

JULIANNE DE CASTRO OLIVEIRA

**MODELAGEM DE CRESCIMENTO E PRODUÇÃO DE POVOAMENTOS DE
EUCALIPTO EMPREGANDO MÍNIMOS QUADRADOS GENERALIZADOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ciência Florestal para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
2012**



**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

O48m
2012

Oliveira, Julianne de Castro, 1987-

Modelagem de crescimento e produção de povoamentos de eucalipto empregando mínimos quadrados generalizados / Julianne de Castro Oliveira. – Viçosa, MG, 2012. xi, 75f. : il. (algumas col.) ; 29cm.

Orientador: Carlos Antonio Alvares Soares Ribeiro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Inclui bibliografia.

1. Eucalipto - Crescimento - Modelos matemáticos.
2. Estatística. I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

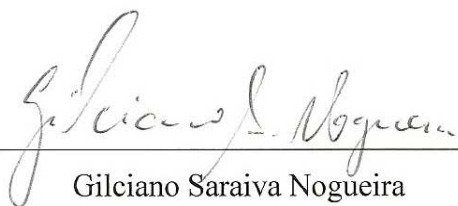
CDO adapt. CDD 634.956

JULIANNE DE CASTRO OLIVEIRA

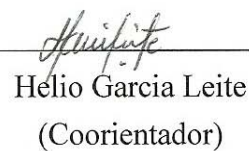
**MODELAGEM DE CRESCIMENTO E PRODUÇÃO DE POVOAMENTOS DE
EUCALIPTO EMPREGANDO MÍNIMOS QUADRADOS GENERALIZADOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ciência Florestal para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

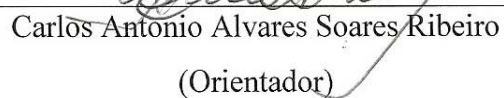
APROVADA: 04 de Julho 2012.



Gilciano Saraiva Nogueira



Hélio Garcia Leite
(Coorientador)



Carlos Antonio Alvares Soares Ribeiro
(Orientador)

*Aos meus pais, Emilson e Eliete, e irmão
Vinícius*

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina”

Cora Coralina

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, energia de tudo que nos une e fortifica, pela positividade, saúde e orientação.

Aos meus pais, Emilson e Eliete, pelo privilégio de ser fruto de uma união abençoada, por me ensinarem o significado do amor em sua forma mais pura e verdadeira e por me ofertarem o estímulo à educação como a maior e melhor herança que eu poderia receber!

Ao meu irmão Vinícius, me amou e apoiou em todos os momentos difíceis sem, contudo, deixar de fazer uma brincadeira!

Ao meu avô Dilson, que mesmos nos mais belos jardins da eternidade, sempre me incentivará a ser o melhor que eu puder!

Ao Engenheiro Florestal Ranieri Ribeiro Paula, por ter sido o primeiro incentivador ao meu ingresso na Pós-Graduação e pelo carinho e cumplicidade incondicionais!

À tia Vicentina, à “quase” irmã Myrian, ao sobrinho João Marcelo e à cunhada Andreia pela alegria em fazerem parte da minha família!

À Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, pelos ensinamentos pessoais e profissionais e pelo título de Engenheira Florestal, no qual tenho muito orgulho.

Ao Programa e professores da Pós-Graduação em Ciência Florestal da Universidade Federal de Viçosa, pela formação, oportunidade e experiências profissionais únicas.

Ao amigo e orientador, Prof. Dr. Carlos Antonio Alvares Soares Ribeiro (Charles), pela orientação, carinho, ensinamentos, confiança e por acreditar no meu potencial mais do que eu mesma!

Ao amigo e coorientador, Prof. Dr. Helio Garcia Leite, pela dedicação, parceria, ensinamentos e por ser um dos grandes responsáveis pela realização desta etapa da minha vida profissional!

Ao Prof. Dr. Gilciano Saraiva Nogueira, pela sugestão inicial do trabalho e considerações à dissertação.

Ao CNPq e a Universidade Federal de Viçosa, pelo apoio à pesquisa e concessão da bolsa de estudos.

Aos amigos do grupo “Tipo Rei”, que mesmo longe, me transbordam de energias positivas e felicidade em saber que tenho grandes e verdadeiros amigos!

