, R.L. **Timber management: a quantitative approach**. New York: John Wiley & Sons, 1983. 333p.
- COMEAU, P. G.; WHITE, M.; KERR, G.; HALE, S. E. Maximum density-size relationship for Stika spruce and coastal Douglas-fir in Britain and Canada. **Forestry**, v. 83, n. 5, p. 461-468, dez. 2010.
- CURTIS, R. O. Stand density measures: an interpretation. **Forest Science**, v. 16, n. 4, p. 403-414, dez. 1970.
- DEMAERSCHALK, J. P. Taper equations can be converted to volume equations and point sampling factors. **The Forestry Chronicle**, v. 47, n. 6, p. 352-354, dez. 1971.

DREW, T.J.; FLEWELLING, J.W. Some recent theories of yield-density relationship and their application to Monterey pine plantations. **Forest Science**, v. 23, n. 4, p. 517-534, dez. 1977.

DREW, T.J.; FLEWELLING, J.W. Stand density management: an alternative approach and its application to Douglas-fir plantations. **Forest Science**, v.25, n. 3, p. 518-530, set. 1979.

DUCEY, M. J.; KNAPP, R. A. A stand density index for complex mixed species forests in the northeastern United States. **Forest Ecology and Management**, v.260, n. 9, set. 2010.

FIGUEIREDO-FILHO, A.; BORDERS, B. E., HITCH, K. L. Taper equations for *Pinus taeda* plantations in southern Brazil. **Forest Ecology and Management**, v. 83, n. 1-2, p. 39-46, jun. 1996.

FISCHER, F.; SCOLFORO, J. R. S.; ACERBI-JÚNIOR, F. W.; MELLO, J. M. de; MAESTRI, R. Exatidão dos modelos polinomiais não-segmentados e das razões entre volumes para representar o perfil do tronco de *Pinus taeda*, **Ciência Florestal**, v. 11, n. 1, p. 167-188, jan./fev. 2001.

FRIES, J; MATERN, B. On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves. In: IUFRO ADVISORY GROUP OF FOREST STATISTICIANS, 1965, Stockholm. **Proceedings of Conference in Stockholm**. Stockholm: IUFRO, 1966. p. 85 - 117.

GINGRICH, S.F. Measuring an evaluating stocking and stand density in upland hardwood forests in the Central States. **Forest Science**, v. 13, n. 1, p. 38-53, mar. 1967.

GREGOIRE, T. G.; SCHABENBERGER, O.; KONG, F. Prediction from integrated regression equation: a forestry application. **Biometrics**, v. 56, n. 2, p. 414-419, jun. 2000.

GRUSCHOW, G.F.; EVANS, T.C. The relation of cubic-foot volume growth to stand density in young slash pine stands. **Forest Science**, v. 5, n. 1, p. 49-55, mar. 1959.

GUIMARÃES, D. P.; LEITE, H. G. Um novo modelo para descrever o perfil do tronco. **Revista Árvore**, v. 16, n. 2, p. 170-180, 1992.

HARPER, J.L. **Population biology of plant**. New York: Academic Press, 1977. 892p.

HUSCH, B.; MILLER, C.I.; BEERS, T.W. **Forest mensuration**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1982. 402p.

JACK, S.B.; LONG, J.N. Linkages between silviculture and ecology: an analysis of density management diagram. **Forest Ecology and Management**, v. 86, n. 1-3, p. 205-220, out. 1996.

KANNINEN, M.; PÉREZ, D.; MONTERO, M.; VÍQUEZ, E. Intensity and timing of the first thinning of *Tectona grandis* plantations in Costa Rica: results of a thinning trial. **Forest Ecology and Management**, v. 203, n; 1, p. 89-99, jan. 2004.

KIKUZAWA, K. Theoretical relationships between mean plant size, size distribution and self thinning under one-sided competition. **Annals of Botany**, v. 83, n. 1, p. 11-18, jan. 1999.

KIKUZAWA, K. Yield density diagram for natural deciduous broad-leaved forest stands. **Forest Ecology and Management**, v. 4, n. 4, p. 341-358, out. 1982.

KITIKIDOU, K.; CHATZILAZAROU, G. Estimating the sample size for fitting taper equations. **Journal of Forest Science**, v. 54, n. 4, p. 176-182, 2008.

KUMAR, B. M.; LONG, J. N.; KUMAR, P. A density management diagram for teak plantations of Kerala in peninsular India. **Forest Ecology and Management**, v. 74, n. 1-3, p. 125-131, jun. 1995.

KURINOBU, S.; ARISMAN, H.; HARDIYANTO, E.; MIYAURA, T. Growth model for predicting stand development of *Acacia mangium* in South Sumatra, Indonesia, using the reciprocal equation of size-density effect. **Forest Ecology and Management**, v. 228, n. 1-3, p. 91-97, jun. 2006.

LEITE, H. G.; ANDRADE, V. C. L. Um método para a condução de inventários florestais sem o uso de equações volumétricas. **Revista Árvore**, v. 26, n. 3, p. 321-328, mai./jun. 2002.

LI, F.; ZHANG, L.; DAVIS, C. J. Modeling the joint distribution of tree diameters and heights by bivariate generalized beta distribution. **Forest Science**, v. 48, n. 1, p. 47-58, feb. 2002.

LONG, J. N.; SMITH, F. W. Relation between size and density in developing stands: a description and possible mechanism. **Forest Ecology and Management**, v. 7, n. 3, p. 191-206, jan. 1984.

LONG, J.N. A practical approach to density management. **Forestry Chronicle**, v.61, n.1, p. 23-27, fev. 1985.

LONSDALE, W. M. The self-thinning rule: dead or alive? **Ecology**, v. 71, n. 4, p. 1373-1388, ago. 1990.

MABVURIRA, D.; MIINA, J. Individual-tree growth and mortality models for *Eucalyptus grandis* (Hill) Maiden plantations in Zimbabwe. **Forest Ecology and Management**, v. 161, n. 1-3, p. 231-245, mai. 2002.

MACARDLE, R.E.; MEYER, W.H.; BRUCE, D. **The yield of Douglas-fir in the Pacific Northwest**. Washington: USDA Forest Service. Technical Bulletin, 1961. 74p.

MACKINNEY, A.; CHAIKEN, L.E. **A method of determining density of loblolly pine stands**. Asheville: USDA Forest Service, Appalachian Forest Experimental Station. Technical Note, v. 15, 1935. 3p.

MÄKINEN, H.; HYNYNEN, J.; ISOMÄKI, A. Intensive management of scots pine stands in southern Finland: first empirical results and simulated further development. **Forest Ecology and Management**, v. 215, n. 1-3, p. 37-50, ago. 2005.

MATTHEW, C.; LEMAIRE, G.; SACKVILLE-HAMILTON, N. R.; HERNANDEZ-GARAY, A. A modified self-thinning equation to describe size/density relationships for defoliated swards. **Annals of Botany**, v. 76, n. 6, p. 579-587, dez. 1995.

MCCARTER, J. B.; LONG, J. N. Density management of lodgepole pine. **Western Journal of Applied Forestry**. v. 1, n. 1, p. 6-11, jan. 1986.

MEDHURST, J. L. BEADLE, C. L.; NEILSEN, W.A. Early-age and later-age thinning affects growth, dominance, and intraspecific competition in *Eucalyptus nitens* plantations. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 31, n. 2, p. 187-197, fev. 2001.

MENDONÇA, A. R. de; SILVA, G. F. da; OLIVEIRA, J. T. da S.; NOGUEIRA, G. S. Avaliação de funções de afilamento visando à otimização de fustes de *Eucalyptus sp.* para multiprodutos. **Cerne**, v. 13, n. 1, p. 71-82, jan./mar. 2007.

MOHLER, C. L.; MARKS, P. L.; SPRUGEL, D. G. Stand structure and allometry of trees during self-thinning of pure stands. **Journal of Ecology**, v. 66, n. 2, p. 599-614, jul. 1978.

MUÑOZ, F.; RUBILAR, R.; ESPINOSA, M.; CANCINO, J.; TORO, J.; HERRERA, M. The effect of pruning and thinning on above ground aerial biomass of *Eucalyptus nitens* (Deane & Maiden) Maiden. **Forest Ecology and Management**, v. 255, n.3-4, p. 365-373, mar. 2008.

NEWTON, P. F. Stand density management diagrams: review of their development and utility in stand-level management planning. **Forest Ecology and Management**, v. 98, n. 3, p. 251-265, nov. 1997.

NEWTON, P.F. Forest production model for upland black spruce stands - optimal site occupancy levels for maximizing net production. **Ecological Modelling**, v. 190, n. 1-2, p. 190-204, jan. 2006.

NEWTON, P.F. Stand density management decision-support program for simulating multiple thinning regimes within black spruce plantations. **Computers and Electronics in Agriculture**, v. 38, n. 1, p. 45-53, jan. 2003.

PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; MIINA, J.; MONTERO, G. Individual-tree growth and mortality models for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in north-east Spain. **Annals of Forest Science**, v. 60, n. 1, p. 1-10, jan./fev. 2003.

PÉREZ, D.; KANNINEN, M. Effect of thinning on stem form and wood characteristics of teak (*Tectona grandis*) in a humid tropical site in Costa Rica. **Silva Fennica**, v. 39, n. 2, p. 217-225, 2005.

PINKARD, E. A.; NEILSEN, W. A. Crown and stand characteristics of *Eucalyptus nitens* in response to initial spacing: implications for thinning. **Forest Ecology and Management**, v. 172, n. 2-3, p. 215-227, jan. 2003.

PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não-lineares para a descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, v. 31, n. 5, p. 845-852, set./out. 2007.

PRETZSCH, H.; BIBER, P. A re-evaluation of Reinecke's rule and stand density index. **Forest Science**, v. 51, n. 4, p. 304-320, ago. 2005.

PUETTMANN, K.J., HAMS, D.W.; HIBBS, D.E. Evaluation of the size-density relationships for pure red alder and Douglas- fir stands. **Forest Science**, v. 39, n. 1, p. 7-27, fev. 1993.

REINEKE, L. H. Perfecting a stand-density index for even-aged forests. **Journal of Agricultural Research**, v 46, n. 7, p. 627-638, abr. 1933.

RICE, R.E.; RAYMOND, E.G.; REID, J.W. Can sustainable management save tropical forests? **Scientific American**, p. 44-49, abr. 1997.

RÍO, M. del; MONTERO, G.; BRAVO, F. Analysis of diameter-density relationships and self-thinning in non-thinned even-aged Scots pine stands. **Forest Ecology and Management**, v. 142, n. 1-3, p. 79-87, mar. 2001.

RIOS, M. S. **A eficiência das funções polinomiais, da função spline cúbica e das razões de volume para representar o perfil de árvores e estimar os sortimentos de *Pinus elliotti***. 1997. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal), Universidade Federal de Lavras, Lavras, Brasil, 1997.

RUPSYS, P.; PETRAUSKAS, E. The bivariate gompertz diffusion model for tree diameter and height distribution. **Forest Science**, v. 56, n. 3, p. 271-280, jun. 2010.

RYTTER, L.; STENER, L.G. Productivity and thinning effects in hybrid aspen (*Populus tremula* L. x *P. tremuloides* Michx.) stands in southern Sweden. **Forestry**, v. 78, n. 3, p. 285-295, jul. 2005.

SACKVILLE-HAMILTON, N. R.; MATTHEW, C.; LEMAIRE, G. In defense of the $-3/2$ boundary rule: a re-evaluation of self-thinning concepts and status. **Annals of Botany**, v. 76, n. 6, p. 569-577, dez. 1995.

SCHNEIDER, P. R., FINGER, C. A. G.; KLEIN, J. E. M.; TOTTI, J. A.; BAZZO, J. L. Forma do tronco e sortimentos de madeira de *Eucalyptus grandis* Maiden para o estado do Rio Grande do Sul. **Ciência Florestal**, v. 6, n. 1, p. 79-88, jan./jun; 1996.

SCHNEIDER, P.R.; FINGER, C.A.G.; HOPPE, J.M.; DRESCHER, R.; SCHEEREN, L.W.; MAINARDI, G.; FLEIG, F.D. Produção de *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden, em diferentes intensidades de desbaste. **Ciência Florestal**, v. 8, n. 1, p. 129-140, nov. 1998.

SCHREUDER, H. T.; HAFLEY, W. L. A useful distribution for describing stand structure of tree heights and diameters. **Biometrics**, v. 33, n. 3, p. 471-478, sep. 1977.

SCOLFORO, J. R. S. **Biometria Florestal**. parte I: modelos de regressão linear e não-linear. parte II: modelos para relação hipsométrica, volume, afilamento e peso da matéria seca. Lavras: UFLA/FAEPE, 2005. 352p. (Textos Acadêmicos)

SCOLFORO, J. R. S.; RIOS, M. S.; OLIVEIRA, A. D. de; MELLO, J. M. de; MAESTRI, R. Acuracidade de equações de afilamento para representar o perfil do fustes de *Pinus elliotti*. **Cerne**, v. 4, n. 1, p. 100-122, jan./jun. 1998.

SHARMA, M.; PARTON, J. Modeling stand density effects on tper for jack pine and black spruce plantations using dimensional analysis. **Forest Science**, v. 55, n. 3, p. 268-282, jun. 2009.

SILVA, G. F.; CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G.; SOUZA, A. L. Uso de métodos estatísticos para comparar alternativas de estimação de volume comercial **Revista Árvore**, v. 21, n. 1, p. 99-111, jan./mar. 1997.

SKOVSGAARD, J.P. Analysing effects of thinning on stand volume growth in relation to site conditions: a case study for even-aged Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.). **Forestry**, v. 82, n. 1, p. 87-104, jan. 2009.

SMITH, N.J.; HANN, D.W. A new analytical model based on the $-3/2$ power rule of self-thinning. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 14, n. 5, p. 605-609, out. 1984.

SOARES, C. P. B.; MARTINS, F. B.; LEITE-JÚNIOR, H. U.; SILVA, G. F. da; FIGUEIREDO, L. T. M. de. Equações hipsométricas, volumétricas e de taper para onze espécies nativas. **Revista Árvore**, v. 35, n. 5, p. 1039-1051, set./out. 2011.

SOLOMON, D. S.; ZHANG, L. Maximum size-density relationships for mixed softwoods in the northeastern USA. **Forest Ecology and Management**, v.155, n. 1-3, p. 163-170, jan. 2002.

SPURR, S.H.; YOUNG, L.J.; BARNES, B.V.; HUGHES, E.L. Nine successive thinning in a Michigan white pine plantation. **Journal of Forestry**, v. 55, n. 1, p. 7-13, jan. 1957.

STANKOVA, T. V.; SHIBUYA, M. Stand Density Control Diagrams for Scots pine and Austrian black pine plantations in Bulgaria. **New Forests**, v. 34, n. 2, p. 123-141, set. 2007.

TEWARI, V. P.; GADOW, K. V. Modeling the relationship between tree diameters and heights using S_{BB} distribution. **Forest Ecology and Management**, v. 119, n. 1-3, p. 171-176, jun. 1999.

TEWARI, V. P.; Stand density and basal area prediction of unthinned irrigated plantations of *Eucalyptus camaldulensis* in the hot desert of India. **Biosource Technology**, v. 98, n. 5, p. 1106-1114, mar. 2007.

- VACCHIANO, G. *et al.* A density management diagram for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.): a tool for assessing the forest's protective effect. **Forest Ecology and Management**, v. 255, n. 7, p. 2542-2554, abr. 2008.
- VALBUENA, P.; PESO, C. del; BRAVO, F. Stand density management diagrams for two mediterranean pine species in eastern Spain. **Forest Systems - Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales**, v. 17, n. 2, p. 97-104, 2008.
- WANG, M. RENNOLLS, K. Bivariate distribution modeling with tree diameter and height data. **Forest Science**, v. 53, n. 1, p. 16-24, feb. 2007.
- WEISKITTEL, A.; GOULD, P.; TEMESGEN, H. Sources of variation in the self-thinning boundary line for three species with varying levels of shade tolerance. **Forest Science**, v. 55, n. 1, p. 84-93, fev. 2009.
- WELLER, D. E. A reevaluation of the $-3/2$ power rule of plant self-thinning. **Ecological Monographs**, v. 57, n. 1, p. 23-43, mar. 1987.
- WHITE, J. Demographic factors in populations of plants. In: SOLBRIG, O. T. (Ed.). **Demography and evolution in plant populations**. Berkeley, California, USA: University of California, 1980. p. 21-48.
- WHITE, J.; HARPER, J.L. Correlated changes in plant size and number in plant populations. **Journal of Ecology**, v. 58, n. 2, p. 467-485, jul. 1970.
- YODA, K.; KIRA, T.; OGAWA, H.; HOZUMI, K. Intraspecific competition among higher plants. XI. Self thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural conditions. **Journal of Biology**, v. 14, p. 107-129, 1963.
- ZEIDE, B. Analysis of the $3/2$ power law of self-thinning. **Forest Science**, v. 33, n. 2, jun. 1987.
- ZEIDE, B. How much space does a seedling need? **Forest Ecology and Management**, v. 11, n. 3, p. 225-229, jul. 1985.

ZEIDE, B. Self-thinning and stand density. **Forest Science**, v. 37, n. 2, p. 517-523, jun. 1991.

ZHANG, L.. BI, H.; GOVE, J. H.; HEATH, L. S. A comparison of alternative methods for estimating the self-thinning boundary line. **Canadian Journal of Forest Research**, v.35, n. 6, p. 1507-1514, jun. 2005.

ZUCCHINI, W.; SCHMIDT, M. GADOW, K. von. A model for the diameter-height distribution in an uneven-aged beech forest and a method to assess the fit of such models. **Silva Fennica**, v. 35, n. 2, p. 169-183, 2001.

CAPÍTULO 2

MODELOS NÃO-LINEARES PARA A DESCRIÇÃO DA RELAÇÃO DE AUTODESBASTE E PROPOSIÇÃO DE ÍNDICE DE DENSIDADE DO POVOAMENTO

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo identificar modelos não-lineares mais precisos e biologicamente compatíveis para representar a curva de autodesbaste e, com base no modelo selecionado, propor um novo índice de densidade do povoamento. Para tal, propôs inicialmente um método de seleção das unidades amostrais cuja competição é máxima, com base na curva ajustada por Reineke (1933). Foram utilizados os dados do inventário florestal contínuo realizado em 605 unidades amostrais de área variável, alocadas em cerca de 25.500 ha de plantios clonais de *Eucalyptus sp.* no norte de São Paulo. Os modelos propostos foram ajustados pelo método da máxima verossimilhança, com base na teoria dos modelos não-lineares generalizados. A avaliação dos modelos consistiu na análise gráfica dos resíduos padronizados e nas estatísticas: erro-padrão residual (S_{yx}) e percentual (S_{yx} (%)), e critérios de informação de Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC). A proposição metodológica baseada no coeficiente de Reineke (1933) foi eficiente na determinação das unidades amostrais com elevada competição, já que o coeficiente -1,605 possui elevada generalidade e aplicabilidade para espécies florestais. O modelo VI apresentou melhor desempenho na representação do limite máximo da região de autodesbaste, contribuindo com uma redução de 4,7% no erro padrão da estimativa em relação ao modelo usual (modelo I). O Índice de Densidade do Povoamento (IDP), formulado a partir do rearranjo algébrico do modelo VI, possui interpretação semelhante ao Índice de Densidade de Reineke, representando a densidade máxima permitida para que o diâmetro quadrático médio (D_q) seja igual a 25 cm. O IDP se mostrou adequado e pode ser considerado de fácil utilização, mas não deve ser interpretado como densidade de referência para que se atinja o valor de D_q especificado. Seu uso não dispensa a construção de Diagramas de Manejo da Densidade, que auxiliaram na definição dos cronogramas de desbaste com maior precisão e riqueza de informações ao tomador de decisão.

Palavras-chave: Manejo florestal intensivo. Desbaste. Competição. Medida de densidade e estocagem.

ABSTRACT

The aim of this study was to identify accurate and biologically compatible nonlinear models to predict the self-thinning curve and, based on the selected model, propose a new stand density index. First, the sampling units whose competition is maximum was selected by a methodological proposal based on the coefficient predicted by Reineke (1933) for the self-thinning boundary line. Data for this study were obtained from the continuous forest inventory conducted in 605 sample units with variable area, allocated in about 25,500 ha of clonal *Eucalyptus sp.* stands in northern São Paulo. The parameters of the nonlinear models were predicted using the maximum likelihood method in the context of the generalized nonlinear models theory. The model evaluation consisted in graphical analysis of the standardized residuals and the following statistics: absolute and percentage residual standard error (S_{yx} and S_{yx} (%), respectively), Akaike information criteria (AIC), and Bayesian information criteria (BIC). The sampling units with high competition were effectively determined by the method proposed in this study since the coefficient -1.605 has high generality and applicability to forest species. The model VI performed better in representing the boundary curve of self-thinning region, contributing to a 4.7% reduction in residual standard error in relation to the usual model (model I). The Stand Density Index (SDI) formulated from the algebraic rearrangement of model VI has a similar interpretation to Reineke's Density Index, representing the maximum density allowed for mean square diameter (D_q) equal to 25 cm. The SDI is adequate and can be considered easy to use, but should not be construed as a reference density for reaching the specified D_q value. Its use does not exempt Stand Density Management Diagrams, which are important tools to define thinning schedule with greater accuracy and wealth of information for the decision maker.

Key-words: Intensive forest management. Thinning. Competition. Stocking and density measurement.

1 INTRODUÇÃO

O manejo intensivo de florestas equiâneas fundamenta-se nas relações entre o número de plantas por unidade de área, o crescimento volumétrico e as características qualitativas dos fustes, com o objetivo de definir o momento ideal para a realização de intervenções silviculturais, principalmente o desbaste.

Quando corretamente aplicados, os desbastes aumentam o vigor da floresta remanescente em função da remoção dos piores indivíduos e da concentração dos recursos disponíveis no sítio florestal para o desenvolvimento das árvores de interesse, permitindo assim rotações mais longas e reduzindo o tempo necessário à obtenção de produtos com maior qualidade e valor de mercado (GRUSCHOW; EVANS, 1959; SPURR et al., 1957).

O grau de utilização da capacidade produtiva dos sítios florestais é expresso por medidas de densidade e estocagem do povoamento. De acordo com Gingrich (1967), a densidade é uma medida quantitativa do povoamento em termos de área basal, número de árvores ou volume por área, que reflete o grau de aglomeração de fustes no local. O grau de estocagem, por outro lado, é uma medida relativa que descreve a adequação de determinada densidade ao objetivo específico do manejo do povoamento e ao potencial produtivo do local.

A densidade pode ser expressa em termos absolutos como função das variáveis diretamente mensuráveis no povoamento, tais como número de árvores, área basal, volume e cobertura de copa por unidade de área; em uma escala relativa dada pela percentagem em relação a uma densidade teórica, desejável ou média; ou por índices que envolvem uma série de conceitos biométricos (HUSCH et al., 1982).

Índices de densidade são formas eficientes de representar a densidade do povoamento, já que relacionam informações sobre o tamanho médio das árvores (massa, volume, altura ou diâmetro a altura do peito - DAP) e a densidade. A

escolha de um índice de densidade é função da disponibilidade e conveniência na obtenção dos dados, rapidez na visualização e interpretação, compatibilidade biológica e correlação com o crescimento e a produção da floresta (CURTIS, 1970).

O Índice de Densidade de Reineke (*SDI*) é um dos mais utilizados tendo em vista sua grande generalidade e aplicabilidade para espécies florestais. No sistema métrico, representa basicamente o número máximo de árvores por hectare existentes em um povoamento com diâmetro médio quadrático (D_q) igual a 25,40 cm, sob máxima competição e sem mortalidade. Para um dado valor de D_q , existe um número máximo de árvores por unidade de área, independente da idade e da qualidade do sítio. Esta propriedade é bastante interessante e permite a comparação entre diferentes povoamentos (CLUTTER et al., 1983).