Às parceiras de república pela convivência e à amiga Angélica por fazer dos dias difíceis bons motivos de rizada.

Aos colegas do Laboratório SIGMA, ao Gustavo pela valiosa ajuda na dissertação e à parceira de mestrado Kelly por me aturar nas disciplinas, trabalhos, viagens e por estar sempre presente.

SUMÁRIO

RESUMO	viii
ABSTRACT	x
1.INTRODUÇÃO	1
1.1Hipóteses	2
1.2Objetivos	2
1.2.1Objetivo geral.....	2
1.2.2Objetivos específicos	3
2.REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1Modelos de crescimento.....	4
2.2Estimativa dos parâmetros	6
2.3Problemas das estimativas por mínimos quadrados ordinários.....	9
2.3.1Heterocedasticidade	10
2.3.2 Autocorrelação residual	11
3.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	13
CAPÍTULO 1	17
Modelagem convencional do crescimento e da produção de um povoamento de eucalipto	17
1.INTRODUÇÃO	17
2.MATERIAL E MÉTODOS	19
2.1Descrição dos dados.....	19
2.2Altura dominante.....	19
2.2.1Análise dos modelos	21
2.3Capacidade produtiva.....	22
2.4Modelagem e prognose da área basal e do volume em nível de povoamento	23
2.4.1Análise dos modelos	25
3.RESULTADOS E DISCUSSÃO	27
3.1Modelos de altura dominante e determinação da capacidade produtiva.....	27
3.2Alternativas de modelagem e prognose da área basal e volume em nível de povoamento	30
4.CONCLUSÕES	39
5.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	40

CAPÍTULO 2	42
Modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento por Mínimos quadrados generalizados	42
1. INTRODUÇÃO	42
2.MATERIAL E MÉTODOS	44
2.1Métodos de estimativas do modelo de altura dominante e determinação da capacidade produtiva.....	44
2.2Métodos de estimativas dos modelos e prognose para área basal e volume em nível de povoamento	46
2.3Avaliação dos ajustes e comparação entre os modelos.....	47
2.4Prognose.....	49
3.RESULTADOS E DISCUSSÃO	50
3.1Modelo de altura dominante e determinação da capacidade produtiva	50
3.2Modelos e prognose para área basal e volume em nível de povoamento	54
3.3Prognose.....	72
4CONCLUSÕES	74
5REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75

RESUMO

OLIVEIRA, Julianne de Castro, M. Sc. Universidade Federal de Viçosa, julho de 2012. **Modelagem de crescimento e produção de povoamentos de eucalipto empregando mínimos quadrados generalizados.** Orientador: Carlos Antonio Alvares Soares Ribeiro. Coorientador: Helio Garcia Leite.

Este trabalho teve como objetivo avaliar a eficiência estatística e aplicabilidade da modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento para plantios comerciais não desbastados de eucalipto (*Eucalyptus* sp.), localizados na região norte do Estado de Minas Gerais, por meio do método de mínimos quadrados generalizados. Foram coletadas variáveis dendrométricas de 2698 parcelas permanentes de inventários florestais contínuos. Inicialmente, testaram-se os modelos Logístico e de Gompertz para modelagem em altura dominante e três alternativas baseadas no modelo reduzido de Clutter, ambos pelo ajuste por mínimos quadrados ordinários. A análise dos modelos fundamentou-se no coeficiente de determinação ajustado ($R_{ajust.}^2$), na raiz quadrada do erro médio ($RQEM$), no erro médio percentual de predição ($bias\%$), no sinal e significância dos coeficientes e na distribuição gráfica dos resíduos. Para as alternativas do modelo de Clutter, foram também realizados os testes de homogeneidade da variância, de autocorrelação e de normalidade dos resíduos. O modelo Logístico foi escolhido para modelagem da altura dominante. Para as alternativas de modelagem do crescimento em volume e área basal, a variável altura dominante observada pode ser utilizada em substituição ao índice de local na equação de projeção da área basal e, ainda, resultar em melhorias no ajuste. Não houve diferença significativa nas estimativas de produtividade na idade técnica de corte entre as três alternativas. Entretanto, foram comprovadas violações aos pressupostos estatísticos de homocedasticidade e independência dos resíduos, comprometendo, assim, a consistência estatística da modelagem. Posteriormente, foram comparados os ajustes por mínimos quadrados ordinários (MQO) com os ajustes por mínimos quadrados generalizados (MQG), mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade (MQG_W) e mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade e a autocorrelação residual (MQG_WC). A análise dos ajustes deu-se pela $RQEM$, $bias\%$, no sinal e significância dos coeficientes, na distribuição gráfica dos resíduos e na verificação das idades técnicas de colheita (ITC) e das produtividades nas ITC. A influência dos métodos de ajuste na aplicação das alternativas de modelagem foi

verificada pela prognose volumétrica dos Incrementos Médios Anuais (IMA) aos 6 e 7 anos. Os modelos reajustados por mínimos quadrados generalizados foram comparados pelo Critério de Informação de Akaike (AIC), Critério de Informação Bayesiano (BIC) e Teste de Razão da Máxima Verossimilhança (TRMV). Os baixos valores do AIC e BIC e elevado valor e significância do TRMV demonstraram a superioridade do modelo Logístico para altura dominante com ajuste por mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade e a autocorrelação residual. Para as alternativas de modelagem do modelo de Clutter, demonstrou-se que a inconsistência no coeficiente α_1 pelo MQO vincula-se também, à ocorrência de autocorrelação residual. A consideração do MQG_WC na distribuição de frequência dos resíduos nas classes de erro de $\pm 10\%$ e $\pm 20\%$ para as alternativas 1 e 2 foi substancialmente superior em relação ao MQO. Em relação ao *bias%*, *RQEM*, AIC, BIC e à significância do TRMV, as alternativas foram mais eficientes por meio da utilização do método MQG_WC. Não houve diferença significativa nas estimativas de produtividade na idade técnica de colheita. A ausência de diferença entre a prognose com os métodos de ajuste mostrou que a modelagem requerida até os dias atuais não deve resultar em viés por conta de pressupostos estatísticos, mas reafirma a relevância em se utilizar o método MQG_WC por ser mais eficiente estatisticamente.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Julianne de Castro, M. Sc. Universidade Federal de Viçosa, July, 2012.
Growth and yield modelling of eucalyptus using generalized least squares.
Adviser: Carlos Antonio Alvares Soares Ribeiro. Co-adviser: Helio Garcia Leite.

This study aimed to evaluate the efficiency and applicability of growth and yield statistical modeling of eucalyptus (*Eucalyptus* sp.) plantations, in northern region of Minas Gerais state, by generalized least squares. Dendrometric variables were collected from 2698 permanent plots in continuous forest inventories. First, were tested Logistic and Gompertz models for dominant height modelling and three alternatives of Clutter model, both by ordinary least squares. The analysis was based on Adjusted R-square ($R_{ajust.}^2$), Root Mean Square Error (*RMSE*), average rate error prediction (*bias%*), sign and significance of parameters and graphical errors distributions. For the alternative Clutter models were also performed tests for homogeneity of variance, residual autocorrelation and normality of residuals. The logistic model was chosen to model the dominant height. For the alternative model of growth in volume and basal area, the dominant height observed variable can be used to replace the site index in basal area equation and results in improvements. There was no significant difference in the technical harvest's age between the three alternatives. However, were proven violations of statistical assumptions of homoscedasticity and residuals' independence, undermining the statistical consistency of the modeling. Subsequently, were compared the fittings between ordinary least squares (OLS), generalized least squares (GLS), generalized least squares considering variance heterogeneity (GLS_W) and generalized least squares considering heterogeneity and residual autocorrelation (GLS_WC). The analysis was made by *RMSE*, *bias%*, sign and significance of parameters, graphical errors distribution, technical harvest's age and their productivities. The adjust methods influence was verified by volumetric prognosis of Increments Annual Average (IAA) with 6 and 7 years. The generalized least squares adjustments were compared by the Akaike Information Criterion (AIC), Bayesian Information Criterion (BIC) and test of maximum likelihood ratio (TMLR). Low values of AIC and BIC and significance of TMLR demonstrated superiority of Logistic model with generalized least squares adjustment considering the heterocedasticity and autocorrelation. For alternatives of Clutter model, it was demonstrated that the inconsistency α_1 parameter with OLS also binds to the occurrence of residual autocorrelation. The frequency distribution in the