Reineke (1933) observou que, em povoamentos equiâneos completamente estocados, a máxima relação entre o D_q e o número de árvores por acre (N) é não linear, obedecendo à seguinte expressão:

$$N = \alpha D_q^\beta$$

Onde:

α e β são coeficientes que definem esta relação.

Quando N e D_q forem conhecidos, o Índice de Densidade de Reineke será expresso por:

$$SDI = N \left(\frac{25,40}{D_q} \right)^\beta$$

O valor do coeficiente β estimado no referido trabalho foi igual a -1,605 para 12 espécies dentre as 14 estudadas, de modo que este valor é indicado, na maioria dos casos, para definir a curva limite do estoque máximo (AVERY; BURKHART, 1983).

Em 1963, Yoda e colaboradores formularam a “lei de autodesbaste” a partir do estudo da relação entre o tamanho médio e a densidade dos indivíduos de diversas espécies herbáceas e arbóreas. Segundo estes autores, em povoamentos puros e equiâneos, existe uma densidade máxima acima da qual se inicia a mortalidade de indivíduos, caracterizada pelo ponto onde a capacidade produtiva do sítio está completamente utilizada. A tolerância à superlotação varia entre as espécies e, à medida que o tempo passa, os limites superiores convergem para um nível fixo de densidade. Embora a qualidade do sítio e a fertilização proporcionem maiores taxas de crescimento, não alteram a densidade máxima suportada para um dado tamanho médio dos indivíduos (DREW; FLEWELLING, 1977; JACK; LONG, 1996).

Yoda et al. (1963) demonstraram ainda que, em escala logaritma, a relação entre o máximo tamanho médio atingível pelas plantas para qualquer densidade pode ser determinada por uma reta com inclinação igual a -1,5. Entretanto, diversos trabalhos discutem a validade deste coeficiente e avaliam os fatores que influenciam na sua estimativa, tais como espécie, índice de área foliar, estrutura de tamanho populacional e competição entre indivíduos (KIKUZAWA, 1999; LI et al., 2000; MATTHEW, et al., 1995; SACKVILLE-HAMILTON et al., 1995; WELLER, 1987).

A partir da curva que define a relação máxima entre o tamanho médio das plantas e a densidade, Drew e Flewelling (1977) introduziram o conceito de Zona de Competição e Mortalidade Iminente, delimitada por duas retas: a primeira corresponde à relação máxima e a segunda, paralela à primeira e em densidades inferiores, corresponde a 50 - 60% da relação máxima. Segundo

estes autores, a mortalidade de árvores em povoamentos localizados abaixo desta zona não é afetada pela densidade, enquanto que o manejo da densidade reduzirá as chances de ocorrer mortalidade em povoamentos situados nesta faixa, reduzindo assim as perdas volumétricas.

Neste contexto, Drew e Flewelling (1979) definiram que, em povoamentos com densidade abaixo do ponto de fechamento de copa (densidade relativa aproximadamente igual a 15% da relação máxima), o crescimento volumétrico por área é proporcional a densidade. No gradiente de densidade relativa que vai de 15 a 40%, perdas no incremento volumétrico individual são compensadas pelo aumento do crescimento total do povoamento, que atinge seu ponto máximo entre 40 e 55%. Para valores acima de 55%, o crescimento total líquido diminui, pois aumentam as chances de ocorrer mortalidade.

Apesar da importância das curvas que definem a máxima competição e estocagem, não foram propostos, até o momento, modelos mais precisos e com informação biológica nos seus parâmetros. Outra importante limitação para o estudo da densidade se refere aos métodos de seleção das unidades amostrais que apresentam os maiores níveis de competição, tendo em vista que dados adequados de povoamentos densamente estocados raramente estão disponíveis (ZEIDE, 1991).

Desta forma, este trabalho tem como objetivo propor um método de seleção das unidades amostrais cuja competição é máxima, com base nos resultados encontrados por Reineke (1933); identificar modelos não-lineares mais precisos e biologicamente compatíveis para a definição da relação máxima entre o tamanho médio e a densidade e, com base no modelo selecionado, propor um novo índice de densidade do povoamento que seja de fácil aplicação e auxilie na definição do desbaste.

2 METODOLOGIA

2.1 Caracterização da área de estudo

O estudo foi conduzido em cerca de 25.500 ha de reflorestamento pertencente à International Paper, localizados em duas regiões administrativas: Região 2 situada no norte do estado de São Paulo (mesoregião de Ribeirão Preto) e Região 3 localizada no extremo sul de Minas Gerais (mesoregião Sul/Sudoeste) (Figura 1).

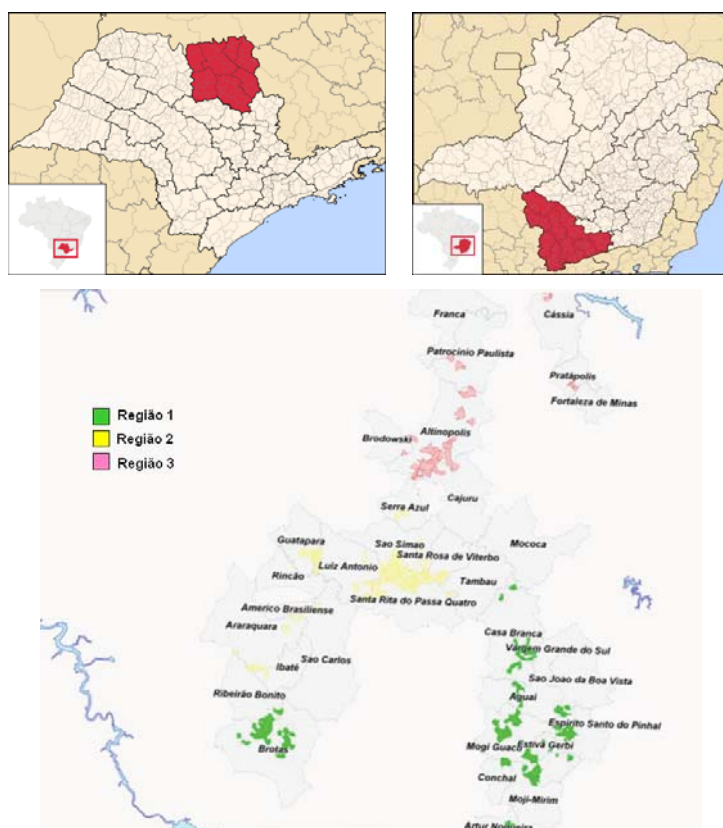


Figura 1 Localização da área de estudo

Nas regiões estudadas são identificados os climas Aw e Cwa segundo a classificação de Köppen. A temperatura e a precipitação média anual variam entre 20 e 23°C e 1.300 e 1.600 mm, respectivamente. De modo geral, verifica-se uma variabilidade climática de um a três meses secos, sendo que no período mais seco, de abril a setembro, a precipitação média não ultrapassa 300 mm. As unidades de manejo florestal localizam-se na zona de transição entre os biomas Cerrado e Mata Atlântica, de acordo com o mapa da vegetação brasileira.

Predominam na região o neossolo quartzarênico álico e o latossolo vermelho-amarelo álico, de textura média a argilosa (EMBRAPA, 2006), sob relevo aplainado ou suavemente ondulado.

Os povoamentos estudados são submetidos ao regime de alto fuste visando à produção de madeira para celulose. Foram analisados 12 tipos diferentes de material genético, que englobam desde híbridos clonais de *Eucalyptus grandis* x *E. urophylla*, até clones puros destas espécies e de *E. camaldulensis*, *E. tereticornis* e *E. globulus*, implantados conforme seis espaçamentos iniciais: 3 x 2 m; 3 x 2,5 m; 3 x 2,75 m; 3 x 3 m; 3,3 x 2,5 m e 3,6 x 2,5 m. A colheita mecanizada é realizada aos 6 e 7 anos de idade.

2.2 Base de dados

Os dados são provenientes do inventário florestal contínuo realizado em 605 unidades amostrais aleatórias de área variável (300 a 460 m²) a fim de monitorar o crescimento e a produção florestal. Para tal, foram selecionados 126 talhões com idade variando entre 1 e 7 anos e 1 talhão monitorado aos 10,7, 12,6 e 14,0 anos de idade (uma unidade amostral).

Nas unidades amostrais (parcelas) foram mensurados a altura total (*HT*) de algumas árvores e o diâmetro a altura do peito (*DAP*) de todos os indivíduos

com $DAP \geq 5$ cm. As alturas totais das demais árvores foram obtidas por meio do ajuste de um modelo hipsométrico, conforme descrito no item 4.3.

A partir destas informações, em cada unidade amostral foram obtidas as seguintes variáveis do povoamento: idade (I); número de árvores por hectare (N); diâmetro quadrático médio (D_q); diâmetro médio (DAP); altura média (HT); altura dominante e codominante média (HDC) segundo o conceito proposto por Assmann (1961); índice de sítio (S); volume médio das árvores individuais (\bar{V}) e volume total em m^3/ha (V). A síntese das estatísticas descritivas referentes a essas variáveis é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 Síntese das estatísticas descritivas correspondentes à amostra de parcelas e árvores utilizadas para o desenvolvimento dos modelos

Variável	Média	Desvio-padrão	Mínimo	Máximo
I	3,98	1,70	1,35	13,99
N	1142,68	269,46	467,29	3300,00
D_q	12,43	2,88	5,62	20,64
DAP	12,26	2,81	5,58	20,46
HT	17,75	4,97	7,02	30,05
HDC	19,43	5,29	7,95	31,55
S	25,18	3,24	10,07	39,82
\bar{V}	0,11	0,08	0,01	0,44
V	128,15	89,02	3,66	628,05

2.3 Relação Hipsométrica

Para a estimativa da altura total das árvores foi ajustado o modelo sigmoidal logístico completo (1), conforme o comportamento dos dados observado na Figura 2.

$$E(HT_i) = \frac{\phi_{10} + \phi_{11}I_i}{1 + \exp\left[\frac{(\phi_{20} + \phi_{21}I_i) - DAP_i}{(\phi_{30} + \phi_{31}I_i)}\right]} \quad (1)$$

Em que:

$E(HT_i)$: esperança matemática ou valor esperado da variável aleatória altura total (m) da i -ésima árvore que compõe a j -ésima unidade amostral;

I_i : idade em anos da i -ésima árvore que compõe a j -ésima unidade amostral;

DAP_i : diâmetro a altura do peito (cm), medido a 1,30 m do solo, da i -ésima árvore que compõe a j -ésima unidade amostral;

ϕ_{kk} : parâmetros a serem estimados.

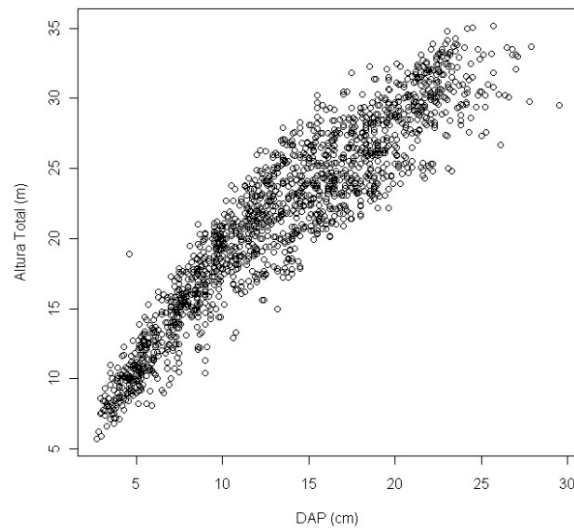


Figura 2 Relação entre altura total e diâmetro a altura do peito (DAP) observada na área de estudo

Para o ajuste do modelo representado na equação 1 foi utilizada a teoria dos modelos não-lineares generalizados, com auxílio da função *gnls* do software estatístico R[®] 2.11.1 (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010), visando avaliar o efeito das covariáveis idade e produtividade do sítio, expressa por *S*, sobre o comportamento da altura total estimada, aumentando assim a explicação da variabilidade dos dados.

2.4 Classificação do sítio florestal

A classificação da qualidade do sítio florestal foi realizada pelo método da curva guia, através do ajuste do modelo logístico descrito na equação 2.

$$E(\overline{HDC}_i) = \frac{\phi_1}{1 + \exp\left(\frac{\phi_2 - I_i}{\phi_3}\right)} \quad (2)$$

Em que:

$E(\overline{HDC}_i)$: esperança matemática ou valor esperado da variável aleatória altura dominante e codominante média da *i*-ésima unidade amostral (m);

I_i : idade da *i*-ésima unidade amostral em anos;

ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 : parâmetros a serem estimados, que representam, respectivamente, assíntota, inflexão e escala.

Trata-se de um modelo com alta capacidade de representação do crescimento biológico e facilidade de interpretação dos parâmetros. A assíntota corresponde ao valor médio máximo da variável resposta e é expresso na unidade do eixo das ordenadas; a inflexão representa a taxa máxima de crescimento (início da maturação do povoamento) e corresponde ao ponto onde

há mudança na concavidade da curva; o parâmetro escala representa a diferença, no eixo x , entre o ponto de inflexão e um valor aproximadamente igual a 73% deste. No entanto, em florestas de rápido crescimento, o ponto de inflexão comumente não é captado pela amostra, que se inicia por volta dos 2 anos de idade (Figura 3).

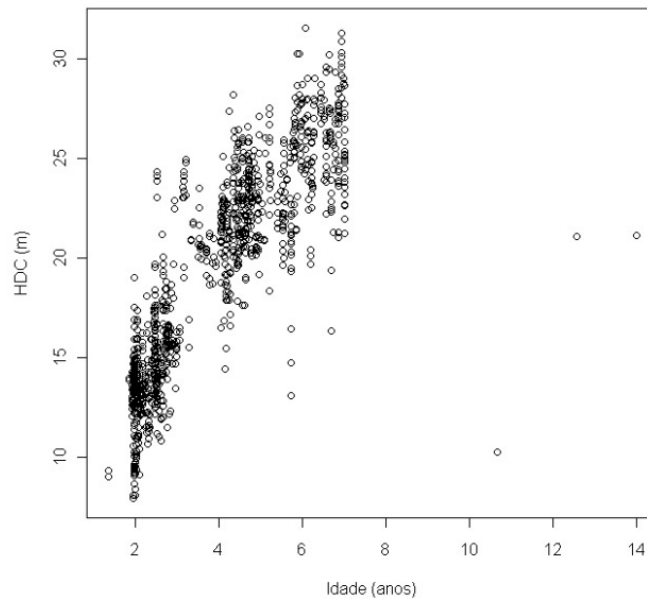


Figura 3 Comportamento da altura dominante e codominante média (HDC) em função da idade

Para obtenção de curvas anamórficas foi realizado um rearranjo da equação 2, resultando na equação 3 abaixo.

$$E(S_i) = \frac{LC \left[1 + \exp\left(\frac{\phi_2 - I_{REF}}{\phi_3}\right) \right]}{1 + \exp\left(\frac{\phi_2 - I_i}{\phi_3}\right)} \quad (3)$$

Em que:

$E(S_i)$: esperança matemática ou valor esperado da variável aleatória índice de sítio da i -ésima unidade amostral (m);

LC : limite da classe de sítio, variando de 10 a 40 m com amplitude de 6 m; I_{REF} : idade de referência igual a 7 anos;

ϕ_2 e ϕ_3 : parâmetros estimados na equação 2.

2.5 Volume individual

Para a obtenção do volume individual das árvores e, conseqüentemente, do volume total em m³/ha foi ajustado o modelo proposto por Schumacher e Hall (1933) a partir da cubagem rigorosa de 1.731 indivíduos com idades variando entre 2 e 7,5 anos. A Figura 4 demonstra o comportamento não-linear entre o volume individual e as variáveis regressoras.

$$E(V_i) = \beta_0 DAP_i^{\beta_1} HT_i^{\beta_2} \quad (4)$$

Em que:

$E(V_i)$: esperança matemática ou valor esperado da variável aleatória volume com casca da i -ésima árvore (m³);

DAP_i : diâmetro a altura do peito da i -ésima árvore (cm), medido a 1,30 m do solo;

HT_i : altura total da i -ésima árvore (m);

β_i : parâmetros da regressão não-linear a serem estimados.

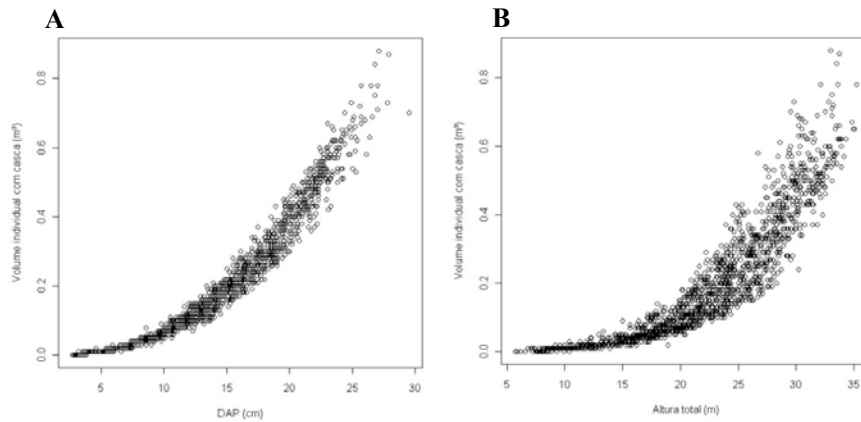


Figura 4 Comportamento do volume individual (com casca) das árvores e o diâmetro a altura do peito (DAP) – A; e altura total (HT) – B

Tomando como base o volume de um cilindro perfeito, expresso por

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h$$

, observa-se que os parâmetros do modelo (4) podem ser interpretados de forma que β_0 corresponde ao fator de correção da forma da árvore; β_1 representa o coeficiente associado ao DAP, sendo este bem próximo a 2; e β_2 o coeficiente associado à altura total e próximo a 1.

2.6 Curva de autodesbaste e Índice de densidade

Para o ajuste da curva que representa a máxima relação entre D_q e N , ou seja, o limite máximo da região onde ocorre mortalidade em função da densidade, foram inicialmente selecionadas as unidades amostrais superestocadas, as quais se localizam no limite superior da nuvem de pontos. Para tal, foram comparados dois métodos de identificação das parcelas com elevado grau de ocupação do sítio:

- a) Definição de pontos fronteiros proposta por Keeney e Raiffa (1976) baseada no conceito simplificado de dominância, segundo o qual uma determinada observação será um ponto limítrofe em relação à outra quando as seguintes condições forem simultaneamente atendidas:

$$z_i \geq z_{i+1} \text{ para todas as } z \text{ variáveis (ou seja, } D_i \text{ e } N)$$

$$z_i > z_{i+1} \text{ para pelo menos uma das } z \text{ variáveis (ou seja, } D_i \text{ ou } N)$$

- b) Utilização do coeficiente angular obtido por Reineke (1933) e posicionamento da curva $N = a \times D_i^{-1.608}$ no limite superior da nuvem de pontos, considerando $a = 98.750$, selecionando as parcelas cuja distância em relação à curva seja inferior a 14% da média dos valores observados.

Para a representação da relação de autodesbaste foram testados os modelos alométricos apresentados na Tabela 2, conforme os métodos apresentados no item 4.7.

Tabela 2 Modelos não-lineares avaliados para a relação de autodesbaste, em que $E(y) = D_{\text{q}} - D_{\text{q}}(1 - D_{\text{q}})^y$ e $x = D_{\text{q}}$

Nº	Modelo	Equação	Referência
I	Freundlich	$E(y) = \alpha x^{\beta}$	Reineke (1933)
II	-	$E(y) = \alpha \beta^x$	Ratkowsky (1990)
III	-	$E(y) = \alpha(1 + x)^{\beta}$	Ratkowsky (1990)
IV	Michaelis-Menten	$E(y) = \frac{\alpha x}{\beta + x}$	Pinheiro e Bates (2000)
V	Freundlich modificado	$E(y) = \alpha + \beta x^{\gamma}$	Ratkowsky (1990)
VI	Regressão assintótica	$E(y) = \alpha + (\beta - \alpha) \exp[-\exp(\gamma)x]$	Pinheiro e Bates (2000)

A partir da identificação do modelo mais adequado, procedeu-se a reformulação do Índice de Densidade proposto por Reineke (1933) mediante o rearranjo algébrico da equação, visando obter a padronização das curvas para um $D_{\text{q}} = 25$ cm.

2.7 Técnicas de ajuste e critérios de avaliação dos modelos

Os modelos propostos foram ajustados segundo a teoria dos modelos não-lineares generalizados, tal como proposto por Calegario et al. (2005), de modo a realizar o ajuste considerando erros não normais e utilizando métodos generalizados de inversão de matrizes. Foi utilizado o método da máxima verossimilhança avaliando-se apenas o efeito fixo com base no pacote *nlme* do software estatístico R[®] 2.11.1 (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010).

O ajuste de todos os modelos anteriormente apresentados foi realizado considerando o erro aditivo. Para o ajuste dos modelos apresentados na Tabela 2 assumiu-se $\epsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, enquanto que para os demais modelos apresentados nos itens 2.3 a 2.5, foram necessárias correções na estrutura de variância e na correlação dos resíduos ϵ , conforme proposto por Gregoire et al. (1995) e Littel

et al. (1998), de modo a flexibilizar as pressuposições de Gauss-Markov e contemplar a ausência de homocedasticidade e independência de resíduos na análise.

De acordo com Pinheiro e Bates (2000), ao flexibilizar as pressuposições básicas para o ajuste de modelos clássicos, tem-se $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{\Lambda})$, de modo que a matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ pode ser decomposta no produto:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{V} \mathbf{C} \mathbf{V} \quad (5)$$

sendo fácil verificar que:

$$Var(\varepsilon_j) = \sigma^2 [\mathbf{V}]_{jj}^2 \quad (6)$$

$$cor(\varepsilon_j, \varepsilon_k)_{j \neq k} = [\mathbf{C}]_{jk} \quad (7)$$

Em que:

\mathbf{V} descreve a estrutura de variância e \mathbf{C} a correlação do vetor de erros $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Para o ajuste da heterocedasticidade do tipo funil crescente (Figuras 1, 2 e 3) foi utilizada a função de variância “*varPower*” (equação 9). Segundo Pinheiro e Bates (2000), a variância pode ser modelada por:

$$Var(\varepsilon_j) = \sigma^2 |v_j|^{2\delta} \quad (8)$$

que corresponde à seguinte função de variância:

$$g(v_j, \delta) = |v_j|^\delta \quad (9)$$

Para a modelagem da autocorrelação serial dos resíduos, comumente encontrada em dados longitudinais desbalanceados, ou seja, obtidos em intervalos desiguais de tempo, e que resulta em quebra de independência dos resíduos, foi utilizado o modelo autorregressivo de ordem 1 (AR(1)), que pode ser expresso por:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i \varepsilon_{t-i} + a_t \quad (10)$$

Em que:

ε_t : resíduo relativo ao tempo t ; φ_i : parâmetro do modelo autor-regressivo de ordem $p = 1$; $t - i$: distância entre duas observações (lag);
 a_t : ruído branco no instante t .

Segundo Pinheiro e Bates (2000), o modelo AR(1) é o mais simples da classe dos autorregressivos, em que o valor absoluto da função de autocorrelação diminui expressivamente com o “lag” (distância temporal entre as observações), e é amplamente utilizado para a modelagem da correlação residual.

Os modelos foram avaliados pela análise gráfica dos resíduos padronizados e segundo as seguintes estatísticas:

- Erro-padrão residual (S_{yx}) e percentual (S_{yx} (%)):

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p}} \quad (11)$$

$$S_{yx} (\%) = \frac{S_{yx}}{\bar{Y}} \times 100 \quad (12)$$

Em que:

S_{yx} : erro padrão da estimativa na unidade da variável resposta;

Y_i : variável dependente observada;

\hat{Y}_i : variável regressora estimada pelo modelo; n : número de observações;

p : número de parâmetros do modelo;

S_{yx} (%): erro padrão percentual;

\bar{Y} : média dos valores observados.