error classes' $\pm 10\%$ and $\pm 20\%$ to MQG_WC was substantially better than the OLS, for alternatives 1 and 2. Regarding bias% RQEM, AIC, BIC and significance of TRMV the alternatives were more efficient by using the MQG_WC method. The lack of difference between the forecasting methods showed that the present modeling did not result in bias due to the statistical assumptions, but reaffirms the importance of using the method more efficiently than the MQG_WC.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas a demanda por produtos de origem florestal aumentou consideravelmente. No Brasil destacam-se, em termos de área plantada total, espécies comerciais de rápido crescimento dos gêneros *Eucalyptus* e *Pinus*, que possuem uma vasta gama de aplicação e trazem significativa contribuição ao PIB do país. Visando garantir a sustentabilidade e reduzir o uso lesivo dos ecossistemas naturais, é imprescindível sólido conhecimento a respeito do estoque de madeira em empreendimentos florestais como mecanismo de planejamento atual e futuro da produção.

O manejo florestal e, mais especificamente, estudos de crescimento e produção são fundamentais para o gerenciamento dos recursos florestais, uma vez que a predição é um elemento-chave para o sucesso e a sustentabilidade da atividade comercial (KIMMINS, 1990, 1997; PENG, 2000). O estudo de crescimento e produção utiliza-se de modelos estatísticos para se predizerem características quantitativas dos povoamentos (CAMPOS, 1980). O uso comum do termo “modelo de crescimento” geralmente se refere a um sistema de equações que permitem predizer o crescimento e a produção de povoamentos florestais em amplas variedades de condições (VANCLAY, 1994) e em qualquer nível de análise. É indispensável a avaliação das diversas técnicas de modelagem e o conhecimento acerca de suas limitações (GARCÍA, 1988).

Existem diferentes tipos de modelos para predição ou projeção do crescimento e produção florestal; na maioria dos casos, mais de um modelo pode se adaptar aos dados modelados. Portanto, a escolha se sujeitará à aplicação de métodos estatísticos, bem como à sua simplicidade e possibilidade de generalização (FLORIANO *et al.*, 2006).

O modelo de Clutter (1963) em sua forma mais usual é um dos modelos mais difundido e utilizado até hoje na área florestal do Brasil (CAMPOS & LEITE, 2009). É considerado um modelo em nível de povoamento, pois estima o crescimento e a produção por unidade de área a partir dos atributos idade, área basal e índice de local do povoamento. Estudos (DIAS *et al.*, 2005; SANTANA *et al.*, 2005; GORGENS *et al.*, 2007) e trabalhos técnicos atestam sua eficiência em modelagem. Entretanto, atualmente, diante de possíveis alterações nos padrões de crescimento advindas do predomínio de plantios clonais, este modelo vem apresentando algumas inconsistências (SALLES, 2010) ou falta de significância, fazendo-se necessário assim, a substituição ou eliminação de determinadas variáveis explicativas.

Algumas características dos dados de povoamentos florestais utilizados na modelagem podem causar dificuldades nas estimativas por regressão linear devido à violação de determinadas pressuposições estatísticas da distribuição dos erros (GARCÍA, 1988), tais como a ocorrência de heterocedasticidade da variância, decorrente do aumento da idade dos povoamentos, e autocorrelação residual, associada à remedição das variáveis ao longo do tempo. Essas violações, usualmente não avaliadas nos estudos de crescimento florestal, podem, todavia, ocasionar sérios prejuízos, como estimativas viesadas (PASTERNAK & SHALEV, 1994), subestimação das variâncias dos parâmetros (SOUZA, 1998) e ineficiência do ajuste (GUJARATI, 2006).

Visando garantir a confiabilidade estatística das estimativas na modelagem do crescimento e produção, investigou-se, como alternativa para os ajustes, o método dos mínimos quadrados generalizados.

1.1 Hipóteses

- ✓ H_{01} : O método dos mínimos quadrados ordinários em dois estágios é estatisticamente eficiente para o ajuste de modelos de crescimento e produção.
- ✓ H_{02} : A utilização de técnicas de regressão linear por mínimos quadrados ordinários em dois estágios para o ajuste de modelos de crescimento e produção justifica-se pela superioridade em eficiência em detrimento à correção da heterocedasticidade e autocorrelação pelo método de mínimos quadrados generalizados.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho foi avaliar a eficiência estatística e a aplicabilidade da modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento para plantios comerciais não desbastados de eucalipto (*Eucalyptus sp.*), por meio do método de mínimos quadrados generalizados.

1.2.2 Objetivos específicos

Têm-se como objetivos específicos:

- i) estimar e analisar a consistência estatística ao ajustar modelos de crescimento e produção em nível de povoamento baseados no modelo de Clutter utilizando-se o método dos mínimos quadrados ordinários;
- ii) avaliar a eficiência e aplicabilidade ao utilizar o ajuste por mínimos quadrados generalizados para modelos de crescimento e produção em nível de povoamento baseados no modelo de Clutter em comparação com o ajuste por mínimos quadrados ordinários.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Modelos de crescimento

Modelos são abstrações da dinâmica natural de povoamentos florestais e podem abranger crescimento, mortalidade e outras mudanças da composição e estrutura. Frequentemente envolvem um conjunto de equações e, por vezes, a necessidade de se programá-los computacionalmente (VANCLAY, 1994). Do caráter matemático dos mesmos, englobam-se variáveis dependentes, independentes e parâmetros. Além disso, compreendem erros associados capazes de expressar as variações não controláveis das estimativas e, conseqüentemente, a precisão do modelo utilizado, assinalando-se-lhes um caráter probabilístico.

Embora os dados requeridos, a forma e as variáveis de saída desses modelos possam variar, eles podem ser classificados de acordo com suas propostas e níveis de detalhe (PENG, 2000). Dependendo da estrutura e do processo de descrição, Mohren *et al.* (1994) categorizaram os modelos de crescimento e produção como empíricos, de processos (mecanísticos) ou híbridos.

Os modelos empíricos são derivados de grande massa de dados (parcelas permanentes ou inventário florestal) e descrevem a razão de crescimento como uma função de regressão de variáveis tais como índice de local, idade, densidade e área basal. Dependem do processo de produção, no qual um conjunto de sistemas de simulação de entradas e saídas é observado, registrado e determinados modelos estatísticos são inferidos. A maior vantagem desta abordagem é a descrição da melhor relação entre os dados coletados em campo e as variáveis determinantes do crescimento usando-se um modelo estatístico específico (KIMMINS, 1990; SHUGART *et al.*, 1992; PENG, 2000).

Modelos de processo procuram explicitar a representação de causalidade entre as variáveis, atingindo assim a generalidade do comportamento. Alguns tipos de modelos de processo têm sido desenvolvidos como tentativa de explicar o crescimento e a produção florestal (p.e., MIEHLE *et al.*, 2006; DECKMYN *et al.*, 2008; HÄRKÖNEN *et al.*, 2011; NIINIMÄKI *et al.*, 2012).

Já os modelos híbridos são uma combinação dos modelos empíricos e de processos, onde ambas as abordagens podem ser sobrepostas em uma mesma extensão. Incorporando elementos-chave de ambos os modelos, a abordagem pode resultar em

uma predição do crescimento e produção florestal em curto e longo prazo (PINJUV *et al.*, 2006). Alguns exemplos podem ser encontrados em Peng *et al.* (2002), Waterworth *et al.* (2007) e Zhang *et al.* (2008).

Os modelos podem também ser subdivididos em determinísticos e estocásticos. Os determinísticos têm como característica estimar os resultados esperados do crescimento, ou seja, para as mesmas condições iniciais, eles fornecem sempre os mesmos resultados. Já os estocásticos fornecem diferentes predições referentes à variação natural dos dados para as mesmas condições iniciais associando-as a uma probabilidade de ocorrência.