- Critério de Informação de Akaike (AIC):

$$AIC = -2 \ln(mv) + 2p \quad (13)$$

Em que:

\ln : logaritmo neperiano;

mv : valor da função de verossimilhança;

p : número de parâmetros do modelo.

- Critério de Informação Bayesiano (BIC):

$$BIC = -2 \ln(mv) + p \ln(n) \quad (14)$$

Em que:

\ln : logaritmo neperiano;

mv : valor da função de verossimilhança;

p : número de parâmetros do modelo;

n : número total de observações.

Os critérios (11) a (14) foram utilizados para a comparação dos modelos não aninhados apresentados na Tabela 2, de modo a selecionar a melhor função de ajuste para a relação de autodesbaste.

O teste da razão de verossimilhança (TRV) foi utilizado para avaliar se existe diferença significativa entre o modelo I ajustado e o mesmo modelo avaliado por Reineke (1933) e Yoda et al. (1963), sobretudo com relação ao coeficiente β . Para tal foram consideradas as seguintes hipóteses:

H_0 : $\beta = -1,605$ ou $\beta = -1,5$ (modelo restrito)

H_a : $\beta \neq -1,605$ ou $\beta \neq -1,5$ (modelo livre)

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Relação Hipsométrica

As estimativas e os níveis de significância dos parâmetros do modelo logístico completo para relação hipsométrica estão apresentados na Tabela 3. A covariável idade não apresentou influência significativa no parâmetro escala, resultando, portanto, em necessidade de reprocessamento do modelo. Após o reajuste do modelo, verificou-se que a hipótese de nulidade para os parâmetros pode ser rejeitada a 1% de significância, ou seja, os Φ_i são diferentes de zero, havendo regressão (Tabela 3).

De acordo com os resultados obtidos por Sena et al. (no prelo), a assíntota foi fortemente influenciada pela idade, de modo que a altura total máxima média aumenta à medida que os povoamentos se tornam mais velhos.

Tabela 3 Estimativa dos parâmetros do modelo logístico completo para relação hipsométrica e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student

Parâmetros	Valores	Erro-padrão	t_c	p-valor
Φ_{10}	15,6904	0,4548	34,50	< 0,0001
Φ_{11}	2,3519	0,0782	30,08	< 0,0001
Φ_{20}	4,2046	0,2565	16,39	< 0,0001
Φ_{21}	0,4951	0,0436	11,35	< 0,0001
Φ_3	4,4878	0,0697	64,43	< 0,0001

Ainda, em conformidade com os resultados obtidos por Sena et al. (no prelo), o modelo logístico se mostrou adequado para a representação da relação altura – diâmetro, sobretudo mediante a inclusão do efeito da covariável idade, já que apresentou baixo erro padrão da estimativa (Tabela 4).

Tabela 4 Estatísticas utilizadas no diagnóstico da qualidade de ajuste do modelo hipsométrico proposto. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; S_{yx} (%): erro-padrão residual percentual

Modelo	AIC	BIC	S_{yx}	S_{yx} (%)
Logístico completo	6185,43	6229,08	0,9335	4,36

Complementando a análise de regressão, observou-se uma boa distribuição dos resíduos, que apresentaram comportamento aleatório em torno da média zero (Figura 5). A Figura 5 demonstra ainda que o modelo hipsométrico ajustado abrange toda a base de dados na estimativa das alturas totais, que variam de 5,70 a 35,20 metros.

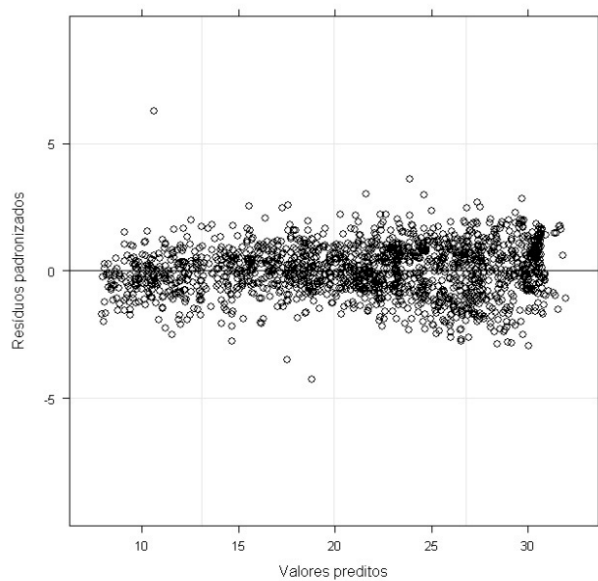


Figura 5 Distribuição dos resíduos padronizados do modelo logístico completo para relação hipsométrica

3.2 Classificação do sítio florestal

A Tabela 5 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo logístico para representação do crescimento em altura dominante e codominante média, na qual se verificou que todos os parâmetros são significativamente diferentes de zero para um nível de significância igual a 5%.

Tabela 5 Estimativa dos parâmetros do modelo logístico completo para crescimento em altura dominante e codominante média e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student

Parâmetros	Valores	Erro-padrão	t_c	p-valor
φ_1	25,8080	0,2690	95,95	< 0,0001
φ_2	1,9910	0,0251	79,35	< 0,0001
φ_3	1,3382	0,0428	31,24	< 0,0001

Conforme os dados apresentados na Tabela 6, e a partir da análise gráfica dos resíduos (Figura 6), é possível inferir que o modelo logístico apresentou bom desempenho na estimativa da altura dominante em função do tempo, já que o modelo apresentou baixo erro padrão residual e distribuição aleatória dos resíduos em torno de zero. Na Figura 6 é possível observar também que o modelo proposto é capaz de fornecer estimativas de altura dominante compatíveis com os intervalos dos valores observados, que variaram entre 7,9 e 31,5 m.

Tabela 6 Estatísticas utilizadas no diagnóstico da qualidade de ajuste do modelo de crescimento em altura dominante e codominante média. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; S_{yx} (%): erro-padrão residual percentual

Modelo	AIC	BIC	S_{yx}	S_{yx} (%)
Logístico completo	4353,05	4382,85	1,81	9,31

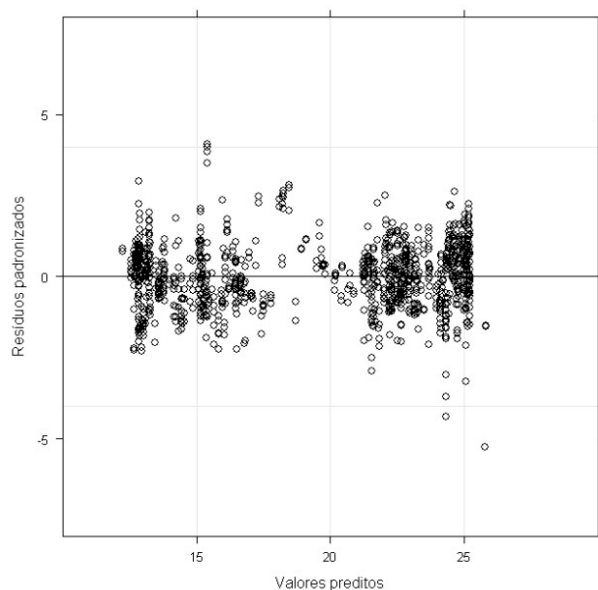


Figura 6 Distribuição dos resíduos padronizados do modelo logístico completo para classificação de sítio

A partir do rearranjo do modelo ajustado, foram obtidas curvas anamórficas de classificação dos sítios para uma idade índice igual a sete anos (Figura 7). As curvas representam os índices de sítio igual a 10, 16, 22, 28, 34 e 40 m e delimitam cinco classes de produtividade, a saber: I, II, III, IV e V.

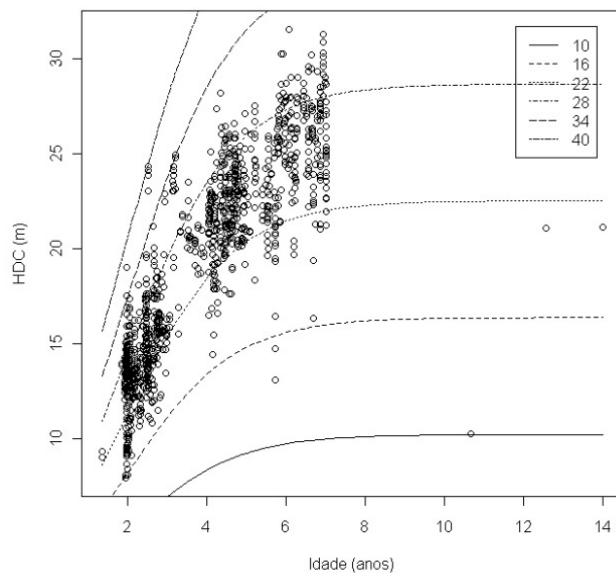


Figura 7 Curvas de índice de sítio geradas pelo modelo logístico completo

3.3 Volume Individual

De acordo com a Tabela 7, o modelo de Schumacher e Hall mostrou-se adequado para a representação do comportamento observado entre o volume e as variáveis regressoras, já que apresentou baixo erro padrão na estimativa, em torno de 0,24% da média dos valores observados.

Tabela 7 Estatísticas utilizadas na avaliação da qualidade do ajuste do modelo de Schumacher e Hall para a estimativa do volume individual. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; $S_{yx}(\%)$: erro-padrão residual percentual

Modelo	AIC	BIC	S_{yx}	$S_{yx}(\%)$
Schumacher e Hall	-11085,51	-11052,77	0,0005	0,24

A Tabela 8 apresenta as estimativas dos parâmetros e as estatísticas do teste “t”, sendo possível observar a elevada significância dos mesmos para $\alpha = 5\%$, ou seja, os valores diferem de zero e são imprescindíveis na estimativa do volume das árvores.

Tabela 8 Estimativa dos parâmetros do modelo de Schumacher e Hall para estimativa do volume individual das árvores e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student

Parâmetros	Valores	Erro-padrão	t_c	p-valor
β_0	0,0000349	0,000001379	25,29	< 0,0001
β_1	1,8086554	0,013205853	136,96	< 0,0001
β_2	1,1627679	0,020673231	56,25	< 0,0001

Na Figura 8 verifica-se uma boa distribuição dos resíduos, que se distribuíram aleatoriamente em torno da média zero. Outro indicador da qualidade do ajuste, que pode ser observado na Figura 8, é a capacidade do modelo de fornecer estimativas compatíveis com o intervalo de valores observados.

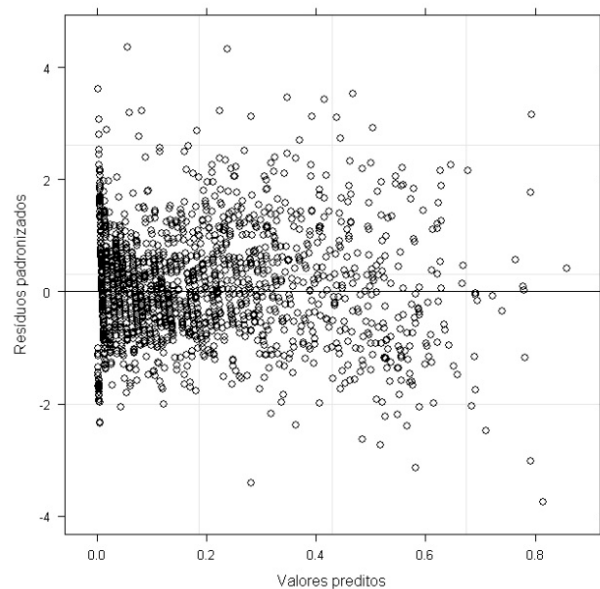


Figura 8 Distribuição dos resíduos padronizados do modelo de Schumacher e Hall para o volume individual das árvores do povoamento

3.4 Curva de autodesbaste e Índice de densidade

A inspeção visual da nuvem de pontos obtida a partir das 605 unidades amostrais sugere a inexistência de relação regressiva entre as variáveis N e D_q (Figura 9). Este fato pode ser explicado pela grande quantidade de parcelas subestocadas na amostra. Nestas unidades amostrais verificam-se baixos níveis de competição, já que a densidade de plantas é insuficiente para tornar significativos os efeitos da aglomeração dos fustes nas idades observadas (DREW; FLEWELLING, 1977). Desta forma, a presença de grande número de parcelas subestocadas mascara a relação entre as variáveis supracitadas.

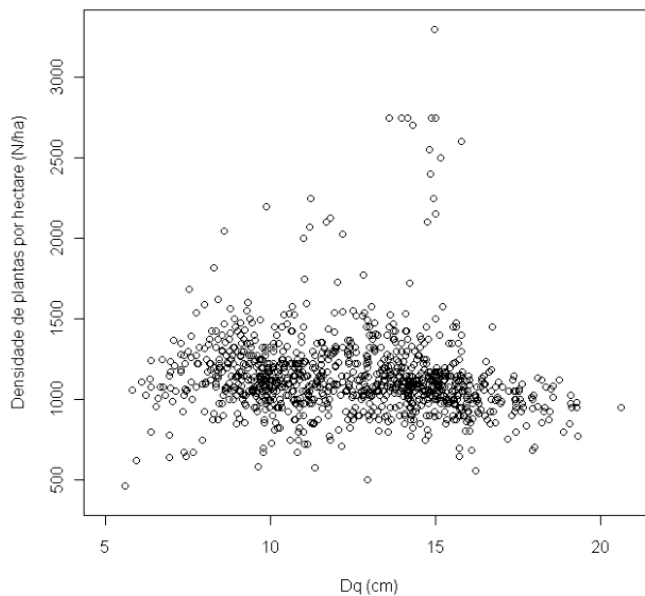


Figura 9 Relação entre a densidade de plantas por hectare (N) e o diâmetro médio quadrático (D_q) observada nas 605 unidades amostrais do inventário florestal

A Figura 10 apresenta os resultados da seleção das parcelas superestocadas através dos métodos descritos na seção 4.6. É possível observar que a metodologia proposta por Keeney e Raiffa (1976) foi ineficaz para tal finalidade, pois identificou apenas as combinações máximas entre as variáveis nos diferentes estádios de desenvolvimento, ignorando o efeito da baixa competição nas idades mais jovens (Figura 10-A). Entretanto, Sales-Luis e Fonseca (2004) utilizaram com sucesso esta metodologia para identificação de 25 parcelas localizadas no limite máximo da região de autodesbaste para *Pinus pinaster*. Este resultado pode ser explicado pelo fato de que a amostragem realizada por estes autores ocorreu preferencialmente em povoamentos com

idades mais avançadas e que apresentavam expressiva competição. Assim, infere-se que esta metodologia não é adequada para identificação das parcelas superestocadas em florestas de rápido crescimento para produção de celulose e papel, cuja maioria dos talhões são colhidos antes de atingirem máxima competição.

Por outro lado, a proposição metodológica apresentada neste trabalho demonstrou maior eficiência quanto à determinação das parcelas que representam situações de elevada competição (Figura 10-B). Segundo Curtis (1971) e Pretzsch (2006), o coeficiente angular $-1,605$ possui elevada generalidade e aplicabilidade para espécies florestais, o que pode explicar o sucesso do método. Ademais, este método promoveu a exclusão natural de observações atípicas ou “outliers” que podem influenciar significativamente o ajuste dos modelos estocásticos para explicar a relação entre N e D_q .

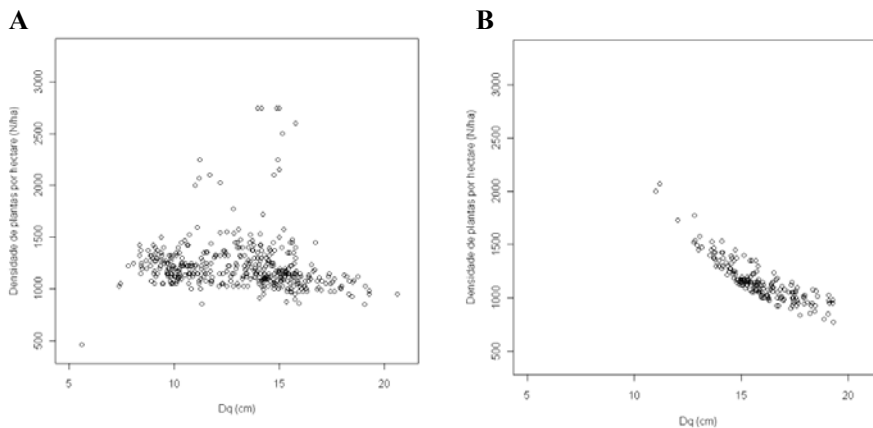


Figura 10 Relação entre a densidade de plantas por hectare (N) e o diâmetro médio quadrático (D_q) observada nas parcelas superestocadas selecionadas pelo método proposto por Keeney e Raiffa (1976) – A; e pela metodologia proposta baseada no coeficiente angular encontrado por Reineke (1933) – B

Conforme a ponderação dada pelo pesquisador na escolha da distância entre as observações e a curva $N = 98,750 \times D_q^{-1,608}$, pode-se aumentar a variabilidade da nuvem de pontos que representam níveis máximos de competição. No entanto, a escolha do critério de inclusão deve ser cuidadosamente realizada, pois aumentar a variabilidade pode implicar na redução da capacidade explicativa dos modelos propostos e até mesmo a inclusão de unidades amostrais muito próximas a zona de baixa competição.

Weller (1987) cita como um dos principais problemas para o estudo do autodesbaste a necessidade de edição da base de dados para o ajuste dos modelos, pois o limite máximo representa uma restrição assintótica que atua somente em povoamentos suficientemente estocados. No entanto, considerando a dificuldade evidente em avaliar se um povoamento encontra-se em sua densidade máxima (BI et al., 2000; ZEIDE, 1991), e dado que a mortalidade natural pode ocorrer em níveis inferiores a esta densidade, é mais eficiente realizar o ajuste dos modelos com base em uma amostra de parcelas sub e superestocadas, evitando desta forma a subjetividade na seleção dos dados (PUETTMANN et al., 1993; SMITH; HANN, 1984).

Neste sentido, mesmo que exista subjetividade na escolha do limite de inclusão de parcelas (distância máxima da curva $N = 98,750 \times D_q^{-1,608}$), verifica-se que a proposição metodológica baseada no coeficiente de Reineke (1933) é coerente com os objetivos do estudo e atende aos requisitos mínimos para seleção dos dados para o estudo do autodesbaste.

A Tabela 9 apresenta as estimativas dos parâmetros dos modelos propostos para o limite máximo da relação entre N e D_q (Figura 10-B). Em geral, é possível observar significância dos testes para os valores paramétricos serem nulos ($p < 0,05$). No entanto, verificou-se que, para o modelo V, o qual

representa uma reparametrização do modelo I, o valor estimado de β não foi significativamente diferente de zero no nível de significância estabelecido.

Tabela 9 Estimativa dos parâmetros dos modelos avaliados para a relação de autodesbaste e as respectivas estatísticas de avaliação da significância. Onde t_c : estatística do teste t de Student

Modelo	Parâmetros	Valores	Erro-padrão	t_c	p-valor
I	α	64762,470	8375,778	7,73	< 0,0001
	β	-1,460	0,047	-30,82	< 0,0001
II	α	5235,604	279,488	18,73	< 0,0001
	β	0,908	0,003	288,30	< 0,0001
III	α	93458,970	13278,491	7,04	< 0,0001
	β	-1,560	0,051	-30,64	< 0,0001
IV	α	531,818	8,538	62,29	< 0,0001
	β	-8,367	0,098	-85,72	< 0,0001
V	α	619,600	76,700	8,08	< 0,0001
	β	1688495,500	1395186,300	1,21	0,2278
	γ	-2,900	0,400	-8,30	< 0,0001
VI	α	779,360	42,259	18,44	< 0,0001
	β	27727,280	7592,457	3,65	0,0003
	γ	-1,290	0,092	-14,00	< 0,0001

A partir das informações apresentadas na Tabela 10 observa-se que, de maneira geral, os modelos propostos apresentaram bom desempenho, já que as estatísticas de avaliação da qualidade do ajuste foram semelhantes. Com relação ao erro padrão da estimativa, nota-se que houve pequena variação entre os modelos, tendo sido identificados valores inferiores a 10% da densidade média observada.

Em geral, os resíduos apresentaram boa distribuição, com dispersão uniforme em torno da média zero e ausência de tendência (Figura 11). Observa-

se ainda que para todos os modelos avaliados, os valores estimados encontram-se dentro do intervalo de valores observados, o que também representa um indicativo da qualidade do ajuste.

Tabela 10 Estatísticas utilizadas no diagnóstico da qualidade de ajuste dos modelos avaliados para a relação de autodesbaste. Em que: AIC: critério de informação de Akaike; BIC: critério de informação Bayesiano; S_{yx} : erro-padrão residual; $S_{yx}(\%)$: erro-padrão residual percentual

Modelo	AIC	BIC	S_{yx}	$S_{yx}(\%)$
I	2116,31	2125,90	82,78	7,24
II	2141,82	2151,42	88,83	7,77
III	2117,69	2127,28	83,10	7,27
IV	2116,29	2125,88	82,78	7,24
V	2101,36	2114,16	79,22	6,93
VI	2099,88	2112,67	78,89	6,90

No entanto, com base nos resultados apresentados na Tabela 10 e na Figura 11, verifica-se que o modelo VI apresentou melhor desempenho na representação do limite máximo da região de autodesbaste, principalmente quando comparado ao modelo I, comumente utilizado em estudos desta natureza. Este modelo contribuiu com uma redução de 4,7% no erro padrão da estimativa em relação ao modelo usual. Este resultado pode ser explicado por sua maior flexibilidade em modelar respostas que se aproximam de uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow \infty$ (PINHEIRO; BATES, 2000).

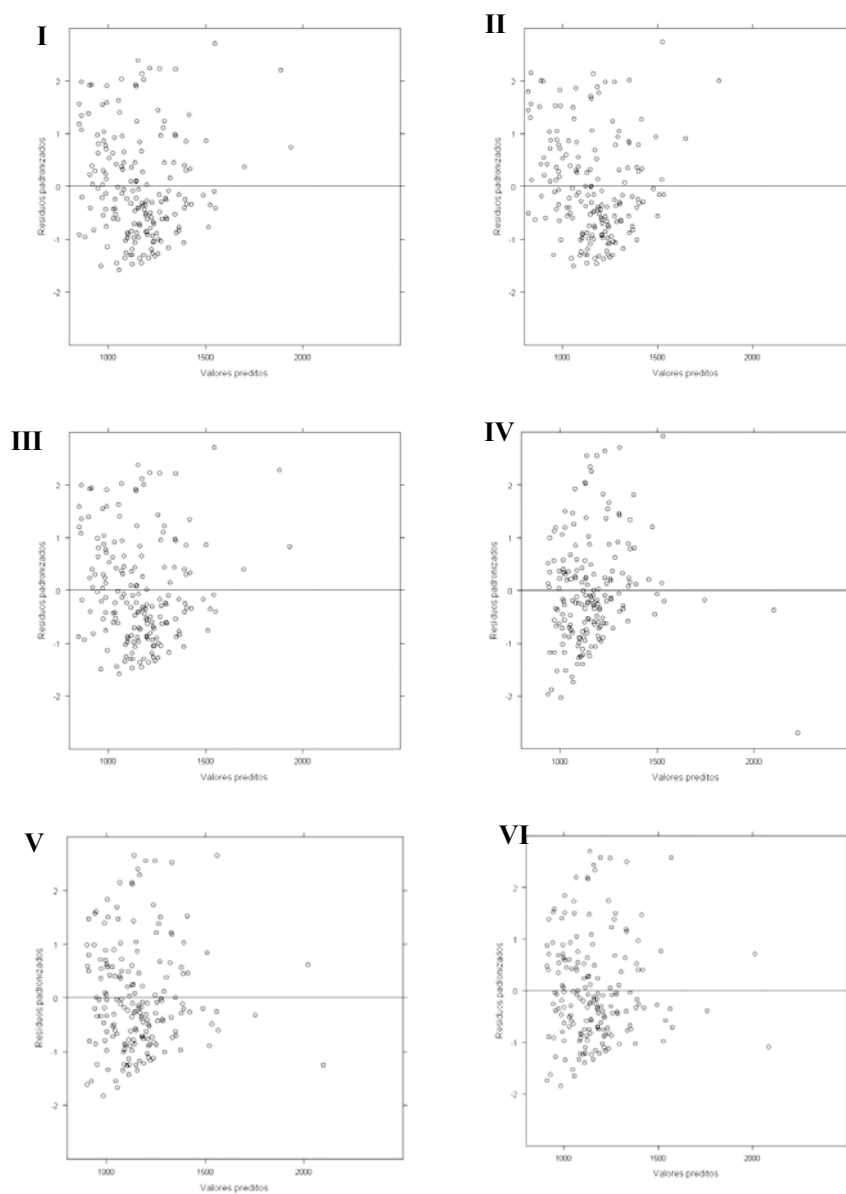


Figura 11 Distribuição dos resíduos padronizados dos modelos avaliados para descrever a relação máxima entre N e $D_{1/2}$

A interpretação biológica dos parâmetros do modelo VI permite a obtenção de informações mais detalhadas sobre o povoamento estudado, o que representa outra vantagem comparativa com relação ao modelo I. Os parâmetros α , β e γ representam, respectivamente, a assíntota horizontal para $x \rightarrow \infty$, ou seja, a densidade média máxima permitida para obter o máximo diâmetro quadrático na situação de elevada competição; o valor de y quando $x = 0$, o que não constitui uma condição real para o contexto analisado; o logaritmo da taxa de diminuição de D_q em função do aumento de N .