De acordo com o nível de detalhe, os modelos podem ser classificados como de árvores individuais, de distribuição de diâmetros e em nível de povoamento (DAVIS & JOHNSON, 1986). Os modelos de árvores individuais utilizam a árvore como unidade das estimativas de crescimento, que podem ser em função do diâmetro, altura ou da área basal. Este tipo de modelo pode ainda ser subdividido em dependente ou independente da distância e engloba também análises de mortalidade e competição (CAMPOS & LEITE, 2009).

Os modelos de distribuição de diamétrica têm como princípio estimar o número de árvores por classe diamétrica e segundo Burkhart *et al.* (1981), possibilitam a avaliação econômica de multiprodutos, além de serem flexíveis para se analisarem simulações de desbaste. Possuem como característica intrínseca o emprego de uma função de densidade de probabilidade (NOGUEIRA *et al.*, 2005).

Os modelos em nível de povoamento não explicam diretamente a variação do tamanho das árvores do povoamento: estimam o crescimento e a produção a partir de atributos do povoamento como idade, área basal e índice de local. O crescimento é estimado por unidade de área independentemente da classe de tamanho da árvore (CAMPOS e LEITE, 2009). O modelo de Clutter (1963) em sua forma mais usual [1] é um dos mais difundidos e utilizados até hoje na área florestal. Neste modelo a variável resposta (V_2) é função das idades I_1 e I_2 , do índice de local (S_1) e das áreas basais B_1 e B_2 .

$$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S_1 + \varepsilon_i \quad [1]$$

$$\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$$

onde:

B_1 = área basal (m^2/ha), na idade I_1 ;

B_2 = área basal futura (m^2/ha);

V_2 = volume futuro (m^3/ha);

I_1 = idade presente (meses);

I_2 = idade futura (meses);

S_1 = índice de local presente (m);

$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ = parâmetros do modelo;

ε_i = erro aleatório.

Segundo Campos e Leite (2009), o modelo de Cluttertem como características ser explícito, do tipo densidade variável, compatível e consistente. Explícito devido ao cálculo da produção em volume se dar de maneira direta; densidade variável, pois estima a produção em diferentes níveis de área basal; compatível dado a integral equação de crescimento resultar na equação de produção e da derivada desta fornecer a equação de crescimento; e consistente diante das estimativas poderem ser feitas em intervalos irregulares e, ainda assim, as estimativas de produção para uma mesma idade resultarem em iguais valores. Contudo, algumas experiências com modelagem têm demonstrado inconsistência ou falta de significância, principalmente, do parâmetro α_1 deste modelo, fazendo-se necessária substituição ou eliminação de determinadas variáveis explicativas, como o índice de local.

2.2 Estimativa dos parâmetros

A modelagem florestal utiliza-se prioritariamente de regressão linear para estimativas dos parâmetros. Análise de regressão linear pode ser considerada como um estudo da dependência entre variáveis (WEISBERG, 2005) por meio da geração de um modelo que represente o relacionamento entre as variáveis de interesse. Em funções de regressão, os dados são pares (x_i, y_i) com i variando de 1 a n . Para cada i , y_i comporta-se como uma variável aleatória dependente de x_i , como ser descrita como [2]:

$$y_i = g(x_i) + \varepsilon_i [2]$$

Em [2], y_i é uma variável explicada por $g(x_i)$. A função $g(x_i)$ é a função de interesse a ser estimada, sendo chamada de função de regressão. Tendo-se a estimativa desta função, $\hat{g}(x_i)$, os resíduos ε_i podem ser calculados. Os resíduos ou erros são usados para avaliar o ajuste dos modelos para $g(x_i)$. Em regressão, a variável preditora é também chamada de variável independente, explanatória, covariável ou simplesmente x . A variável prevista por x é chamada de variável dependente ou simplesmente y . Tendo-se o valor de x , pode-se entender melhor o comportamento de y (LEVINE, 2005).

Diversos métodos têm sido sugeridos para obtenção das estimativas de modelos de regressão linear (WEISBERG, 2005), nos quais o método dos mínimos quadrados tem tido relevante aplicabilidade. Esse estimador fundamenta-se na definição de uma curva que minimizará a soma dos quadrados das distâncias entre os resíduos e os valores observados. Suas estimativas podem ser computacionalmente simples, possuem soluções únicas (há somente um valor mínimo) (BROWNLEE, 1984), não tendenciosas (os parâmetros não contêm erros sistemáticos) e são ainda consistentes (quando o tamanho da amostra aumenta a solução converge para os valores verdadeiros da população) e eficientes. Sob certas restrições, este método tem a maior probabilidade de estar correto (SAYAGO *et al.*, 2004).

Partindo do modelo descrito em [2] e assumindo a função $g(x)$ como linear, tem-se:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i \quad [3]$$

onde β_1 e β_2 são os parâmetros do modelo. A equação resultante da estimativa de $g(x)$ resulta em:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i \quad [4]$$

sendo \hat{y}_i o valor estimado de y_i e $\hat{\varepsilon}_i$ a diferença entre os valores estimados e os observados de y . Em um conjunto com n pares de observações, adotando-se o critério de determinação da função em que a soma dos resíduos seja a menor possível e atribuindo-se importâncias (pesos) diferentes em relação ao tamanho dos resíduos elevados ao quadrado, tem-se então o princípio do método dos mínimos quadrados [5]:

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad [5]$$

onde a estimativa dos parâmetros será função da soma ao quadrado dos resíduos. Do processo de diferenciação de [5], obtem-se a estimativa dos parâmetros [6] e [7]:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad [6]$$

$$\hat{\beta}_1 = \hat{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} \quad [7]$$

Algumas premissas referentes à utilização de modelos de regressão linear para estimativas dos parâmetros por mínimos quadrados fazem-se necessárias, e.g., i) a linearidade dos parâmetros, ii) valores de x fixos em amostras repetidas (não estocástico), iii) resíduo com média zero, iv) homocedasticidade da variância dos resíduos, v) ausência de autocorrelação entre os termos do erro, vi) termos x_i e ε_i não correlacionados, vii) número de observações n maior do que o número de parâmetros a serem estimados, viii) variabilidade dos valores de x , ix) ausência de viés do modelo de regressão empregado e x) inexistência de multicolinearidade perfeita. Da garantia de conformidade com estas premissas, denotam-se ao método as propriedades de linearidade, não tendenciosidade e eficiência (variância mínima em relação aos demais estimadores não-tendenciosos) (GUJARATI, 2006).

O método dos mínimos quadrados generalizados também se configura de passível consideração para estimativas dos parâmetros. Segundo Gujarati (2006), diferentemente do método dos mínimos quadrados ordinários - *que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos* - o método dos mínimos quadrados generalizados *minimiza a soma ponderada dos quadrados residuais*, sendo o peso associado a cada observação inversamente proporcional ao seu resíduo, ou seja, as observações oriundas de populações com maiores resíduos apresentarão uma ponderação relativamente menor; constituindo-se uma estratégia mais confiável.

Outro método de estimativa dos parâmetros bastante mencionada na literatura é o da máxima verossimilhança (ML¹). Neste método, adotam-se como estimativa dos parâmetros os valores que maximizam a probabilidade (no caso de variável aleatória

¹ Maximum Likelihood

discreta) ou a densidade de probabilidade (para variável contínua) (HOFFMANN & VIEIRA, 1983). Em comparação com o método dos mínimos quadrados ordinários o estimador ML é tendencioso. Entretanto, apresenta propriedades teóricas mais fortes e, à medida que o tamanho da amostra aumenta, as estimativas tendem a se igualar às do método dos mínimos quadrados ordinários, denotando, assim, não tendenciosidade (GUJARATI, 2006).

2.3 Problemas das estimativas por mínimos quadrados ordinários

A demonstração de correta aplicabilidade dos modelos de regressão linear presume a veracidade de alguns pressupostos, como a homocedasticidade da variância e a existência de erros como variáveis aleatórias independentes, com média zero e distribuição normal. A ocorrência de homocedasticidade é verificada quando a distribuição das variâncias dos erros é homogênea; quando não satisfeita, emprega-se o termo heterocedasticidade. Já a violação da premissa de independência dos erros é denominada de autocorrelação residual.