Considerando que o crescimento biológico é representado por curvas sigmoidais que apresentam uma assíntota superior (crescimento máximo observado), é razoável utilizar modelos assintóticos para representar a relação entre a densidade de plantas por hectare e o diâmetro médio quadrático. À medida que se observa um aumento no D_q , a densidade máxima suportada atinge uma assíntota horizontal, pois o crescimento diamétrico dos indivíduos é finito. No estágio de senescência, no qual se observa o decréscimo da curva de crescimento, a mortalidade passa a ser, portanto, independente da densidade e cessa o acréscimo no diâmetro quadrático. Assim, a premissa de que $D_q \rightarrow \infty$ é meramente teórica.

Neste sentido, o parâmetro α do modelo VI pode ser interpretado como a densidade média máxima observada quando o diâmetro quadrático for máximo ($D_q \rightarrow \infty$), na situação de máxima competição, estimada em 779,36 ind./ha.

A mesma lógica pode ser aplicada na interpretação biológica de β , responsável por determinar o ponto de interseção com o eixo das ordenadas. Este parâmetro define a densidade média máxima observada diante do mínimo diâmetro quadrático médio ($D_q \rightarrow 0$). Pelo modelo VI infere-se, portanto, que a máxima aglomeração de plantas suportada na população estudada é estimada em 27.727,28 ind./ha. Por outro lado, uma estimativa bem superior é fornecida pelo

modelo I, cujo valor de β foi de 64.762,47 ind./ha. Esta diferença pode ser explicada pela estruturas distintas entre estes modelos em conjunto com a menor quantidade de observações na região superior da curva (Figura 9-B). Assim, não é possível afirmar que existe maior exatidão na estimativa da interseção com o eixo y fornecida por um ou outro modelo.

A taxa de decaimento de D_t em função do aumento de N , representada pelo parâmetro γ no modelo VI, foi estimada em 0,275 (e^{γ}), o que difere significativamente dos coeficientes estimados por Reineke (1933) e Yoda et al. (1963), inclusive por apresentar sinal positivo. Segundo Pinheiro e Bates (2000), na concepção da estrutura do modelo, foi utilizado o logaritmo para reforçar a positividade da constante para que o mesmo atinja uma assíntota. Desta forma, as diferenças nas estruturas dos modelos I e VI inviabilizam a comparação e a interpretação dos gradientes das curvas.

Considerando apenas o modelo I, o valor estimado do expoente β foi estatisticamente diferente de -1,605 (p-valor = 0,0034; $\alpha = 0,05$). Da mesma forma, as estimativas obtidas por Palahí et al. (2003) e Río et al. (2001) para povoamentos de *Pinus sylvestris* localizados na Espanha, cujos valores corresponderam a 1,829 e 1,815, respectivamente, também apresentaram diferença significativa com relação ao coeficiente de Reineke. Estes resultados favorecem a construção de hipótese contrária àquela apresentada por Curtis (1971) e Pretzsch (2006), com indícios de que não há generalidade no coeficiente -1,605. Esta hipótese deverá ser avaliada em estudos específicos que considerem uma ampla variedade de espécies e ambientes.

Por outro lado, verifica-se que a utilização do expoente $\beta = -1,605$ na metodologia proposta para a seleção das parcelas superestocadas não implicou em tendenciosidade na escolha, já que a estimativa do gradiente da curva diferiu significativamente deste valor. Desta forma, o resultado apresentado acima não

invalida a metodologia utilizada na seleção das observações para o ajuste dos modelos.

Com relação à lei de autodesbaste proposta por Yoda et al. (1963), os resultados deste estudo confirmam a sua aplicabilidade, pois não foi identificada diferença significativa entre a estimativa de β obtida para modelo I e o expoente igual a -1,5 (p-valor = 0,4456, $\alpha = 0,05$). Resultado semelhante foi encontrado por Mabvurira e Miina (2002), que obtiveram um coeficiente igual a -1,52 para povoamentos de *Eucalyptus grandis* no Zimbábue, o que é igualmente próximo a lei de autodesbaste.

Estes resultados apontam para a validação da lei de autodesbaste para o gênero *Eucalyptus*. Todavia, fazem-se necessários estudos mais aprofundados visando a esta comprovação mediante a avaliação do índice de área foliar e a biomassa requerida para suportá-lo (SACKVILLE-HAMILTON et al., 1995), da estrutura de tamanho populacional e competição entre indivíduos (KIKUZAWA, 1999), a fim de identificar diferenças significativas entre as espécies e até mesmo clones.

A estimativa do gradiente da curva definida pelo modelo I é altamente dependente da espécie. MacKinnney e Chaiken (1935) obtiveram um coeficiente igual a -1,707 para *Pinus taeda*. McArdle et al. (1961) encontraram um valor próximo a -1,54 para *Pseudotsuga menziesii*. Bailey (1972) relata um valor constante igual a -1,58 para *Pinus radiata* na Nova Zelândia. Kurinobu et al. (2006) encontraram uma estimativa de β igual a -1,67 para *Acacia mangium*. Segundo Zeide (1985), estes desvios podem fornecer informações significativas e úteis a respeito das diferenças biológicas entre as espécies.

De acordo com Hynynen (1993), o intercepto α (modelo I) apresenta variação intraespecífica, conforme a qualidade do sítio, de modo que os locais com maior capacidade de suporte são capazes de alocar uma maior densidade inicial de plantas de uma determinada espécie. Comeau et al. (2010)

demonstram a influência do sítio no intercepto da curva de autodesbaste e alertam para o fato de que a procedência genética pode influenciar significativamente sua estimativa.

Estas variações intraespecíficas são marcantes em duas situações: manipulação artificial da disponibilidade de luz e nutrientes e grandes diferenças entre zonas climáticas (JACK; LONG, 1996). Os estudos realizados por Aikman e Watkinson (1980) e Morris e Myerscough (1991) demonstram que sombreamento artificial e severas deficiências nutricionais reduzem o intercepto da curva que representa a superlotação no povoamento.

De acordo com Harper (1977), o intercepto α também é capaz de fornecer informações taxonômicas e ecológicas importantes. Em geral, coníferas possuem maiores valores para o intercepto que folhosas, assim como as espécies tolerantes à sombra em relação às intolerantes. Da mesma forma, monocotiledôneas apresentam valores superiores para o intercepto em comparação às dicotiledôneas (MATTHEW et al., 1995). Isto significa que, para um determinado tamanho médio, mais indivíduos sobreviverão proporcionalmente ao aumento do intercepto (WHITE; HARPER, 1970).

Desta forma, as diferenças entre os interceptos estimados pelos modelos I e VI (Tabela 7) podem ser explicadas por diferenças nas estruturas das equações, bem como pela sensibilidade dos modelos com relação aos fatores de interferência comumente relatados na literatura supracitada. Ademais, é importante considerar que a existência de observações muito acima da nuvem de pontos (Figura 9) pode indicar que os dados selecionados (Figura 10-B) não representam o limite de máxima competição para os clones estudados devido à baixa idade dos povoamentos. A obtenção de uma nova amostra em talhões mais velhos e o reajuste do modelo VI poderá implicar na estimativa de um maior valor de β .

Ainda que a aplicação do modelo VI seja limitada em função dos fatores já discutidos, os resultados deste trabalho demonstram que este modelo ajustou-se melhor aos dados, explicando boa parte de sua variância. Além disso, foi capaz de enriquecer a avaliação do limite máximo da região de autodesbaste e suas implicações, quando comparado ao modelo usual (modelo I), devido à maior quantidade de informação biológica em seus parâmetros.

A Figura 12 apresenta a aplicação do modelo VI na definição do limite superior da relação entre N e D_{α} , bem como a visualização das zonas de manejo propostas por Drew e Flewelling (1977, 1979). Assumindo que as parcelas selecionadas para o ajuste dos modelos propostos representam a máxima competição observada na área de estudo, é possível observar unidades amostrais localizadas acima do limite superior (100%). De acordo com Tewari (2007), nestas parcelas poderão ser verificadas, a qualquer momento, níveis drásticos de mortalidade, já que a competição ali existente supera os limites máximos toleráveis.

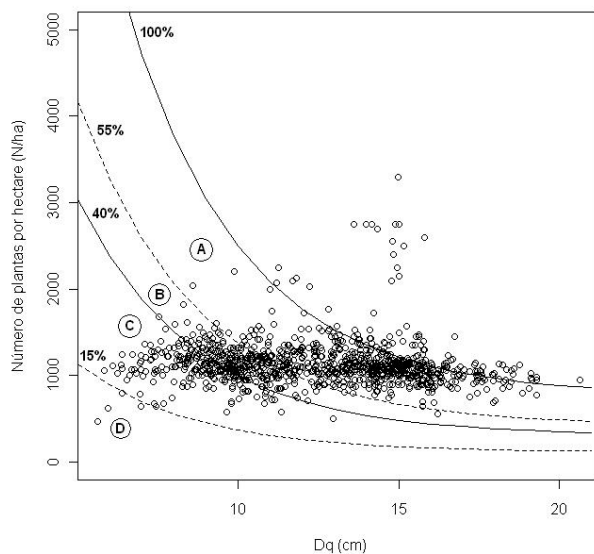


Figura 12 Aplicação do modelo VI para a determinação da máxima relação entre a densidade e o diâmetro médio quadrático e as zonas de manejo dos povoamentos: Zona de Competição e mortalidade Iminente – A; Zona de Estoque Completo – B; Zona de Aumento da Competição – C; Zona de Crescimento Livre – D

A existência de unidades amostrais com diversos níveis de densidade e estádios de maturação sugere que diferentes estratégias de desbaste deverão ser definidas para cada talhão (Figura 12). Segundo Reid (2006), o desbaste deve ser realizado tão cedo quanto possível, pois povoamentos de eucalipto são consideravelmente sensíveis à competição. Considerando que a probabilidade de ocorrência de mortalidade em função da superlotação é nula na região delimitada pelas curvas referentes a 15 e 55% da relação máxima (DREW; FLEWELLING, 1977, 1979), infere-se a partir do modelo VI que os desbastes devem ser orientados para a manutenção de uma densidade máxima entre 116,90 e 428,65 ind./ha visando ao máximo D_q e às menores perdas volumétricas.

Marshall et al. (1992 citados por JACK; LONG, 1996) sugerem que densidades relativas acima de 40% podem ser adequadas ao alcance de um crescimento total próximo ao máximo, enquanto que o máximo crescimento individual é atingido abaixo deste valor (DREW; FLEWELLING, 1979). Desta forma, a densidade máxima igual a 331,74 ind./ha representa o limiar entre a máxima produção total e individual, considerando o máximo D_q atingível pelos clones avaliados. No entanto, a escolha da densidade mais adequada dependerá da relação entre a maximização da produção volumétrica com base na unidade de área e a maximização do crescimento e do volume das árvores individuais (LONG, 1985, VALBUENA et al., 2008), além da definição prévia do D_q desejável para os objetivos do manejo.

Face ao seu bom desempenho, o modelo VI foi utilizado para a proposição de um Índice de Densidade do Povoamento (IDP), baseado no Índice de Densidade de Reineke, conforme a reformulação algébrica que se segue, visando a padronização do nível de estoque do povoamento e, consequentemente, a orientação do manejo da densidade.

$$N = \alpha + (\beta - \alpha) \exp[-\exp(\gamma)D_q] \quad (15)$$

$$IDP = \alpha + (\beta - \alpha) \exp[-\exp(\gamma)25] \quad (16)$$

Isolando o parâmetro β na equação 15, tem-se:

$$\beta = \frac{(N - \alpha)}{\exp[-\exp(\gamma)D_q]} + \alpha \quad (17)$$

Substituindo 17 em 16, tem-se:

$$IDP = \alpha + \frac{(N - \alpha) \exp[-\exp(\gamma)25]}{\exp[-\exp(\gamma)D_q]} \quad (18)$$

A partir da equação 18 realizou-se o cálculo do IDP para cada unidade amostral, que variou entre 759,63 ind./ha e 938,74 ind./ha. Este índice está intrinsecamente relacionado ao parâmetro α , o que explica a baixa variação observada entre os valores calculados.

A interpretação do IDP está aliada ao conceito da máxima densidade permitida para que D_q seja igual a 25 cm. Tal como o Índice de Densidade de Reineke, o IDP reflete apenas uma condição teórica de padronização biométrica da floresta, diferindo do primeiro apenas por representar a densidade máxima que poderá ocorrer em um dado povoamento com $D_q = 25$ cm. Portanto, não deve ser interpretado como densidade de referência para que se atinja o valor de D_q especificado, pois não há garantias de que o povoamento sob esta condição de aglomeração se situará na zona ótima de manejo definida por Drew e Flewelling (1977, 1979).

Por outro lado, sugere-se que a aplicação do IDP consista na identificação dos povoamentos intensamente subestocados, os quais são caracterizados por apresentar $IDP < \alpha$. Em tais povoamentos observa-se uma densidade de plantas muito inferior ao esperado para a idade e biomassa (D_q) que apresentam, de modo que a competição é um fenômeno pouco expressivo até que atinja o valor de D_q especificado (25 cm). Tais observações representam 5,12% do total de unidades amostrais (31 parcelas).

Diante do exposto, é necessário ressaltar a importância da construção de Diagramas de Manejo da Densidade para a definição dos cronogramas de desbaste, já que representam ferramentas úteis e precisas para a identificação dos momentos ideais para as intervenções e a realização de projeções do volume e

do diâmetro quadrático médio remanescentes, maximizando assim a eficiência econômica (NEWTON, 2009). Entretanto, ressalta-se que a decisão pela realização do desbaste deverá avaliar os custos com a operação, a disponibilidade de mercado consumidor e o retorno financeiro do produto (DEAN; BALDWIN, 1993).

4 CONCLUSÕES

As principais conclusões deste estudo são:

- a utilização do coeficiente $-1,605$ encontrado por Reineke (1933) para a identificação das unidades amostrais mais próximas da situação de máxima de competição, conforme a metodologia proposta neste trabalho, se mostrou adequada;
- o modelo VI poderá substituir o modelo I em estudos desta natureza, já que apresentou melhoria no ajuste e maior informação biológica na interpretação dos seus parâmetros, o que contribui com uma análise mais rica do limite superior da zona de máxima competição. No entanto, comparações com outros trabalhos ficam prejudicadas em função de sua estrutura diferenciada;
- recomenda-se a realização de estudos mais aprofundados, que contemplem maior diversidade de espécies e clones do gênero *Eucalyptus*, visando à confirmação ou rejeição das hipóteses identificadas neste estudo a respeito da generalidade do coeficiente de Reineke e da lei de autodesbaste;
- o Índice de Densidade do Povoamento construído a partir do modelo VI pode ser considerado de fácil utilização, sendo eficiente na identificação das áreas intensamente subestocadas. Entretanto, seu uso não dispensa a construção de Diagramas de Manejo da Densidade, que auxiliaram na definição dos cronogramas das intervenções com maior precisão e riqueza de informações ao tomador de decisão.

REFERÊNCIAS

AIKMAN, D. P.; WATKINSON, A. R. A model for growth and self-thinning in even-aged monocultures of plants. **Annals of Botany**, v. 45, n. 4, p. 419-427, abr. 1980.

ASSMANN, E. **Waldetragskunde**. München: BLV Verlagsgesellschaft, 1961. 435p.

AVERY, T. E.; BURKHART, H.E. **Forest measurements**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1983. 331p.

BAILEY, R.L. **Development of unthinned stands of *Pinus radiata* in New Zealand**. 1972. 73 f. PhD Thesis (Ph. D.). University of Athens, Athens, Greece, 1972.

BI, H.; WAN, G.; TURVEY, N. D. Estimating the self-thinning boundary line as a density-dependent stochastic biomass frontier. **Ecology**, v. 81, n. 6, p. 1477-1483, jun. 2000.

CALEGARIO, N.; CALEGARIO, C. L. L.; MAESTRI, R.; DANIELS, R. Melhoria da qualidade de ajuste de modelos biométricos florestais pelo emprego da teoria dos modelos não lineares generalizados. **Scientia Florestalis**, v. 69, p. 38-50, dez. 2005

CLUTTER, J.L.; FORTSON, J.C.; PIENAAR, L.V.; BRISTER, G.H.; BAILEY, R.L. **Timber management: a quantitative approach**. New York: John Wiley & Sons, 1983. 333p.

COMEAU, P. G.; WHITE, M.; KERR, G.; HALE, S. E. Maximum density-size relationship for Sitka spruce and coastal Douglas-fir in Britain and Canada. **Forestry**, v. 83, n. 5, p. 461-468, dez. 2010.

CURTIS, R. O. A tree area power function and related stand density measures for Douglas-fir. **Forest Science**, v. 17, n. 1, p. 146-159, jun. 1971.

CURTIS, R. O. Stand density measures: an interpretation. **Forest Science**, v. 16, n. 4, p. 403-414, dez. 1970.

DEAN, T. J. BALDWIN, C. **Using a density-management diagram to develop thinning schedules for loblolly pine plantations**. New Orleans: USDA Forest Service. Research Paper, ago. 1993.

DREW, T.J.; FLEWELLING, J.W. Some recent theories of yield-density relationship and their application to Monterey pine plantations. **Forest Science**, v. 23, n. 4, p. 517-534, dez. 1977.

DREW, T.J.; FLEWELLING, J.W. Stand density management: an alternative approach and its application to Douglas-fir plantations. **Forest Science**, v.25, n. 3, p. 518-530, set. 1979.

EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA. EMBRAPA. **Sistema brasileiro de classificação de solos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Embrapa Solos, 2006. 306p. il.

GINGRICH, S.F. Measuring an evaluating stocking and stand density in upland hardwood forests in the Central States. **Forest Science**, v. 13, n. 1, p. 38-53, mar. 1967.

GREGOIRE, T. G.; SCHABENBERGER, O.; BARRETT, J. P. Linear modeling of irregularly spaced, unbalanced, longitudinal data from permanent-plot measurements. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 25, n. 1, p. 137-156, jan. 1995.

GRUSCHOW, G.F.; EVANS, T.C. The relation of cubic-foot volume growth to stand density in young slash pine stands. **Forest Science**, v. 5, n. 1, p. 49-55, mar. 1959.

HARPER, J.L. **Population biology of plant**. New York: Academic Press, 1977. 892p.

HUSCH, B.; MILLER, C.I.; BEERS, T.W. **Forest mensuration**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1982. 402p.

HYNYNEN, J. Self-thinning models for even-aged stands of *Pinus sylvestris*, *Picea abies*, and *Betula penula*. **Scandinavian Journal of Forest Research**, v. 8, p. 326-336, 1993.

JACK, S.B.; LONG, J.N. Linkages between silviculture and ecology: an analysis of density management diagram. **Forest Ecology and Management**, v. 86, n. 1-3, p. 205-220, out. 1996.

KEENEY, R.; RAIFFA, H. **Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs**. New York: John Wiley & Sons, 1976. 544p.

KIKUZAWA, K. Theoretical relationships between mean plant size, size distribution and self thinning under one-sided competition. **Annals of Botany**, v. 83, n. 1, p. 11-18, jan. 1999.

KURINOBU, S.; ARISMAN, H.; HARDIYANTO, E.; MIYAURA, T. Growth model for predicting stand development of *Acacia mangium* in South Sumatra, Indonesia, using the reciprocal equation of size-density effect. **Forest Ecology and Management**, v. 228, n. 1-3, p. 91-97, jun. 2006.

LI, B. L.; WU, H. ZOU, G. Self-thinning rule: a causal interpretation from ecological field theory. **Ecological Modelling**, v. 132, n. 1-2, p. 167-173, jul. 2000.

LITTELL, R. C.; HENRY, P. R.; AMMERMAN, C. B.; Statistical analysis of repeated measures data using SAS procedures. **Journal of Animal Science**, v. 76, n. 4, p. 1216-1231, abr. 1998.

LONG, J. N. A practical approach to density management. **Forestry Chronicle**, v. 61, n. 1, p. 23-27, fev. 1985.

MABVURIRA, D.; MIINA, J. Individual-tree growth and mortality models for *Eucalyptus grandis* (Hill) Maiden plantations in Zimbabwe. **Forest Ecology and Management**, v. 161, n. 1-3, p. 231-245, mai. 2002.

MACARDLE, R.E.; MEYER, W.H.; BRUCE, D. **The yield of Douglas-fir in the Pacific Northwest**. Washington: USDA Forest Service. Technical Bulletin, 1961. 74p.

MACKINNEY, A.; CHAIKEN, L.E. **A method of determining density of loblolly pine stands**. Asheville: USDA Forest Service, Appalachian Forest Experimental Station. Technical Note, v. 15, 1935. 3p.

MATTHEW, C.; LEMAIRE, G.; SACKVILLE-HAMILTON, N. R.; HERNANDEZ-GARAY, A. A modified self-thinning equation to describe size/density relationships for defoliated swards. **Annals of Botany**, v. 76, n. 6, p. 579-587, dez. 1995.

MORRIS, EC.; MYERSCOUGH, P.J. Self-thinning and competition intensity over a gradient of nutrient availability. **Journal of Ecology**, v. 79, n. 4, p. 903-923, dez. 1991.

NEWTON, P. F. Development of an integrated decision-support model for density management within jack pine stand-types. **Ecological Modelling**, v. 220, n. 23, p. 3301-3324, dez. 2009.

PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; MIINA, J.; MONTERO, G. Individual-tree growth and mortality models for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in north-east Spain. **Annals of Forest Science**, v. 60, n. 1, p. 1-10, jan./fev. 2003.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. New York: Springer-Verlag, 2000. 528p.

PRETZSCH, H. Species-specific allometric scaling under self-thinning: evidence from long-term plots in forest stands. **Oecologia**, v. 146, n. 4, p. 572-583, jan. 2006.

PUETTMANN, K.J., HAMS, D.W.; HIBBS, D.E. Evaluation of the size-density relationships for pure red alder and Douglas- fir stands. **Forest Science**, v. 39, n. 1, p. 7-27, fev. 1993.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. ISBN 3-900051-07-0, URL: <http://www.R-project.org>. 2010.

Código de campo alterado

RATKOWSKY, D. A. **Handbook of nonlinear regression models**. New York: Marcel Dekker, 1990. 241p.

REID, R. Diameter-basal area ratio as a practical stand density measure for pruned plantations. **Forest Ecology and Management**, v. 233, n. 2-3, p. 375-382, set. 2006.

REINEKE, L. H. Perfecting a stand-density index for even-aged forests. *Journal of Agricultural Research*, v 46, n. 7, p. 627-638, abr. 1933.

RÍO, M. del; MONTERO, G.; BRAVO, F. Analysis of diameter-density relationships and self-thinning in non-thinned even-aged Scots pine stands. **Forest Ecology and Management**, v. 142, n. 1-3, p. 79-87, mar. 2001.

SACKVILLE-HAMILTON, N. R.; MATTHEW, C.; LEMAIRE, G. In defense of the -3/2 boundary rule: a re-evaluation of self-thinning concepts and status. **Annals of Botany**, v. 76, n. 6, p. 569-577, dez. 1995.

SALES-LUIS, J.; FONSECA, T. F. The allometric model in the stand density management of *Pinus pinaster* Ait. in Portugal. **Annals of Forest Science**, v. 61, n. 8, p. 807-814, dez. 2004.

SCHUMACHER, F. X.; HALL, F. S. Logarithmic expression of timber tree. **Journal of Agricultural Research**, v. 47, n.9, p. 719-734, 1933.

SENA, A.L.M.; SILVA-NETO, A. L. da; OLIVEIRA, G.M.V.; CALEGARIO, N. Modelos lineares e não-lineares para relação hipsométrica de duas espécies de *Pinus* tropicais. **Ciência Florestal** (no prelo).

SMITH, N.J.; HANN, D.W. A new analytical model based on the -3/2 power rule of self-thinning. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 14, n. 5, p. 605-609, out. 1984.

SPURR, S.H.; YOUNG, L.J.; BARNES, B.V.; HUGHES, E.L. Nine successive thinning in a Michigan white pine plantation. **Journal of Forestry**, v. 55, n. 1, p. 7-13, jan. 1957.

TEWARI, V. P.; Stand density and basal area prediction of unthinned irrigated plantations of *Eucalyptus camaldulensis* in the hot desert of India. **Biosource Technology**, v. 98, n. 5, p. 1106-1114, mar. 2007.

VALBUENA, P.; PESO, C. del; BRAVO, F. Stand density management diagrams for two Mediterranean pine species in Eastern Spain. **Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales**, v. 17, n. 2, p. 97-104, 2008.

WELLER, D. E. A reevaluation of the $-3/2$ power rule of plant self-thinning. **Ecological Monographs**, v. 57, n. 1, p. 23-43, mar. 1987.

WHITE, J.; HARPER, J.L. Correlated changes in plant size and number in plant populations. **Journal of Ecology**, v. 58, n. 2, p. 467-485, jul. 1970.

YODA, K.; KIRA, T.; OGAWA, H.; HOZUMI, K. Intraspecific competition among higher plants. XI. Self thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural conditions. **Journal of Biology**, v. 14, p. 107-129, 1963.

ZEIDE, B. How much space does a seedling need? **Forest Ecology and Management**, v. 11, n. 3, p. 225-229, jul. 1985.

ZEIDE, B. Self-thinning and stand density. **Forest Science**, v. 37, n. 2, p. 517-523, jun. 1991.

CAPÍTULO 3

PREDIÇÃO DA PRODUTIVIDADE DE SORTIMENTOS A PARTIR DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA APLICADA A DADOS DE AFILAMENTO DE FUSTES

RESUMO

Este trabalho objetiva avaliar a distribuição normal bivariada para modelar a densidade conjunta dos diâmetros a várias alturas do fuste e estimar os sortimentos com base na distribuição de probabilidade de ocorrência dos produtos madeireiros. Foram utilizados os dados provenientes da cubagem rigorosa de 1.731 indivíduos clonais de *Eucalyptus sp.*, com idades variando entre 2 e 7,5 anos, mensurando os diâmetros nas seguintes posições: 0,5% (diâmetro da base), 1%, 5%, 10%, 15%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90% e 95% da altura total, totalizando 14 medições por árvore. Os dados foram normalizados pela função de Box-Cox e os parâmetros da função normal bivariada (μ e Σ) foram determinados pelos estimadores de máxima verossimilhança (\bar{X} e S , respectivamente). A partir do ajuste do modelo polinomial de 5º grau para descrição do perfil dos fustes foram obtidos os diâmetros nas alturas dos sortimentos pré-definidos para as árvores mensuradas no inventário florestal contínuo, visando à comparação com as estimativas probabilísticas fornecidas por meio da distribuição normal bivariada. A função normal bivariada se mostrou inadequada, pois, de modo geral, forneceu subestimativas do número de toras localizadas na base e na porção média das árvores para as menores classes diamétricas e superestimativas nas porções mais elevadas dos fustes e nas classes de diâmetros maiores. Os principais fatores que podem estar associados ao mau desempenho desta distribuição são a ineficiência da equação de Box-Cox para normalização dos dados e a existência de correlação entre os diâmetros e as alturas mensurados em cada indivíduo. Recomenda-se, portanto, que sejam avaliadas outras funções bivariadas, tais como a Weibull e Gamma, para descrever a distribuição conjunta dos diâmetros a várias alturas do fuste. Estas funções possuem grande aplicação prática na área florestal, tendo em vista que conferem maior agilidade e facilidade na estimativa dos múltiplos produtos florestais, já que dispensam os procedimentos de integração das funções de afilamento.

Palavras-chave: Função densidade de probabilidade bivariada. Distribuição conjunta. Múltiplos produtos florestais. Estimativa probabilística.

ABSTRACT

This study presents the evaluation of the bivariate normal distribution as the joint density of diameters at various heights of the stem and its use to estimate assortments based on the probability distribution of timber products. A real data set from 1,731 tape measured clonal *Eucalyptus sp.* trees aged between 2 and 7.5 years was used. It was measured the diameters in the following positions: 0.5% (base diameter), 1%, 5%, 10%, 15%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90% and 95% of the total height, totaling 14 measurements per tree. The bivariate data matrix was normalized by Box-Cox equation and the bivariate normal function parameters (μ and Σ) were determined by the maximum likelihood estimators (\bar{X} and S , respectively). A 5th degree polynomial model was fitted as taper function and used to obtain the top diameters of the assortments for the trees measured in continuous forest inventory and then, the number of logs in each dimension class. Therefore, it was possible to compare with the probabilistic estimates provided by the bivariate normal. The bivariate normal function proved inadequate because, in general, underestimate the number of logs at the base and middle portion of the trees to the smallest diameter classes and overestimate the higher portions of the stems and the larger diameter classes. The main factors that may be associated with poor performance of this distribution are the inefficiency of the Box-Cox normalization process and the correlation between the diameters and heights measured in each individual. It is recommended, therefore, to evaluate other bivariate functions, such as the Weibull and Gamma distributions, to model the joint distribution of the diameters at different heights of the stem. These functions have practical application in forestry in order to provide greater agility and ease in the estimation of multiple forest products, since they excuse taper functions integration.

Key-words: Bivariate probability density function. Joint distribution. Multiple forest products. Probabilistic estimate.

1 INTRODUÇÃO

A diversificação da produção madeireira representa uma alternativa viável para aumentar o valor agregado das florestas, garantir a geração contínua de renda e reduzir os riscos da atividade florestal. Para tal, é necessário realizar o manejo dos povoamentos visando a oferta diversificada de produtos madeireiros destinados aos mais variados fins, aumentando assim a eficiência da produção florestal e do uso e ocupação do solo.

Um dos elementos mais importantes para o cumprimento deste objetivo é o conhecimento da forma das árvores e da relação de afilamento dos fustes, sobretudo a partir da representação da forma média do tronco por meio de funções estocásticas que permitem estimar o diâmetro em qualquer posição do fuste e, conseqüentemente, o volume de toras individuais dimensionadas segundo as preferências do mercado consumidor.

O estudo do afilamento do tronco é comumente realizado a partir da análise de regressão linear, por meio de funções polinomiais em que a variável dependente é dada pelo quadrado da razão entre os diâmetros superiores e o diâmetro a altura do peito (*DAP*), medido a 1,30 m do solo; ou não-linear, por meio de funções sigmoidais, normalmente derivadas da função de Chapman-Richards e que possuem grande flexibilidade para o ajuste de diversas relações biológicas (PIRES; CALEGARIO, 2007).

Por outro lado, o estudo das relações simultâneas entre o diâmetro e as alturas ao longo do fuste por meio de técnicas de análise multivariada ainda é muito incipiente, podendo ser citados apenas os trabalhos de Fries e Matern (1966) e Guimarães e Leite (1992) que utilizaram análise de componentes principais para investigar as variações na estrutura dos dados e, assim, definir o modelo de regressão mais adequado para descrever o perfil das árvores.

Entretanto, esta técnica não pressupõe inferências sobre a distribuição multivariada dos dados.

Nos últimos anos, cresce o interesse pela utilização de funções densidade de probabilidade (f.d.p.) multivariadas para descrever a distribuição de frequência simultânea das principais variáveis biométricas que são mensuradas no povoamento florestal (diâmetro a altura do peito – DAP , altura total – H_T , volume individual – v , etc.), tendo em vista a necessidade de análises mais robustas e informativas a respeito dos padrões estruturais da floresta visando à compreensão do seu potencial produtivo e econômico. Destacam-se os trabalhos de Li et al. (2002), Rupsys e Petruskas (2009), Schreuder e Hafley (1977), Tewari e Gadow (1999), Wang e Rennolls (2007), Zucchini et al. (2001) que propuseram o ajuste das distribuições bivariadas S_{BB} Johnson, Beta Generalizada, Lognormal e Gompertz pelo método da máxima verossimilhança para modelar a densidade conjunta do DAP e da H_T das árvores.

Outros métodos têm sido utilizados para viabilizar a aplicação de distribuições multivariadas em povoamentos florestais. Wang et al. (2008) construíram um modelo de distribuição bivariado para o DAP e a H_T a partir do uso de *copula* (função matemática que une duas ou mais distribuições marginais, modelando a correlação entre elas, a fim de formar uma distribuição multivariada). Wang et al. (2010) utilizaram a mesma técnica para desenvolver um modelo trivariado para o DAP , a H_T e o v de modo a estimar o volume individual a partir da distribuição condicional de v , dados $DAP = dap$ e $H_T = h_t$. Destaca-se ainda o trabalho desenvolvido por Uusitalo e Kivinen (1998) que desenvolveram um modelo de distribuição bivariado para o DAP e a altura de inserção do primeiro galho morto a partir do método *kernel* bivariado, a fim de avaliar a relação entre o tamanho dos indivíduos e a qualidade das toras.

Diante do exposto, considerando a importância do estudo da relação de afilamento das árvores para o manejo florestal voltado aos múltiplos produtos

madeireiros, bem como a crescente utilização de distribuições multivariadas na área florestal, este trabalho objetiva avaliar a adequação da distribuição normal bivariada para modelar a densidade conjunta dos diâmetros a várias alturas do fuste e propor aplicações práticas voltadas à melhoria dos métodos de estimativa dos sortimentos com base na distribuição de probabilidade de ocorrência dos mesmos.

2 METODOLOGIA

2.1 Caracterização da área de estudo

O estudo foi conduzido em cerca de 25.500 ha de reflorestamento pertencente à International Paper, localizados em duas regiões administrativas: Região 2 situada na região norte do estado de São Paulo (mesoregião de Ribeirão Preto) e Região 3 posicionada no extremo sul de Minas Gerais (mesoregião Sul/Sudoeste) (Figura 1).

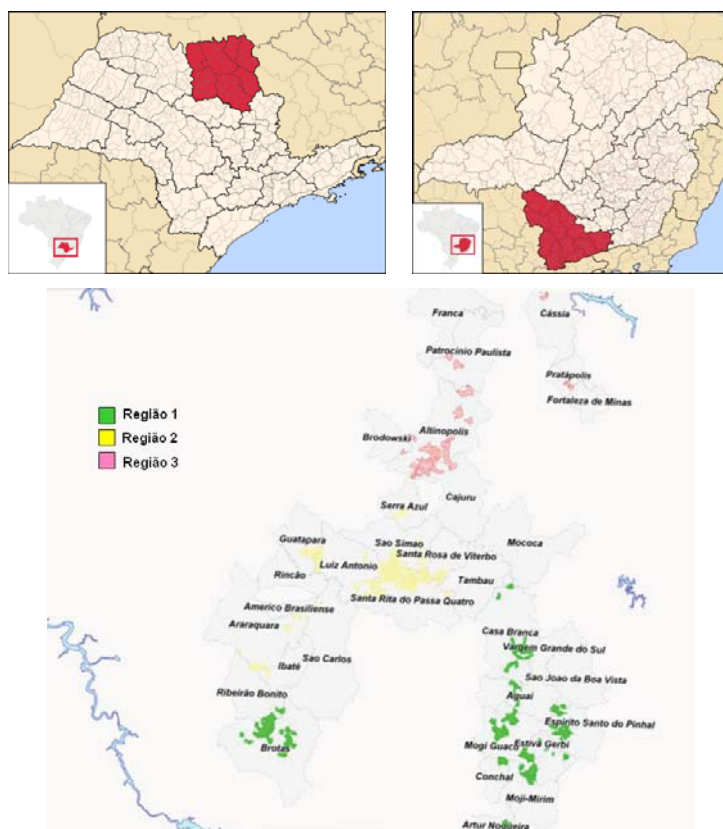


Figura 1 Localização da área de estudo

Nas regiões estudadas são identificados os climas Aw e Cwa segundo a classificação de Köppen. A temperatura e a precipitação média anual variam entre 20 e 23°C e 1.300 e 1.600 mm, respectivamente. De modo geral, verifica-se uma variabilidade climática de um a três meses secos, sendo que no período mais seco, de abril a setembro, a precipitação média não ultrapassa 300 mm. As unidades de manejo florestal localizam-se na zona de transição entre os biomas Cerrado e Mata Atlântica, de acordo com o mapa da vegetação brasileira.

Predominam na região o neossolo quartzarênico álico e o latossolo vermelho-amarelo álico, de textura média a argilosa (EMBRAPA, 2006), sob relevo aplainado ou suavemente ondulado.

Os povoamentos estudados são submetidos ao regime de alto fuste visando à produção de madeira para celulose. Foram analisados 12 tipos diferentes de material genético, que englobam desde híbridos clonais de *Eucalyptus grandis* x *E. urophylla*, até clones puros destas espécies e de *E. camaldulensis*, *E. tereticornis* e *E. globulus*, implantados conforme seis espaçamentos iniciais: 3 x 2 m; 3 x 2,5 m; 3 x 2,75 m; 3 x 3 m; 3,3 x 2,5 m e 3,6 x 2,5 m. A colheita mecanizada é realizada aos 6 e 7 anos de idade.

2.2 Base de dados

Os dados são provenientes do inventário florestal contínuo realizado em 605 unidades amostrais aleatórias de área variável (300 a 460 m²), distribuídas em 126 talhões com idade variando entre 1 e 7 anos, sendo uma unidade amostral monitorada aos 10,7, 12,6 e 14,0 anos de idade localizada em um único talhão. Foram mensurados a altura total (HT) de algumas árvores e o diâmetro a altura do peito (DAP), medido a 1,30 m do solo, de todos os indivíduos com DAP ≥ 5 cm. As alturas totais das demais árvores foram obtidas por meio do ajuste de um modelo hipsométrico, conforme descrito no item 4.3 do Capítulo 2.

A partir destas informações, em cada unidade amostral foram obtidas as seguintes variáveis do povoamento: idade (I); número de árvores por hectare (N); diâmetro quadrático médio (D_q); diâmetro médio (DAP); altura média (HT); altura dominante e codominante média (HDC) segundo o conceito proposto por Assmann (1961); índice de sítio (S); volume médio das árvores individuais (\bar{v}) e volume total em m³/ha (V). A síntese das estatísticas descritivas referentes a essas variáveis é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 Síntese das estatísticas descritivas correspondentes à amostra de parcelas e árvores utilizadas para o desenvolvimento dos modelos

Variável	Média	Desvio-padrão	Mínimo	Máximo
I	3,98	1,70	1,35	13,99
N	1142,68	269,46	467,29	3300,00
D_q	12,43	2,88	5,62	20,64
DAP	12,26	2,81	5,58	20,46
HT	17,75	4,97	7,02	30,05
HDC	19,43	5,29	7,95	31,55
S	25,18	3,24	10,07	39,82
\bar{v}	0,11	0,08	0,01	0,44
V	128,15	89,02	3,66	628,05

Ademais, foram utilizados os dados provenientes da cubagem rigorosa realizada em 1.731 indivíduos aleatoriamente amostrados, com idades variando entre 2 e 7,5 anos. Foram mensurados o DAP, a altura total e os diâmetros a diferentes alturas do fuste comercial. Os diâmetros foram mensurados nas posições correspondentes a 0,5% (diâmetro da base), 1%, 5%, 10%, 15%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90% e 95% da altura total, totalizando 14 medições por árvore.

2.3 Função de afilamento

A partir dos dados obtidos na cubagem rigorosa foi possível estabelecer funções de afilamento, ou “*taper*”, com a finalidade de descrever o perfil dos fustes. As variações do afilamento das árvores amostradas por classe de idade e clone são apresentadas na Figura 2.

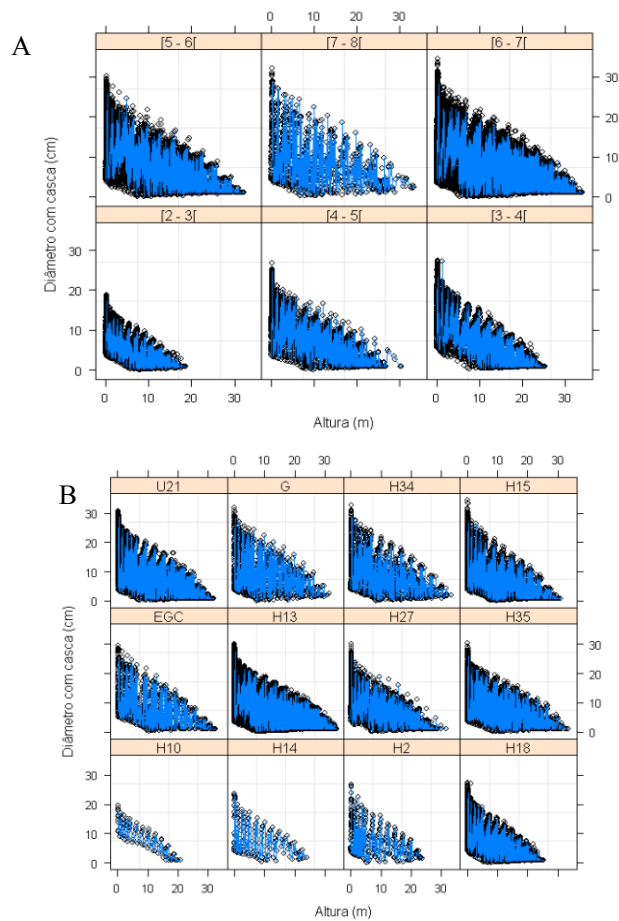


Figura 2 Variação do perfil das árvores amostradas, por classe de idade (A) e material genético (B)

Para a modelagem do perfil foi utilizado o modelo polinomial de 5º grau (SCHOEPFER, 1966), conforme descrito na equação 1. Foram avaliados os efeitos das covariáveis Idade, Produtividade do sítio (expressa por \overline{HDC}) e Clone nos parâmetros correspondentes ao intercepto (β_0) e inclinação (β_1), utilizando para tal a teoria dos modelos lineares generalizados.

$$\left(\frac{d_{ij}}{DAP_i}\right)^2 = \left(\beta_{00} + \beta_{01}I_i + \beta_{02}\overline{HDC}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{12} \beta_{0k}Cl_{ik}\right) + \quad (1)$$

$$\left(\beta_{10} + \beta_{11}I_i + \beta_{12}\overline{HDC}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{12} \beta_{1k}Cl_{ik}\right) \left(\frac{h_{ij}}{HT_i}\right) + \beta_2 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i}\right)^3 + \beta_4 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i}\right)^4$$

$$+ \beta_5 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i}\right)^5 + \varepsilon_i$$

Em que:

d_{ij} é o diâmetro da árvore i na posição j (cm);

DAP_i é o diâmetro a altura do peito (cm), medido a 1,30 m do solo, da i -ésima árvore;

I_i é a idade da i -ésima árvore em anos;

\overline{HDC}_i é a altura dominante e codominante média da i -ésima árvore, obtida a partir da n -ésima unidade amostral (m);

Cl_{ik} é o k -ésimo clone (material genético) da i -ésima árvore;

h_{ij} é a posição j no fuste comercial da i -ésima árvore, relativa a um percentual da altura total;

HT_i é a altura total (m) da i -ésima árvore;

β_{pp} são os parâmetros a serem estimados; ε_i é o erro aleatório.

A partir do rearranjo do modelo polinomial (equação 2), foram estimados os diâmetros a diferentes alturas das árvores amostradas no Inventário Florestal, totalizando 48.568 indivíduos em 605 unidades amostrais. Foram obtidos os diâmetros nas posições correspondentes às alturas dos sortimentos que poderão ser extraídos do povoamento florestal, cujas dimensões estão apresentadas na Tabela 2, adaptada de Campos e Leite (2006).

$$d_{ij} = \left[\begin{array}{l} \left(\beta_{00} + \beta_{01}I_i + \beta_{02}\overline{HDC}_i + \sum_{k=1}^{12} \beta_{0k}Cl_{ik} \right) + \\ \left(\beta_{10} + \beta_{11}I_i + \beta_{12}\overline{HDC}_i + \sum_{k=1}^{12} \beta_{1k}Cl_{ik} \right) \left(\frac{h_{ij}}{HT_i} \right) + \beta_2 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i} \right)^3 \\ + \beta_4 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i} \right)^4 + \beta_5 \left(\frac{h_{ij}}{HT_i} \right)^5 \end{array} \right] DAP_i \quad (2)$$

Tabela 2 Dimensões mínimas dos múltiplos produtos madeireiros, adaptado de Campos e Leite (2006)

Produto	Dimensões	
	$h_{\min.}$ (m)	$d_{\min.}$ (cm)
Serraria	3,5	25,0
Celulose	2,5	8,0
Energia	2,0	3,0
Poste 1	9,0	15,4
Poste 2	13,0	15,4

2.4 Técnicas de ajuste e critérios de avaliação dos modelos

A função de afilamento proposta anteriormente foi ajustada pelo método da máxima verossimilhança, utilizando como recurso computacional o pacote

nlme do software estatístico R[®] 2.11.1 (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010).

De modo a garantir a pressuposição de homocedasticidade foi realizada uma correção na estrutura de variância dos resíduos ε_i do modelo (1), conforme proposto por Gregoire et al. (1995), Littel et al. (1998) e Pinheiro e Bates (2000).

Para o ajuste da heterocedasticidade foi utilizada a função de variância “*varPower*” (7). Segundo Pinheiro e Bates (2000), a variância pode ser modelada por:

$$Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 |v_{ij}|^{2\delta} \quad (3)$$

que corresponde à seguinte função de variância:

$$g(v_{ij}, \delta) = |v_{ij}|^\delta \quad (4)$$

O modelo foi avaliado pela análise gráfica dos resíduos padronizados e segundo as seguintes estatísticas:

Erro-padrão residual (S_{yx}) e percentual (S_{yx} (%)):

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p}} \quad (5)$$

$$S_{yx}(\%) = \frac{S_{yx}}{\bar{Y}} \times 100 \quad (6)$$

Em que:

S_{yx} é o erro padrão da estimativa na unidade da variável resposta;

Y_i é a variável dependente observada;

\hat{Y}_i é a variável regressora estimada pelo modelo;

n é o número de observações; p é o número de parâmetros do modelo;

S_{yx} (%) é o erro padrão percentual;

\bar{Y} é a média da variável dependente observada.

Critério de Informação de Akaike (AIC):

$$AIC = -2 \ln(mv) + 2p \quad (7)$$

Em que:

\ln é o logaritmo neperiano;

mv é o valor da função de verossimilhança;

p é o número de parâmetros do modelo.

Critério de Informação Bayesiano (BIC):

$$BIC = -2 \ln(mv) + p \ln(n) \quad (8)$$

Em que:

\ln é o logaritmo neperiano;

mv é o valor da função de verossimilhança;

p é o número de parâmetros do modelo;

n é o número total de observações.

2.5 Distribuição bivariada

Para a construção da função densidade de probabilidade para a relação entre h_{ij} e d_{ij} , as informações obtidas na cubagem rigorosa foram organizadas na forma de um conjunto bivariado de dados de modo a obter a matriz X de dimensões $(n \times 2)$, em que x_{n1} e x_{n2} representam, respectivamente, as realizações das variáveis h_{ij} e d_{ij} , ou seja, os diâmetros mensurados a várias alturas (j posições do fuste) nas i árvores da amostra.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Em que:

x_{np} são os elementos da matriz X , onde n corresponde às linhas e p às colunas, representando as alturas ($p = 1$) e os diâmetros ($p = 2$) estimados para cada árvore presente nas unidades amostrais.

A independência estatística foi garantida pela aleatorização no processo de amostragem. Entretanto, a possível existência de correlação espacial entre as medidas d_{ij} e h_{ij} em cada indivíduo foi desconsiderada neste estudo.

O teste de Shapiro-Wilk generalizado e o gráfico qui-quadrado (*chi-square plot*), descritos por Johnson e Wichern (2002) e Ferreira (2008), foram utilizados para a avaliação da normalidade multivariada da matriz X .

O gráfico qui-quadrado é uma generalização do procedimento gráfico utilizado na verificação de normalidade univariada (Q-Q plots), tendo em vista que a distância quadrática $L^2 = (X_j - \bar{X}_j)^T S^{-1} (X_j - \bar{X}_j)$ possui distribuição

assintótica Qui-quadrado com p graus de liberdade, caso a variável \mathbf{X} seja normal multivariada $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (JOHNSON; WICHERN, 2002). Este procedimento pode ser igualmente utilizado para a identificação de “outliers”, representados pelos pontos mais distantes da origem (JOHNSON; WICHERN, 2002). Estes testes foram implementados com auxílio dos pacotes *mvShapiroTest* e *mvoutlier* do software R[®] 2.11.1.

Para o caso de rejeição da hipótese nula de normalidade bivariada, sugeriu-se a aplicação da transformação de Box-Cox na variável que não apresentou densidade marginal normal. Para tal, foi utilizado o pacote *car*. A transformação de Box-Cox é descrita pela expressão:

$$y^{(\lambda)} = \frac{(y^\lambda - 1)}{\lambda} \quad (10)$$

Em que:

y é a variável a ser transformada;

λ é o coeficiente da transformação de Box-Cox, que varia entre -1 e 1;

$y^{(\lambda)}$ é a variável resultante da transformação de Box-Cox.

Após a normalização dos dados, a função densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta das $p = 2$ variáveis dispostas no vetor aleatório $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$ é definida por:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (11)$$

Sendo assim, as variáveis aleatórias h_{ij} e d_{ij} são identicamente distribuídas e, caso a matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ seja diagonal, ou

seja, com covariâncias nulas, estas variáveis serão também independentes, implicando em:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p f(x_i) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left(\prod_{i=1}^p \sigma_{ii} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^p \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_{ii}} \right\} \quad (12)$$

Os parâmetros da função normal bivariada apresentada na equação 11 foram determinados pelos estimadores de máxima verossimilhança (JOHNSON; WICHERN, 2002), derivados da maximização da função de verossimilhança descrita na equação 13:

$$L(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{j=1}^n f(\mathbf{X}_j) = (2\pi)^{-\frac{n p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (13)$$

O máximo desta função é obtido a partir das derivadas parciais de primeira ordem em relação a $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$. O logaritmo da função de verossimilhança pode ser utilizado como função suporte, considerando que o máximo de ambas as funções são exatamente os mesmos, já que a função logaritmo é monótona crescente. Desta forma tem-se:

$$g(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \ln[L(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})] = -\frac{n p}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}) \quad (14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}) \quad (15)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{n}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{(n-1)}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{S} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{n}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) (\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \quad (16)$$

Igualando as expressões 15 e 16 a zero e resolvendo o sistema com as devidas substituições, obtêm-se facilmente os estimadores de máxima verossimilhança de μ e Σ por:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X} \quad (17)$$

$$n\hat{\Sigma} = (n-1)S = \hat{\Sigma} = \frac{(n-1)S}{n} = S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})^T \quad (18)$$

Entretanto, por S_n ser um estimador viesado de Σ , foi utilizado o estimador S , conforme descrito na equação 19¹:

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})^T = \frac{1}{n-1} X^T \left[I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right] X \quad (19)$$

Os estimadores \bar{X} e S apresentam propriedades importantes, tais como a invariância e a suficiência (JOHNSON; WICHERN, 2002). Além disso, tendo em vista os postulados do Teorema Central do Limite (TCL) e considerando que a amostra obtida neste estudo é suficientemente grande de modo que $n \rightarrow \infty$, estas estatísticas aproximam-se assintoticamente dos parâmetros populacionais μ e Σ .

O ajuste dos parâmetros da função normal bivariada (equação 11), tal como descrito anteriormente, foi executado por meio do pacote *ghyp* do software estatístico R[®] 2.11.1. A avaliação da qualidade do ajuste foi realizada através do

¹ Onde $Q = I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ é uma matriz simétrica e idempotente.

valor do logaritmo da máxima verossimilhança (MV) e do critério de informação AIC, que são fornecidos por este pacote.

A probabilidade dos sortimentos é representada pelo volume sob a curva, considerando os intervalos de altura (comprimento da tora) e das classes diamétricas do diâmetro da ponta mais fina da tora (Figura 3).

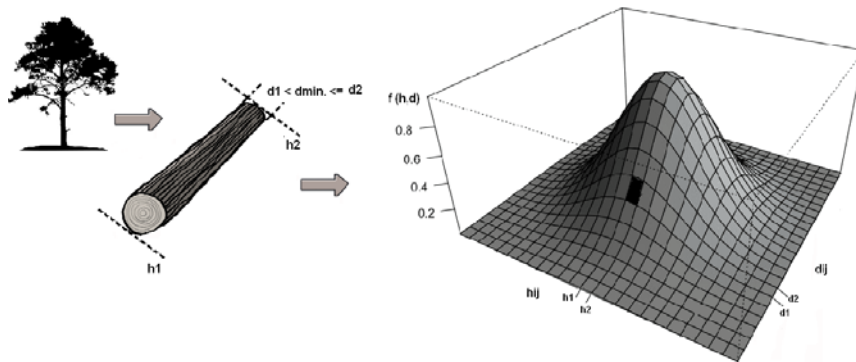


Figura 3 Representação gráfica da probabilidade de ocorrência (volume sob a curva) de uma tora com comprimento $h = h_2 - h_1$ e diâmetro da ponta mais fina ($d_{min.}$) inserido na classe intervalar $[d_2; d_1]$

O volume representado na Figura 2 foi obtido pelo somatório das integrais múltiplas da f.d.p. normal bivariada nos intervalos de interesse das variáveis h_{ij} e d_{ij} (equação 20), considerando as classes de altura e diâmetro construídas a partir das informações da Tabela 1.

$$p_i = \int_{-\infty}^{h_2} \int_{-\infty}^{d_2} f(h_{ij}, d_{ij}) - \int_{-\infty}^{h_1} \int_{-\infty}^{d_2} f(h_{ij}, d_{ij}) - \int_{-\infty}^{h_2} \int_{-\infty}^{d_1} f(h_{ij}, d_{ij}) + \int_{-\infty}^{h_1} \int_{-\infty}^{d_1} f(h_{ij}, d_{ij}) \quad (20)$$

Em que:

p_i é a probabilidade de ocorrência da tora i , com comprimento e diâmetro da ponta mais fina conhecidos;

h_1 é a altura em metros que corresponde à posição do fuste relativa a base da tora;

h_2 é a altura em metros que corresponde à posição do fuste relativa ao topo da tora h_1 , tal que o comprimento da tora h seja igual a $h = h_2 - h_1$; d_1 é o limite inferior da classe diamétrica do diâmetro da ponta mais fina da tora, em centímetros;

d_2 é o limite superior da classe diamétrica do diâmetro da ponta mais fina da tora, em centímetros; $f(h_{ij}, d_{ij})$ é a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis h_{ij} e d_{ij} , representada pela função normal bivariada.

A partir da estimativa da probabilidade foi possível obter o número de toras por hectare dos múltiplos produtos da seguinte forma:

$$N_T = p_i \times \bar{N} \quad (21)$$

Em que:

N_T é o número de toras com as dimensões especificadas;

\bar{N} é o número médio de indivíduos (total ou por hectare) obtido a partir do Inventário Florestal.

Esta estimativa foi comparada com o número de toras por hectare dos sortimentos estimados a partir da utilização da função de afilamento ajustada para estimar os diâmetros nas alturas determinadas.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Função de afilamento

O resultado da regressão linear para modelagem do perfil das árvores cubadas está apresentado na Tabela 3. Em geral, os parâmetros foram altamente significativos ao nível de significância igual a 5%, exceto o intercepto (β_{0p}) e a inclinação (β_{1p}) relacionados aos clones G, H10, H14 e U21, e a inclinação associada aos clones H2 e H35. Deste modo, o perfil das árvores pertencentes a essas procedências clonais não diferem estatisticamente dos valores médios estimados para estes parâmetros (β_{00} e β_{10} , respectivamente).

De acordo com a Tabela 3, infere-se ainda que a covariável idade afetou positivamente o intercepto e negativamente a inclinação, enquanto que para a covariável **HDC** observa-se efeito inverso nestes parâmetros. Em relação ao efeito da procedência genética, verifica-se que as árvores pertencentes aos clones H13, H15 e H18 possuem fustes com menor altura e maior taxa de afilamento. Os clones H27 e H34 podem ser considerados com maior aptidão para produção de madeira para serraria, tendo em vista que a análise do efeito do material genético sob o intercepto e a inclinação sugere árvores com maior altura e menor afilamento. O clone EGC pode ser considerado como o clone médio.

Tabela 3 Estimativas dos parâmetros do modelo polinomial de 5º grau e respectivas estatísticas de significância. Onde t_c é a estatística do teste t de Student

Parâmetros	Valores	Erro-padrão	t_c	p-valor
β_{00}	1,6654	0,0156	106,98	< 0,0001
β_{01}	0,0174	0,0026	6,80	< 0,0001
β_{02}	-0,0171	0,0011	-15,58	< 0,0001
β_{03} (Clone G)	0,0051	0,0078	0,66	0,5120
β_{04} (Clone H10)	-0,0332	0,0171	-1,94	0,0526
β_{05} (Clone H13)	-0,0383	0,0057	-6,71	< 0,0001
β_{06} (Clone H14)	-0,0054	0,0151	-0,36	0,7201
β_{07} (Clone H15)	-0,0312	0,0063	-4,92	< 0,0001
β_{08} (Clone H18)	-0,0424	0,0069	-6,16	< 0,0001
β_{09} (Clone H2)	0,0355	0,0114	3,12	0,0018
β_{010} (Clone H27)	0,0318	0,0066	4,84	< 0,0001
β_{011} (clone H34)	0,0257	0,0072	3,55	0,0004
β_{012} (Clone H35)	0,0136	0,0064	2,13	0,0334
β_{013} (Clone U21)	0,0080	0,0064	1,24	0,2158
β_{10}	-5,6727	0,0745	-76,17	< 0,0001
β_{11}	-0,0155	0,0035	-4,43	< 0,0001
β_{12}	0,0188	0,0015	12,54	< 0,0001
β_{13} (Clone G)	0,0012	0,0109	0,11	0,9099
β_{14} (Clone H10)	0,0438	0,0230	1,90	0,0571
β_{15} (Clone H13)	0,0469	0,0077	6,10	< 0,0001
β_{16} (Clone H14)	0,0290	0,0216	1,34	0,1798
β_{17} (Clone H15)	0,0371	0,0085	4,34	< 0,0001
β_{18} (Clone H18)	0,0530	0,0093	5,71	< 0,0001
β_{19} (Clone H2)	-0,0289	0,0162	-1,79	0,0741
β_{110} (Clone H27)	-0,0201	0,0089	-2,26	0,0239
β_{111} (Clone H34)	-0,0197	0,0100	-1,98	0,0481
β_{112} (Clone H35)	-0,0064	0,0087	-0,74	0,4620
β_{113} (Clone U21)	0,0085	0,0087	0,97	0,3298
β_2	16,5412	0,3807	43,45	< 0,0001
β_3	-29,5618	0,8652	-34,17	< 0,0001
β_4	24,3173	0,8756	27,77	< 0,0001
β_5	-7,3427	0,3246	-22,62	< 0,0001

Os valores apresentados na Tabela 4 e a análise gráfica dos resíduos (Figura 4) demonstram que o modelo polinomial proposto apresentou boa capacidade de representação do perfil dos fustes cubados. O erro padrão da estimativa foi baixo e os resíduos apresentaram boa distribuição, obedecendo aos pressupostos de normalidade e uniformidade de variância. Observa-se também na Figura 4 que o modelo é capaz de fornecer estimativas coerentes com a amplitude de variação dos dados.

Tabela 4 Diagnóstico da regressão linear para representação do perfil das árvores cubadas. Em que: AIC é o critério de informação de Akaike; BIC é o critério de informação Bayesiano; S_{yx} é o erro-padrão residual; $S_{yx}(\%)$ é o erro-padrão residual percentual

Modelo	AIC	BIC	S_{yx}	$S_{yx}(\%)$
Polinômio de 5º grau	-55365,38	-55088,35	0,0431	7,19

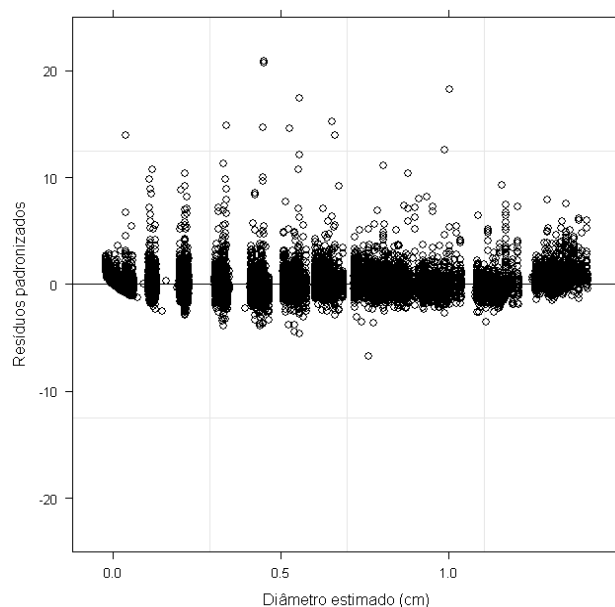


Figura 4 Distribuição dos resíduos padronizados do modelo polinomial de 5º grau para representação do perfil das árvores

3.2 Distribuição Bivariada

Diante da limitação computacional para aplicação do teste de Shapiro-Wilk generalizado na base de dados completa, procedeu-se o teste de normalidade bivariada na matriz de dados reduzida para $n = 5.000$ (X'), de modo que os resultados foram extrapolados para a matriz completa X . A hipótese nula de normalidade foi rejeitada para um nível de significância igual a 5% ($H' = 0,9388$, $p\text{-valor} < 0,0001$), não existindo, portanto, indícios para assumir normalidade bivariada para a matriz X' e, conseqüentemente, para X . No gráfico dos quantis Qui-quadrado (Figura 5) é possível observar que a relação entre as distâncias de Mahalanobis ordenadas e os respectivos quantis não estão dispostas ao longo de uma linha reta que parte da origem com inclinação igual a 1, o que confirma a inexistência de normalidade bivariada.

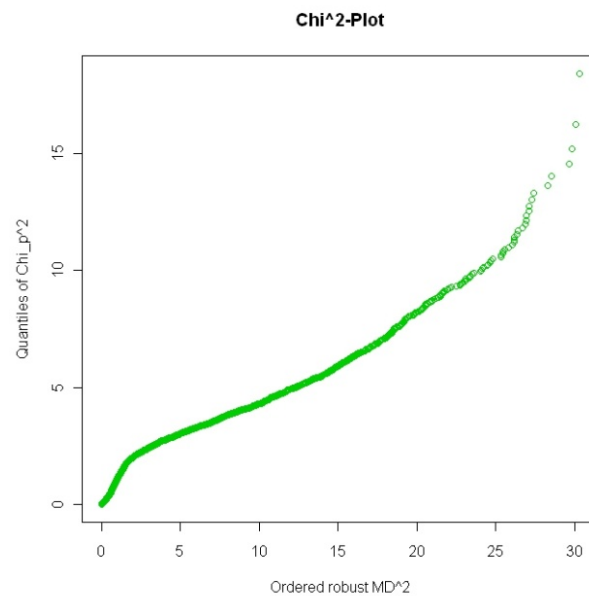


Figura 5 Quantis da distribuição Qui-quadrado versus as distâncias de Mahalanobis ordenadas obtidas a partir da matriz X' ($n = 5.000$)

Conforme observado na Figura 6, ambas as variáveis apresentam densidades marginais bimodais e com forte assimetria à esquerda, o que pode explicar a rejeição da hipótese nula de normalidade bivariada. Desta forma, foi aplicada a transformação de Box-Cox na matriz completa X , utilizando-se para tal as seguintes estimativas do coeficiente λ (equação 10): $\lambda(h_{ij}) = 0,3905$ e $\lambda(d_{ij}) = 0,4466$ (p-valor $< 0,0001$).

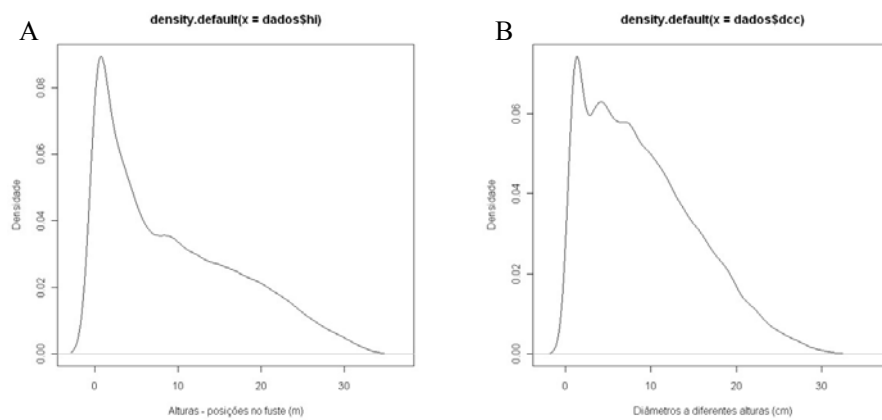


Figura 6 Densidades marginais das variáveis A – posições (alturas) no tronco (h_{ij}) e B - diâmetros a diferentes alturas (d_{ij})

A aplicação da transformação de Box-Cox resultou na matriz X_{BC} , para a qual se assumiu uma distribuição normal bivariada, onde $X_{BC} \sim N(\mu_{BC}, \Sigma_{BC})$. Desta forma, as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros da função densidade de probabilidade de X_{BC} são representados pelo vetor de médias e pela matriz de variâncias e covariâncias amostrais para os dados transformados pelo procedimento de Box-Cox (equação 22).

$$X_{BC} = \begin{bmatrix} 2,774464 \\ 3,343960 \end{bmatrix}; \quad S_{BC} = \begin{bmatrix} 6,217088 & -2,882368 \\ -2,882368 & 4,084629 \end{bmatrix} \quad (22)$$

A estimativa destes parâmetros pelo método da máxima verossimilhança foi adequada e resultou em $MV = -108.855,3$ e $AIC = 217.720,5$. Estes parâmetros foram substituídos na equação 11, resultando na f.d.p. normal bivariada que está graficamente representada na Figura 7.

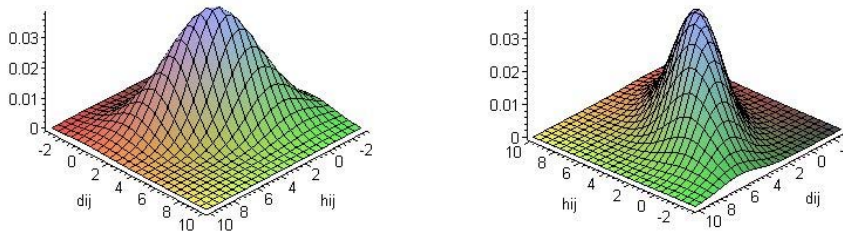


Figura 7 Função densidade de probabilidade normal bivariada obtida a partir das estimativas de máxima verossimilhança \hat{X}_{BC} e S_{BC} para a matriz de dados transformados X_{BC}

A partir da aplicação da f.d.p. descrita anteriormente, as Tabelas contidas no Apêndice A apresentam o cálculo das probabilidades de ocorrência dos sortimentos determinados a partir das dimensões desejadas, tomando como base as informações da Tabela 2. Verifica-se que, de modo geral, esta função foi capaz de captar a relação de afilamento do fuste, já que as probabilidades de ocorrência diminuem com o aumento da altura (posição no fuste) e das classes de diâmetro. A estrutura da matriz de variâncias e covariâncias S_{BC} demonstra a existência de covariância negativa entre h_{ij} e d_{ij} , o que pode ser igualmente observado na matriz de covariâncias de X (equação 23).

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 9,333009 \\ 9,130936 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 67,59768 & -28,73254 \\ -28,73254 & 41,07998 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Por outro lado, verifica-se ainda no Apêndice A que as estimativas das probabilidades estão em desacordo com o esperado (Inventário Florestal), sobretudo quando analisada sob a ótica da produção de toras para celulose e energia, as quais são compatíveis com as características e objetivos da floresta de rápido crescimento avaliada neste estudo.

O Apêndice B apresenta o comparativo entre o número de toras por hectare de cada produto estimado pela f.d.p. e o calculado a partir das estimativas dos diâmetros a várias alturas das árvores mensuradas nas 605 unidades amostrais do Inventário Florestal, obtidas a partir da função de afilamento. Verifica-se, de modo geral, que a f.d.p. forneceu subestimativas do número de toras localizadas na base e na porção média da árvore para as menores classes diamétricas e superestimativas nas porções mais elevadas do fuste e nas classes de diâmetro maiores. As subestimativas variaram entre 16,85% e 93,62% para celulose; 0,27% a 95,22% para energia, enquanto que as superestimativas variaram entre 3,22% e 5.452,21% e 5,27% e 12.869,74% para celulose e energia, respectivamente. Considerando a destinação de madeira para serraria e poste (1 e 2), predominaram as superestimativas do número de toras. A diferença máxima encontrada na categoria serraria foi de 30.342,88%, enquanto tais diferenças variaram entre 236,97% e 25.166,70% para poste 1 e 1.918,35% e 14.928,86% para poste 2. A grande discrepância entre o número de toras observado e o estimado, bem como a significativa variabilidade, demonstraram a inadequabilidade da f.d.p. proposta para este fim.

Diversos fatores podem explicar a baixa performance da f.d.p. normal bivariada. A aplicação da equação de Box-Cox para normalização dos dados não foi eficiente, visto que houve rejeição da hipótese nula de normalidade bivariada pelo teste de Shapiro-Wilk generalizado para a matriz transformada X_{BC}' reduzida para $n = 5.000$ ($H' = 0,9745$, p-valor $< 0,0001$). Os dados transformados mantiveram forte caráter não linear (Figura 8), diferente do

comportamento elipsoidal que seria observado caso estas variáveis transformadas apresentassem distribuição normal bivariada.

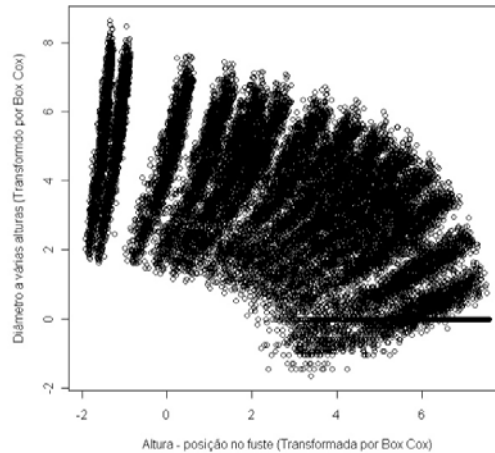


Figura 8 Variação do diâmetro a várias alturas (posições no fuste) após a transformação de Box-Cox

Este fato pode ser explicado pela ausência de normalidade univariada para a variável h_{ij} transformada, tal como demonstrado na Tabela 5 e Figura 9. O teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov resultou na rejeição da hipótese nula de normalidade para ambas as variáveis transformadas ($\alpha = 5\%$). Todavia, graficamente, demonstra-se que a transformação de Box-Cox foi eficiente apenas para a normalização da variável d_{ij} (Figura 9).

Tabela 5 Estatísticas de avaliação da qualidade do ajuste à distribuição normal para as variáveis h_{ij} e d_{ij} após a transformação de Box-Cox. Em que: logMV é o logaritmo da máxima verossimilhança; D é a estatística do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov

Variável	AIC	BIC	logMV	D	p-valor
h_{ij} - Box-Cox	119296,3	119312,6	-59646,10	0,0641	< 0,05
d_{ij} - Box-Cox	108554,6	108570,9	-54275,31	0,0402	< 0,05

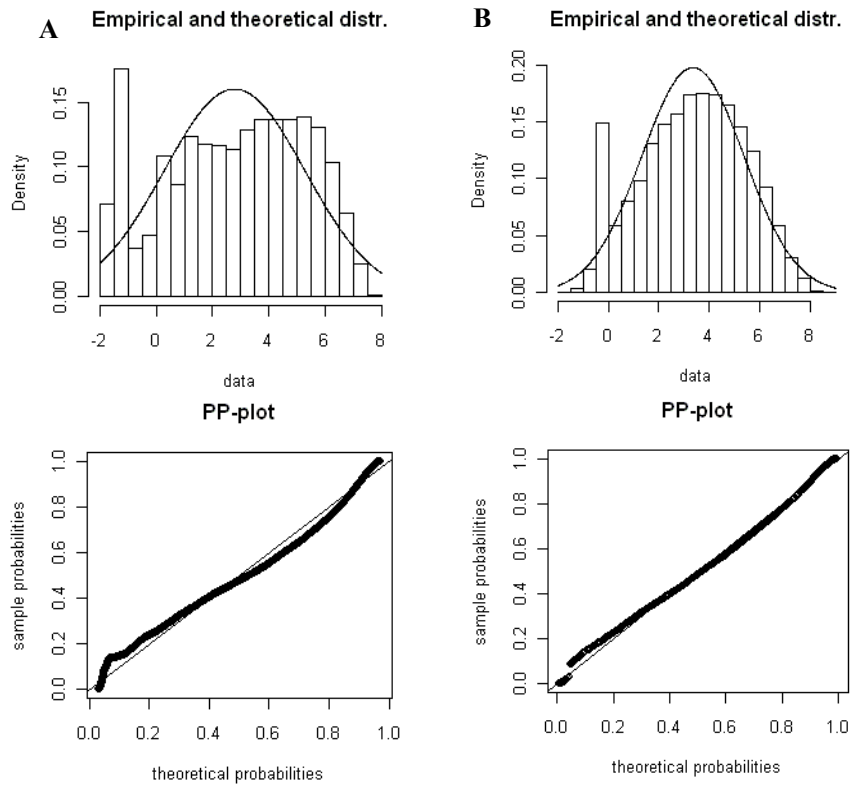


Figura 9 Frequência observada *versus* densidade estimada e “P-P plot” para avaliação gráfica da qualidade do ajuste à distribuição normal para as variáveis h_{ij} (A) e d_{ij} (B)

Por outro lado, foi possível observar melhoria na relação entre as distâncias de Mahalanobis e os quantis da distribuição Qui-quadrado (Figura 10), que se aproximou da reta com inclinação igual a 1. Esta melhora pode estar relacionada à normalização da variável d_{ij} pelo procedimento de Box-Cox, ainda que não tenha sido suficiente para que $X_{BC} \sim N(\mu_{BC}, \Sigma_{BC})$.

Portanto, a equação de Box-Cox não foi adequada para a obtenção de uma matriz com distribuição normal bivariada, o que explica a grande

imprecisão das estimativas dos produtos florestais obtidas a partir da f.d.p. proposta neste estudo.

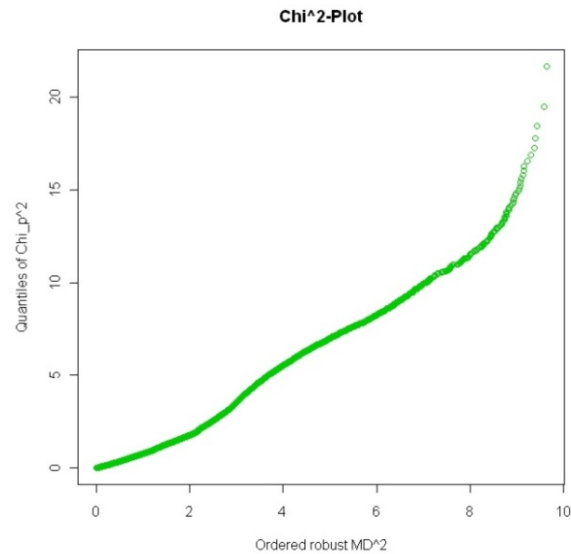


Figura 10 Quantis da distribuição Qui-quadrado versus as distâncias de Mahalanobis ordenadas obtidas a partir da matriz de dados transformados X_{BC}

A inadequabilidade da f.d.p. proposta pode estar relacionada também ao fato de que foi desprezada a correlação espacial entre as medidas d_{ij} e h_{ij} em cada indivíduo, já que pode ter contribuído para o insucesso da transformação de Box-Cox para a normalização dos dados. Conforme Williams e Reich (1997), a estrutura de correlação amostral deve ser representada da seguinte forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_N \end{bmatrix}_{K \times K} \quad (24)$$

Em que:

K é o número de árvores mensuradas;

n_k é o número de medidas tomadas na árvore k ($n_k = 1, \dots, 14$);

S_k é a matriz de covariância amostral da árvore k com dimensão $n_k \times n_k$.

Segundo demonstrado por estes autores, a estrutura de correlação descrita acima deve ser considerada no estudo do afilamento de fustes, pois melhora o ajuste das funções de afilamento e reduz o viés na estimativa dos diâmetros a várias alturas. A significância e a magnitude da correlação espacial entre as medidas d_{ij} e h_{ij} dentro de um mesmo indivíduo devem ser avaliadas a priori, já que sua inclusão resultaria em um número muito elevado de parâmetros na matriz S , reduzindo assim a parcimônia do modelo proposto. Por outro lado, pode-se considerar que as matrizes de covariância de cada árvore amostrada ($i = 1, 2, \dots, k$) podem ser igualadas, resultando na representação simplificada apresentada na equação 25.

$$S = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix} \quad (25)$$

Em que:

$$S_k = S_1 = S_2 = S_3 = \dots$$

A estimativa não-paramétrica (kernel) da densidade bivariada da matriz X_{BC} (dados transformados) (Figura 11) demonstra uma curva em forma de sino semelhante à normal bivariada. Entretanto, este comportamento não pode ser associado a esta distribuição, conforme demonstrado, e poderá ser modelado por

outras f.d.p. bivariadas contínuas capazes de descrever comportamento semelhante, tais como Weibull, t de Student, Gamma, S_B Johnson, dentre outras.

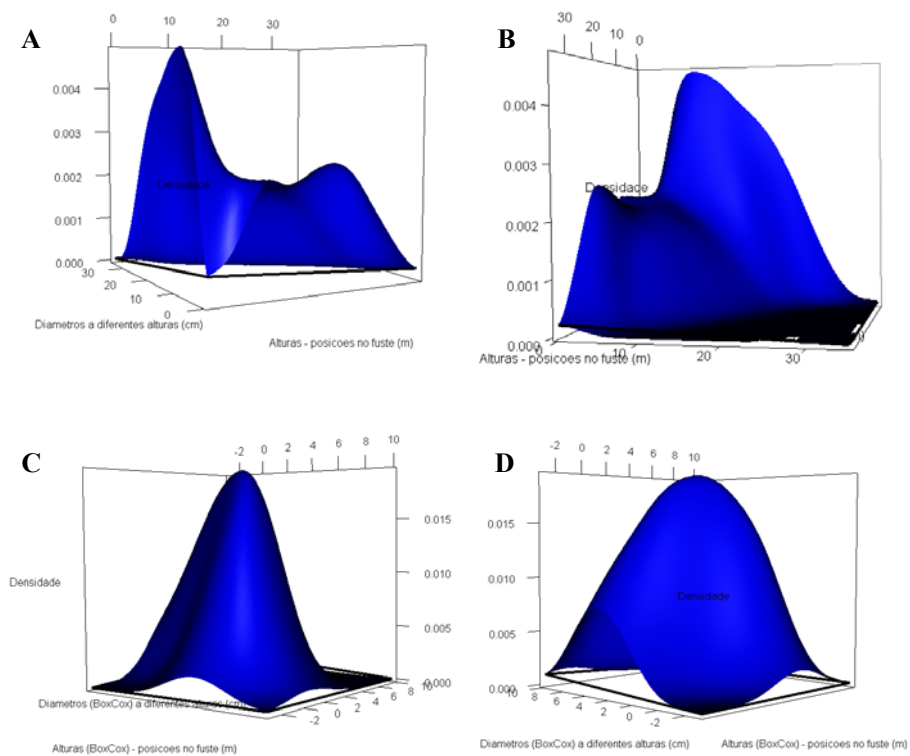


Figura 11 Estimativas não-paramétricas (kernel) das densidades bivariadas da matriz de dados brutos X (A e B) e dos dados transformados pela equação de Box-Cox X_{BC} (C e D)

Diante do exposto, o comportamento bivariado observado na Figura 11 poderá ser modelado por uma função flexível para a representação da densidade. Uma distribuição bivariada é considerada flexível se as distribuições marginais são capazes de descrever satisfatoriamente as densidades univariadas (HAFLEY; SCHREUDER, 1976 citado por SCHREUDER; HAFLEY, 1977; KNOEBEL; BURKHART, 1991).

A Tabela 6 apresenta o resultado do ajuste de distribuições univariadas (marginais) às variáveis h_{ij} e d_{ij} na ausência da transformação de Box-Cox. Observa-se que houve rejeição da hipótese nula pelo teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov ao nível de significância igual a 5%, para todas as distribuições e variáveis. Por outro lado, as estatísticas AIC e BIC e a análise gráfica (Figura 12) demonstram que as distribuições Weibull e Gamma podem ser consideradas adequadas para ambas as variáveis. Em alguns casos, especialmente em conjuntos de dados muito grandes ($n = 25.572$ observações), mesmo se a hipótese nula é rejeitada, uma distribuição ajustada pode ser selecionada para descrever uma distribuição empírica se os gráficos de avaliação da qualidade do ajuste não mostram grandes diferenças entre distribuições empíricas e teóricas.

Para as variáveis transformadas pela equação de Box-Cox, as distribuições marginais avaliadas neste estudo não apresentaram bom desempenho no ajuste, à exceção da distribuição normal.

Tabela 6 Estatísticas de avaliação da qualidade do ajuste das distribuições marginais das variáveis h_{ij} e d_{ij} . Em que: logMV é o logaritmo da máxima verossimilhança; D é a estatística do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov

Variável	Distribuição Marginal	AIC	BIC	logMV	D	p-valor
h_{ij}	Normal	180315,6	180331,9	-90155,82	0,1289	< 0,05
	Log-normal	172839,0	172855,3	-86417,50	0,1269	< 0,05
	Exponencial	165372,6	165380,7	-82685,30	0,0997	< 0,05
	Weibull	164828,0	164844,3	-82411,98	0,0820	< 0,05
	Gamma	164176,9	164193,2	-82086,44	0,0783	< 0,05
d_{ij}	Normal	167579,9	167596,2	-83787,97	0,0823	< 0,05
	Log-normal	165746,1	165762,4	-82871,06	0,0976	< 0,05
	Exponencial	164253,1	164261,3	-82125,57	0,1022	< 0,05
	Weibull	160688,7	160705,0	-80342,37	0,0462	< 0,05
	Gamma	161335,9	161352,2	-80665,97	0,0508	< 0,05

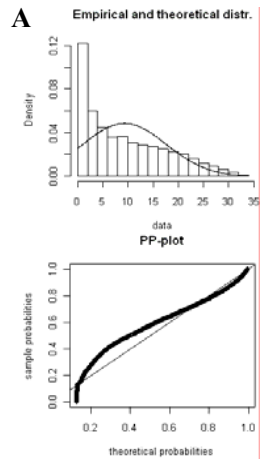
Desta forma, recomendam-se, como próximo passo deste estudo, que sejam avaliadas as distribuições Weibull e Gamma bivariadas, já que essas distribuições estão condicionadas ao fato de que as distribuições marginais também possuam a forma Weibull e/ou Gamma (KOTZ et al., 2000). Johnson et al. (1999) utilizaram a distribuição Weibull bivariada como função densidade de probabilidade conjunta de algumas propriedades físicas da madeira de *Pinus spp.* Estes autores propuseram uma rotina computacional para o ajuste dos parâmetros desta f.d.p., com base no método da máxima verossimilhança, o qual depende das estimativas iniciais dos parâmetros das distribuições marginais Weibull e da medida de correlação entre as variáveis.

Entretanto, é importante considerar que a distribuição marginal não determina unicamente a distribuição bivariada correspondente: pode-se demonstrar que para uma dada distribuição marginal, existe uma infinidade de

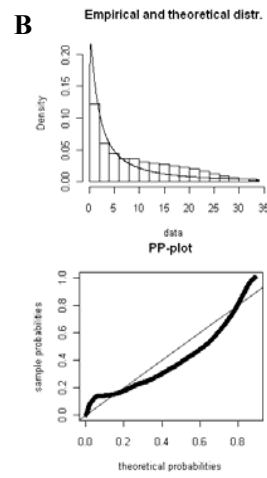
distribuições bivariadas que podem ser originadas desta (ZUCCHINI et al., 2001; GUMBEL, 1960; 1961 citados por WANG; RENNOLLS, 2007).

Outra alternativa para se obter a distribuição conjunta dos diâmetros a várias alturas do fuste é a utilização de funções *copula*, conforme sugerido por Wang et al. (2008) e Wang et al. (2010), as quais promovem a ligação entre as distribuições marginais de h_{ij} e d_{ij} , resultando numa distribuição conjunta bivariada.

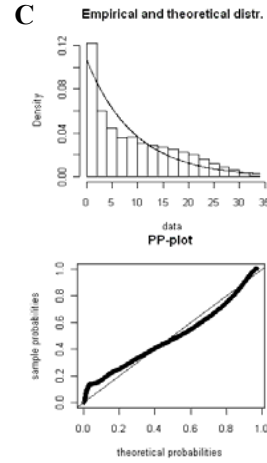
Normal



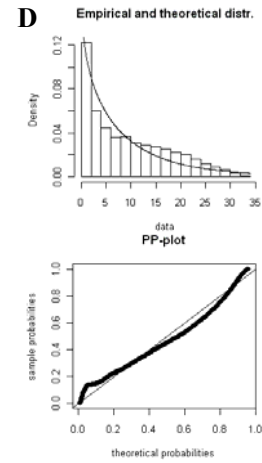
Log-normal



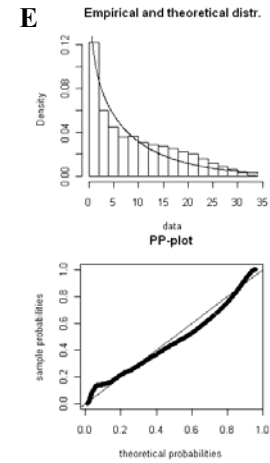
Exponential



Weibull



Gamma



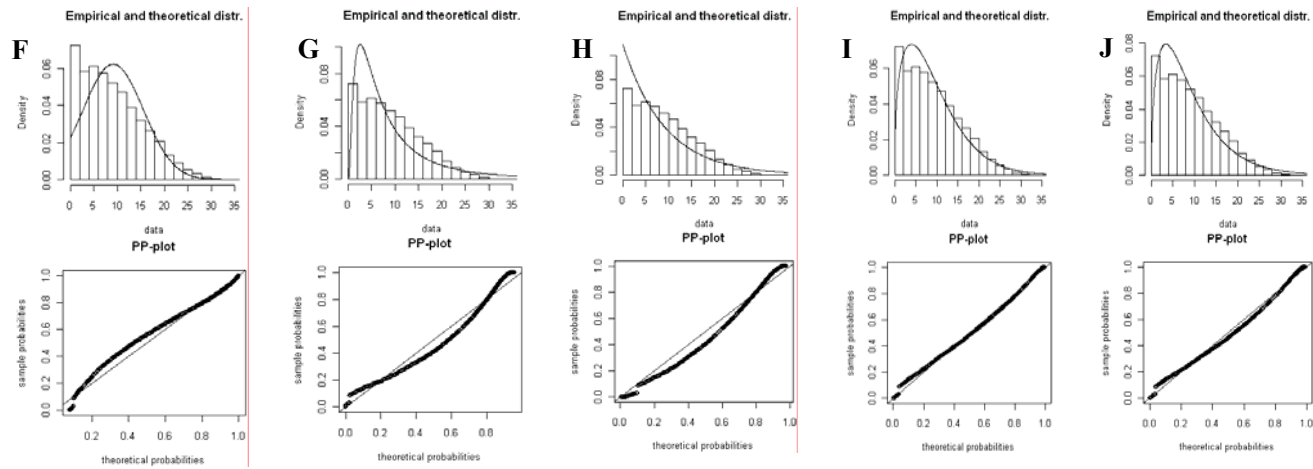


Figura 12 Frequência observada *versus* densidade estimada e “P-P plot” para avaliação gráfica da qualidade do ajuste das distribuições Normal, Log-normal, Exponencial, Weibull e Gamma para as variáveis h_{ij} (A - E) e d_{ij} (F - J)

4 CONCLUSÕES

As principais conclusões deste trabalho são:

- a transformação de Box-Cox não foi suficiente para normalizar as variáveis h_{ij} e d_{ij} , de modo que não foi possível assumir normalidade bivariada neste estudo de caso;
- a f.d.p. normal bivariada não foi considerada adequada para a predição dos quantitativos dos produtos florestais avaliados, tendo em vista a grande discrepância entre os valores estimados pela função de afilamento aplicada às árvores amostradas no Inventário Florestal e aqueles estimados pela f.d.p.;
- o ajuste de f.d.p. bivariadas para descrever a distribuição conjunta dos diâmetros (d_{ij}) a várias alturas do fuste (h_{ij}) possui grande aplicação prática na área florestal, tendo em vista que confere maior agilidade e facilidade na estimativa dos múltiplos produtos florestais, já que dispensam os procedimentos de integração das funções de afilamento.

5 RECOMENDAÇÕES

As principais recomendações advindas dos resultados deste trabalho são:

- recomenda-se que, em estudos posteriores, seja avaliado o ajuste das f.d.p. Weibull e Gamma bivariadas, a fim de obter uma f.d.p. que descreva mais adequadamente a distribuição conjunta dos diâmetros a várias alturas do fuste. Para tal, deverão ser desenvolvidos procedimentos computacionais para o ajuste dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança, quando inexistentes;
- recomenda-se que sejam avaliadas a significância e magnitude da correlação espacial entre as medidas dos diâmetros a várias alturas tomadas no mesmo indivíduo, conforme sugerido por Williams e Reich (1997), a fim de avaliar sua pertinência para a melhoria do ajuste de quaisquer f.d.p. multivariadas ao conjunto de dados analisado.

6 TRABALHOS FUTUROS

Conforme demonstrado anteriormente, a distribuição normal bivariada não foi adequada para modelar a densidade conjunta das variáveis h_{ij} e d_{ij} , tendo em vista a grande discrepância entre o número de toras observado e estimado com auxílio desta f.d.p. Desta forma, é necessário desenvolver processos computacionais iterativos para avaliar a adequação de outras distribuições, tais como a Weibull e a Gamma bivariadas sugeridas, ou mesmo utilizar funções *copula* para modelar a densidade conjunta.

Após a definição da distribuição bivariada mais adequada, podem-se desenvolver inúmeras aplicações práticas na área florestal, visando principalmente à maior rapidez e facilidade para a predição dos quantitativos de sortimentos com base da distribuição de probabilidade.

A quantidade disponível (total e por unidade de área) do produto florestal avaliado pode ser estimada a partir do procedimento descrito nas equações 20 e 21. O volume individual médio em m³ das toras com as dimensões especificadas, para as quais são estimadas as probabilidades p_i , pode ser obtido através da função de afilamento ajustada, a qual inclui o efeito da idade, da produtividade do sítio e da procedência clonal para melhoria da precisão da estimativa do volume.

$$\bar{v}_i = \frac{\pi}{40.000} \int_{h_1}^{h_2} h \times d_{ij}^2 dh \quad (26)$$

$$d_{ij} = f(h_{ij}, HT_i, DAP_i, I_i, \overline{HDC}_i, Cl_i; \beta_i) \quad (27)$$

Em que:

\bar{v}_i é o volume individual médio em m³ da i-ésima tora com dimensão especificada (Tabela 1);

d_{1j} é o diâmetro da j-ésima posição do fuste de uma árvore média, estimado a partir da função de afilamento;

h_1 e h_2 são as alturas (posições do fuste) que determinam o comprimento da tora;

HT_i é a altura total da árvore média considerando uma mesma idade, classe de sítio e procedência clonal;

DAP_i é o diâmetro a altura do peito da árvore média, considerando uma mesma idade, classe de sítio e procedência clonal;

I_i é a idade em anos;

HDC_i é a altura dominante e codominante média considerando uma mesma idade, classe de sítio e procedência clonal;

CI_i é a procedência clonal; β_i são os parâmetros da função de afilamento ajustada (polinômio de 5º grau).

Desta forma, é possível obter estimativas do volume médio de toras com as dimensões mínimas sugeridas na Tabela 1 por classe de sítio, idade e clone. Gregoire et al. (2000) demonstraram que este procedimento não implica em aumento do erro da estimativa volumétrica, o qual depende apenas do erro associado à estimativa dos parâmetros β_i .

O volume de toras por hectare que será destinado a qualquer um dos produtos descritos na Tabela 1 pode ser estimado a partir da equação 28:

$$V = N_T \times \bar{v}_i = p_i \times \bar{N} \times \bar{v}_i \quad (28)$$

Em que:

V é o volume por hectare do produto florestal por idade, classe de sítio e procedência genética;

\bar{N} é o número médio de indivíduos por hectare obtido a partir do Inventário Florestal, para cada idade, classe de sítio e clone.

Outra importante aplicação prática da f.d.p. bivariada está relacionada à obtenção das distribuições dos diâmetros a qualquer altura, possibilitando, por exemplo, encontrar a frequência dos diâmetros da ponta mais fina das toras cujo valor de mercado está diretamente associado a esta variável, tais como moirões de cercas; escoras e madeira para construção civil. Para tal, é necessário encontrar a distribuição condicional de d_{ij} para certo valor de h_{ij} (posição no fuste):

$$f_{d_{i1}}(d_{i1} | h_{ij} = h_1) = \frac{f_{h_{ij}, d_{ij}}(h_{ij}, d_{ij})}{f_{h_{ij}}(h_1)}; \text{ para } f_{h_{ij}}(h_1) \neq 0. \quad (29)$$

Em que:

$f_{d_{i1}}(d_{i1} | h_{ij} = h_1)$ é a distribuição dos diâmetros na posição (altura) h_1 do fuste;

$f_{h_{ij}, d_{ij}}(h_{ij}, d_{ij})$ é a f.d.p. conjunta das variáveis h_{ij} e d_{ij} ; $f_{h_{ij}}(h_1)$ é a f.d.p. marginal da variável h_{ij} avaliada no ponto h_1 .

Observa-se, portanto, que a utilização da equação 29, bem como da aplicação prática dos demais exemplos demonstrados nesta seção, depende do ajuste prévio da f.d.p. conjunta e das f.d.p. marginais.

Os procedimentos descritos acima simplificam o procedimento de predição do número de toras e do volume dos sortimentos disponíveis no povoamento, pois dispensam rotinas de cálculo elaboradas a partir da integração das funções de afilamento. Entretanto, a precisão destas estimativas dependerá da qualidade do ajuste da f.d.p. bivariadas, bem como das funções de afilamento ao conjunto de dados avaliados.

REFERÊNCIAS

ASSMANN, E. **Waldetragskunde**. München: BLV Verlagsgesellschaft, 1961. 435p.

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal**: perguntas e respostas. 2. ed. rev. e ampl..Viçosa: Editora UFV, 2006. 470p. il.

EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA. EMBRAPA. **Sistema brasileiro de classificação de solos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Embrapa Solos, 2006. 306p. il.

FERREIRA, D. F. **Estatística multivariada**. 1. ed. Lavras: Editora UFLA, 2008. 662p. il.

Formatado: Inglês (EUA)

FRIES, J; MATERN, B. On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves. In: IUFRO ADVISORY GROUP OF FOREST STATISTICIANS, 1965, Stockholm. **Proceedings of Conference in Stockholm**. Stockholm: IUFRO, 1966. p. 85 - 117.

GREGOIRE, T. G.; SCHABENBERGER, O.; BARRETT, J. P. Linear modeling of irregularly spaced, unbalanced, longitudinal data from permanent-plot measurements. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 25, n. 1, p. 137-156, jan. 1995.

GREGOIRE, T. G.; SCHABENBERGER, O.; KONG, F. Prediction from integrated regression equation: a forestry application. **Biometrics**, v. 56, n. 2, p. 414-419, jun. 2000.

GUIMARÃES, D. P.; LEITE, H. G. Um novo modelo para descrever o perfil do tronco. **Revista Árvore**, v. 16, n. 2, p. 170-180, 1992.

JOHNSON, R. A.; EVANS, J. W.; GREEN, D. W. **Some bivariate distributions for modeling the strength properties of lumber**. Madison: USDA Forest Service, Forest Products Laboratory. Research Paper, 1999. 11p.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 767p.

KNOEBEL, B. R.; BURKHART, H. E. A bivariate distribution approach to modeling forest diameter distributions at two points in time. **Biometrics**, v. 47, n. 1p. 241-253, mar. 1991.

KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. JOHNSON, N. L. **Continuous multivariate distributions**: Volume 1 - models and applications. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2000. 722p.

LI, F.; ZHANG, L.; DAVIS, C. J. Modeling the joint distribution of tree diameters and heights by bivariate generalized beta distribution. **Forest Science**, v. 48, n. 1, p. 47-58, fev. 2002.

LITTELL, R. C.; HENRY, P. R.; AMMERMAN, C. B.; Statistical analysis of repeated measures data using SAS procedures. **Journal of Animal Science**, v. 76, n. 4, p. 1216-1231, abr. 1998.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. New York: Springer-Verlag, 2000. 528p.

PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não-lineares para a descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, v. 31, n. 5, p. 845-852, set./out. 2007.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. ISBN 3-900051-07-0, URL: <http://www.R-project.org>. 2010.

Código de campo alterado

RUPSYS, P.; PETRAUSKAS, E. The bivariate gompertz diffusion model for tree diameter and height distribution. **Forest Science**, v. 56, n. 3, p. 271-280, jun. 2010.

SCHREUDER, H. T.; HAFLEY, W. L. A useful distribution for describing stand structure of tree heights and diameters. **Biometrics**, v. 33, n. 3, p. 471-478, set. 1977.

- SCHOEPPER, W. **Automatisierung des Massen, Sorten und Wertberechnung stender aldbestände Schriftenreihe Bad.** Berlin: Wurt-Forstl, 1966. No page.
- TEWARI, V. P.; GADOW, K. V. Modeling the relationship between tree diameters and heights using S_{BB} distribution. **Forest Ecology and Management**, v. 119, n. 1-3, p. 171-176, jun. 1999.
- UUSITALO, J.; KIVINEN, V. P. Constructing bivariate dbh-dead-branch height distribution of pines for use in sawing production planning. **Scandinavian Journal of Forest Research**, v. 13, n. 1-4, p. 509-514, 1998.
- WANG, M. RENNOLLS, K. Bivariate distribution modeling with tree diameter and height data. **Forest Science**, v. 53, n. 1, p. 16-24, fev. 2007.
- WANG, M. RENNOLLS, K.; TANG, S. Bivariate distribution modeling of tree diameters and heights: dependency modeling using copulas. **Forest Science**, v. 54, n. 3, p. 284-293, jun. 2008.
- WANG, M.; UPADHYAY, A.; ZHANG, L. Trivariate distribution modeling of tree diameter, height and volume. **Forest Science**, v. 56, n. 3, p. 290-300, jun. 2010.
- WILLIAMS, M. S.; REICH, R. M. Exploring the error structure of taper equations. **Forest Science**, v. 43, n. 3, p. 378-386, ago. 1997.
- ZUCCHINI, W.; SCHMIDT, M. GADOW, K. von. A model for the diameter-height distribution in an uneven-aged beech forest and a method to assess the fit of such models. **Silva Fennica**, v. 35, n. 2, p. 169-183, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Cálculo das probabilidades de ocorrência dos múltiplos produtos florestais com as dimensões estabelecidas

Tabela A.1 Estimativas das probabilidades de ocorrência de toras destinadas à serraria a partir da f.d.p. normal bivariada.
Dimensões mínimas: $d_{\min} = 25,0$ cm; $h_{\min} = 3,5$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)				Total
]25,0 - 27,0]]27,0 - 29,0]]29,0 - 31,0]]31,0 - 33,0]	
3,5	0,0062	0,0043	0,0030	0,0020	0,0156
7,0	0,0012	0,0007	0,0004	0,0003	0,0027
10,5	0,0004	0,0007	0,0001	0,0001	0,0013
14,0	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0003
17,5	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
21,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
24,5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
28,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
31,5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
35,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Total	0,0081	0,0059	0,0036	0,0024	

Tabela A.2 Estimativas das probabilidades de ocorrência de toras destinadas à celulose a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 8,0$ cm; $h_{\min} = 2,5$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)							Total
]8,0 - 12,0]]12,0 - 16,0]]16,0 - 20,0]]20,0 - 24,0]]24,0 - 28,0]]28,0 - 32,0]]32,0 - 36,0]	
2,5	0,0556	0,0495	0,0347	0,0208	0,0111	0,0055	0,0025	0,1797
5,0	0,0432	0,0284	0,0151	0,0069	0,0029	0,0011	0,0004	0,0981
7,5	0,0327	0,0182	0,0084	0,0034	0,0013	0,0004	0,0001	0,0646
10,0	0,0236	0,0116	0,0048	0,0018	0,0006	0,0002	0,0001	0,0425
12,5	0,0165	0,0073	0,0028	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0279
15,0	0,0114	0,0046	0,0016	0,0005	0,0002	0,0000	0,0000	0,0183
17,5	0,0078	0,0029	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0120
20,0	0,0053	0,0018	0,0006	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0078
22,5	0,0035	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0051
25,0	0,0024	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0033
27,5	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022
30,0	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014
32,5	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0009
35,0	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006
Total	0,2058	0,1271	0,0695	0,0349	0,0165	0,0074	0,0032	

Tabela A.3 Estimativas das probabilidades de ocorrência de toras destinadas à energia a partir da f.d.p. normal bivariada.
Dimensões mínimas: $d_{\min} = 3,0$ cm; $h_{\min} = 2,0$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)								Total
	[3,0 - 7,0]	[7,0 - 11,0]	[11,0 - 15,0]	[15,0 - 19,0]	[19,0 - 23,0]	[23,0 - 27,0]	[27,0 - 31,0]	[31,0 - 35,0]	
2,0	0,0266	0,0442	0,0442	0,0336	0,0213	0,0119	0,0061	0,0029	0,1908
4,0	0,0326	0,0386	0,0290	0,0169	0,0084	0,0037	0,0015	0,0006	0,1314
6,0	0,0337	0,0329	0,0211	0,0108	0,0048	0,0019	0,0007	0,0002	0,1062
8,0	0,0318	0,0267	0,0152	0,0070	0,0028	0,0010	0,0004	0,0001	0,0849
10,0	0,0284	0,0210	0,0108	0,0046	0,0017	0,0006	0,0002	0,0001	0,0672
12,0	0,0245	0,0162	0,0076	0,0030	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0527
14,0	0,0206	0,0123	0,0053	0,0020	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0411
16,0	0,0170	0,0093	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0319
18,0	0,0139	0,0069	0,0026	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0246
20,0	0,0112	0,0051	0,0018	0,0006	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0189
22,0	0,0089	0,0038	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0145
24,0	0,0071	0,0028	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0111
26,0	0,0056	0,0021	0,0006	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0085
28,0	0,0044	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0065
30,0	0,0034	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0049
32,0	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0037
34,0	0,0021	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0028
Total	0,2744	0,2258	0,1452	0,0815	0,0418	0,0200	0,0091	0,0040	

Tabela A.4 Estimativas das probabilidades de ocorrência de toras destinadas à poste para linhas de distribuição de energia elétrica (poste 1) a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 15,4$ cm; $h_{\min} = 9,0$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)									Total
]15,4 - 17,4]]17,4 - 19,4]]19,4 - 21,4]]21,4 - 23,4]]23,4 - 25,4]]25,4 - 27,4]]27,4 - 29,4]]29,4 - 31,4]]31,4 - 33,4]	
9,0	0,0382	0,0287	0,0209	0,0149	0,0104	0,0072	0,0049	0,0033	0,0021	0,1306
18,0	0,0052	0,0031	0,0018	0,0010	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000	0,0122
27,0	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0017
36,0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
Total	0,0444	0,0322	0,0229	0,0160	0,0110	0,0075	0,0050	0,0033	0,0022	

Tabela A.5 Estimativas das probabilidades de ocorrência de toras destinadas à poste para linhas de distribuição de energia elétrica (poste 2) a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 15,4$ cm; $h_{\min} = 13,0$ m.

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)									Total
]15,4 - 17,4]]17,4 - 19,4]]19,4 - 21,4]]21,4 - 23,4]]23,4 - 25,4]]25,4 - 27,4]]27,4 - 29,4]]29,4 - 31,4]]31,4 - 33,4]	
13,0	0,0417	0,0307	0,0221	0,0156	0,0108	0,0074	0,0050	0,0033	0,0022	0,1389
26,0	0,0025	0,0014	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0055
39,0	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004
Total	0,0444	0,0322	0,0229	0,0160	0,0111	0,0075	0,0050	0,0033	0,0022	

APÊNDICE B - Comparação entre o número de toras por hectare de cada produto madeireiro estimado pela f.d.p. e o calculado a partir da função de afilamento aplicada às árvores do Inventário Florestal

Tabela B.1 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à serraria obtidas a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 25,0$ cm; $h_{\min} = 3,5$ m. $N_{cs} = \bar{N}_{arv} \times P$, onde N_{cs} é o número estimado de toras destinadas à serraria em cada posição do fuste e classe diamétrica (por hectare); \bar{N}_{arv} é o número médio de árvores por hectare, estimado a partir da amostra obtida no Inventário Florestal; P é a probabilidade estimada pela f.d.p. normal bivariada, apresentada no Apêndice A

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)				Total
	25,0 - 27,0	27,0 - 29,0	29,0 - 31,0	31,0 - 33,0	
3,5	7,11	4,97	3,41	2,31	17,81
7,0	1,40	0,85	0,51	0,30	3,06
10,5	0,48	0,75	0,15	0,09	1,46
14,0	0,18	0,10	0,05	0,03	0,35
17,5	0,07	0,04	0,00	0,00	0,11
21,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
28,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
31,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
35,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	9,23	6,70	4,13	2,72	

Tabela B.2 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à serraria obtidas a partir das árvores mensuradas no Inventário Florestal. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 25,0$ cm; $h_{\min} = 3,5$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)				Total
]25,0 - 27,0]]27,0 - 29,0]]29,0 - 31,0]]31,0 - 33,0]	
3,5	0,02	0,00	0,00	0,00	0,02
7,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
14,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
17,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
21,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
24,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
28,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
31,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
35,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	0,02	0,00	0,00	0,00	

Tabela B.3 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à celulose obtidas a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 8,0$ cm; $h_{\min} = 2,5$ m. $N_{TC} = N_{arv} \times P$, onde N_{TC} é o número estimado de toras destinadas à celulose em cada posição do fuste e classe diamétrica (por hectare); N_{arv} é o número médio de árvores por hectare, estimado a partir da amostra obtida no Inventário Florestal; P é a probabilidade estimada pela f.d.p. normal bivariada, apresentada no Apêndice A

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)							Total
	[8,0 - 12,0]	[12,0 - 16,0]	[16,0 - 20,0]	[20,0 - 24,0]	[24,0 - 28,0]	[28,0 - 32,0]	[32,0 - 36,0]	
2,5	63,55	56,55	39,64	23,75	12,73	6,27	2,89	205,37
5,0	49,41	32,42	17,21	7,94	3,32	1,29	0,47	112,05
7,5	37,35	20,81	9,59	3,90	1,45	0,51	0,17	73,77
10,0	26,91	13,21	5,46	2,02	0,69	0,22	0,07	48,58
12,5	18,88	8,34	3,15	1,07	0,34	0,10	0,03	31,91
15,0	13,03	5,24	1,83	0,58	0,17	0,05	0,00	20,90
17,5	8,89	3,29	1,07	0,32	0,09	0,00	0,00	13,66
20,0	6,02	2,07	0,63	0,18	0,05	0,00	0,00	8,94
22,5	4,05	1,30	0,37	0,10	0,00	0,00	0,00	5,82
25,0	2,72	0,82	0,22	0,06	0,00	0,00	0,00	3,81
27,5	1,82	0,51	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	2,46
30,0	1,21	0,32	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	1,62
32,5	0,81	0,20	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	1,06
35,0	0,54	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67
Total	235,17	145,21	79,42	39,91	18,83	8,43	3,62	

Tabela B.4 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à celulose obtidas a partir das árvores mensuradas no Inventário Florestal. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 8,0$ cm; $h_{\min} = 2,5$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)						Total	
]8,0 - 12,0]]12,0 - 16,0]]16,0 - 20,0]]20,0 - 24,0]]24,0 - 28,0]]28,0 - 32,0]]32,0 - 36,0]
2,5	441,93	360,96	111,39	12,69	0,54	0,00	0,00	927,50
5,0	446,32	271,74	41,83	2,43	0,00	0,00	0,00	762,32
7,5	420,80	176,42	16,68	0,37	0,00	0,00	0,00	614,28
10,0	390,03	101,60	6,57	0,07	0,00	0,00	0,00	498,26
12,5	295,81	48,04	1,85	0,00	0,00	0,00	0,00	345,70
15,0	159,51	17,41	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	177,24
17,5	66,13	4,35	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	70,48
20,0	20,40	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	20,73
22,5	3,93	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,95
25,0	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,28
27,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
30,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
32,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
35,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	2245,12	980,87	178,64	15,56	0,54	0,00	0,00	

Tabela B.5 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à energia obtidas a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 3,0$ cm; $h_{\min} = 2,0$ m. $N_{te} = N_{aru} \times p$, onde N_{te} é o número estimado de toras destinadas à energia em cada posição do fuste e classe diamétrica (por hectare); N_{aru} é o número médio de árvores por hectare, estimado a partir da amostra obtida no Inventário Florestal; p é a probabilidade estimada pela f.d.p. normal bivariada, apresentada no Apêndice A

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)								Total
	[3,0 - 7,0]	[7,0 - 11,0]	[11,0 - 15,0]	[15,0 - 19,0]	[19,0 - 23,0]	[23,0 - 27,0]	[27,0 - 31,0]	[31,0 - 35,0]	
2,0	30,44	50,47	50,56	38,36	24,34	13,62	6,94	3,29	218,02
4,0	37,25	44,13	33,10	19,34	9,62	4,28	1,75	0,67	150,15
6,0	38,53	37,60	24,13	12,34	5,46	2,18	0,81	0,28	121,32
8,0	36,31	30,46	17,32	7,99	3,23	1,19	0,41	0,13	97,03
10,0	32,44	23,94	12,30	5,21	1,95	0,67	0,22	0,07	76,79
12,0	27,99	18,46	8,68	3,41	1,19	0,39	0,12	0,03	60,26
14,0	23,55	14,04	6,10	2,24	0,74	0,23	0,07	0,02	46,98
16,0	19,46	10,57	4,27	1,48	0,46	0,14	0,04	0,01	36,43
18,0	15,86	7,91	2,99	0,98	0,29	0,08	0,02	0,01	28,13
20,0	12,78	5,88	2,09	0,65	0,18	0,05	0,01	0,00	21,64
22,0	10,20	4,35	1,46	0,43	0,12	0,03	0,01	0,00	16,60
24,0	8,09	3,21	1,02	0,29	0,07	0,02	0,00	0,00	12,70
26,0	6,37	2,36	0,71	0,19	0,05	0,01	0,00	0,00	9,70
28,0	4,99	1,74	0,50	0,13	0,03	0,01	0,00	0,00	7,40
30,0	3,90	1,27	0,35	0,09	0,02	0,00	0,00	0,00	5,63
32,0	3,03	0,93	0,24	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00	4,28
34,0	2,35	0,68	0,17	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	3,25
Total	313,55	258,00	165,97	93,18	47,78	22,90	10,40	4,52	

Tabela B.6 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à energia obtidas a partir das árvores mensuradas no Inventário Florestal. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 3,0$ cm; $h_{\min} = 2,0$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)								Total
]3,0 - 7,0]]7,0 - 11,0]]11,0 - 15,0]]15,0 - 19,0]]19,0 - 23,0]]23,0 - 27,0]]27,0 - 31,0]]31,0 - 35,0]	
2,0	103,26	406,13	390,03	200,35	32,55	2,55	0,00	0,00	1134,86
4,0	188,27	461,30	373,23	100,99	9,65	0,26	0,00	0,00	1133,70
6,0	286,39	449,57	319,67	53,37	2,92	0,00	0,00	0,00	1111,92
8,0	365,37	410,94	244,45	28,84	0,84	0,00	0,00	0,00	1050,44
10,0	341,80	396,87	164,95	15,14	0,23	0,00	0,00	0,00	919,00
12,0	261,97	373,60	99,15	6,52	0,07	0,00	0,00	0,00	741,31
14,0	286,79	291,42	49,98	2,13	0,00	0,00	0,00	0,00	630,31
16,0	352,76	177,01	21,45	0,42	0,00	0,00	0,00	0,00	551,64
18,0	331,86	89,31	7,57	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	428,82
20,0	228,44	36,78	1,36	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	266,58
22,0	124,29	13,02	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	137,52
24,0	54,45	2,78	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	57,23
26,0	19,30	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	19,58
28,0	5,44	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5,47
30,0	0,42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,42
32,0	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
34,0	5,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5,44
Total	2956,29	3109,02	1672,04	407,83	46,27	2,80	0,00	0,00	

Tabela B.7 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à poste para linhas de distribuição de energia elétrica (poste 1) obtidas a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 15,4$ cm; $h_{\min} = 9,0$ m. $N_{\text{toras}} = N_{\text{arv}} \times P$, onde N_{toras} é o número estimado de toras destinadas à poste para distribuição de energia elétrica em cada posição do fuste e classe diamétrica (por hectare); N_{arv} é o número médio de árvores por hectare, estimado a partir da amostra obtida no Inventário Florestal; P é a probabilidade estimada pela f.d.p. normal bivariada, apresentada no Apêndice A

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)									Total
]15,4 - 17,4]]17,4 - 19,4]]19,4 - 21,4]]21,4 - 23,4]]23,4 - 25,4]]25,4 - 27,4]]27,4 - 29,4]]29,4 - 31,4]]31,4 - 33,4]	
9,0	43,70	32,74	23,88	17,03	11,91	8,19	5,55	3,71	2,46	149,18
18,0	5,90	3,49	2,02	1,15	0,64	0,35	0,19	0,10	0,06	13,91
27,0	0,94	0,49	0,26	0,13	0,07	0,03	0,02	0,01	0,00	1,94
36,0	0,16	0,08	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,27
Total	50,70	36,80	26,19	18,31	12,62	8,58	5,76	3,83	2,51	

Tabela B.8 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à poste para linhas de distribuição de energia elétrica (poste 1) obtidas a partir das árvores mensuradas no Inventário Florestal. Dimensões mínimas:
 $d_{\min} = 15,4 \text{ cm}$; $h_{\min} = 9,0 \text{ m}$

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)									Total
]15,4 - 17,4]]17,4 - 19,4]]19,4 - 21,4]]21,4 - 23,4]]23,4 - 25,4]]25,4 - 27,4]]27,4 - 29,4]]29,4 - 31,4]]31,4 - 33,4]	
9,0	12,97	2,52	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	15,77
18,0	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
27,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
36,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	12,99	2,52	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

Tabela B.9 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à poste para linhas de distribuição de energia elétrica (poste 2) obtidas a partir da f.d.p. normal bivariada. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 15,4$ cm; $h_{\min} = 13,0$ m.

$N_{\text{toras}} = N_{\text{arv}} \times P$, onde N_{toras} é o número estimado de toras destinadas à poste para distribuição de energia elétrica em cada posição do fuste e classe diamétrica (por hectare); N_{arv} é o número médio de árvores por hectare, estimado a partir da amostra obtida no Inventário Florestal; P é a probabilidade estimada pela f.d.p. normal bivariada, apresentada no Apêndice A

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)									Total
]15,4 - 17,4]]17,4 - 19,4]]19,4 - 21,4]]21,4 - 23,4]]23,4 - 25,4]]25,4 - 27,4]]27,4 - 29,4]]29,4 - 31,4]]31,4 - 33,4]	
13,0	47,64	35,12	25,28	17,84	12,37	8,45	5,69	3,79	2,50	158,68
26,0	2,87	1,59	0,86	0,46	0,25	0,13	0,07	0,03	0,02	6,27
39,0	0,21	0,10	0,05	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,40
Total	50,71	36,81	26,20	18,33	12,63	8,58	5,76	3,83	2,52	

Tabela B.10 Estimativas do número de toras por hectare destinadas à poste para linhas de distribuição de energia elétrica (poste 2) obtidas a partir das árvores mensuradas no Inventário Florestal. Dimensões mínimas: $d_{\min} = 15,4$ cm; $h_{\min} = 13,0$ m

Altura (m)	Classes de Diâmetro (cm)									Total
]15,4 - 17,4]]17,4 - 19,4]]19,4 - 21,4]]21,4 - 23,4]]23,4 - 25,4]]25,4 - 27,4]]27,4 - 29,4]]29,4 - 31,4]]31,4 - 33,4]	
13,0	2,36	0,23	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,59
26,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
39,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Total	2,36	0,23	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	