Muitos pesquisadores não atentam, em suas publicações, para a possibilidade de violações grosseiras de algum dos pressupostos inerentes aos modelos de regressão linear. Essas violações ocorrem, principalmente, diante da falta de conhecimento entre as relações funcionais das variáveis, pela presença de erros sistemáticos e pela não normalidade dos dados (SAYAGO *et al.*, 2004).

A presença de violações estatísticas dos dados pode não resultar em grandes problemas nas estimativas dos parâmetros das equações de modelagem. Contudo, o estimador da matriz de covariância dos parâmetros estimados pode ser negativamente afetado (WEST, 1995). Tal viés pode levar à invalidação da hipótese estatística de normalidade para a equação ajustada (PALAHÍ *et al.*, 2004).

Garcia (1988) evidencia que, devido à natureza dos dados de modelagem do crescimento e produção florestal, algumas dificuldades de ajuste são passíveis de ocorrer. Uma dessas dificuldades refere-se à existência de correlação entre os dados provenientes de parcelas com medições repetidas (FERGUSON & LEECH, 1978), uma vez que os valores das variáveis no momento da medição englobam as condições das medições anteriores. Estas correlações se fazem presentes em erros de coleta de dados em pontos de medição compartilhados e, para um mesmo período, entre parcelas amostrais diferentes diante de condições climáticas semelhantes.

Outra dificuldade consiste na utilização de regressão linear em modelos com natureza multi-resposta. Por serem modelos com equações onde as variáveis dependentes e os parâmetros das diferentes equações podem ser correlacionados, os ajustes a um dado momento podem não ser satisfatórios. Bates e Watts (1986) apontaram a necessidade de se combinarem as informações entre as diferentes variáveis ao se estimarem os parâmetros destes tipos de modelos. Box e Draper (1965) utilizaram uma abordagem Bayesiana nas estimativas levando-se em consideração tais dependências. Já Bates e Watts (1986) fizeram uso do algoritmo de Gauss-Newton generalizado para o ajuste de parâmetros multi-respostas.

Um terceiro problema é a determinação de incrementos ou taxas de mudança em variáveis com diferentes intervalos de medição. Na maioria dos casos, as coletas de dados em campos não são realizadas em intervalos de tempo igualmente espaçados, principalmente diante de dificuldades de dispêndio com mão-de-obra e condições climáticas adversas. Além disso, um maior custo operacional se dá quando se deseja realizar a predição de incrementos para períodos distintos daqueles utilizados na calibração do modelo (SALAS *et al.*, 2008), uma vez que precisarão ser interpolados. Alguns métodos de interpolação (OCHI& CAO, 2003; CAO, 2004) foram desenvolvidos neste aspecto, mas, segundo Salas *et al.* (2008), não levam em consideração o comportamento biológico dos modelos.

2.3.1 Heterocedasticidade

A heterocedasticidade, como já definida anteriormente, corresponde à distribuição heterogênea das variâncias dos resíduos. Diversas razões podem justificar este comportamento. Uma possível causa refere-se à natureza dos dados de análise como, por exemplo, em estudos de regressão dos erros de procedimentos de colheita florestal em relação ao tempo de serviço, onde se espera a diminuição dos erros devido ao aprendizado ao longo do tempo. Outra possível razão deve-se ao método de coleta das variáveis dendrométricas, pois à medida que há aperfeiçoamento das técnicas e introdução de equipamentos sofisticados de processamento, a variância dos dados tende a cair. A presença de dados discrepantes também se configura como uma causa da heterocedasticidade, bem como a incorreta transformação dos dados (GUJARATI, 2006).

Mesmo com a violação do pressuposto de homogeneidade da variância, o estimador de mínimos quadrados permanece como linear e não tendencioso, mas, em contrapartida, deixa de ser eficiente (JOHNSTON, 1972). Isso pode denotar dúvida interpretação com relação aos testes de hipóteses habituais e, conseqüentemente, implicar inferências enganosas a respeito do modelo de regressão (GUJARATI, 2006).

Os métodos de detecção da heterocedasticidade, na maioria das vezes, se baseiam na verificação dos resíduos. Um dos métodos mais simples é a inspeção visual da distribuição gráfica dos resíduos. De forma menos subjetiva, existem testes estatísticos próprios, tais como o teste de Breusch-Pagan-Godfrey (GODFREY, 1978) e o teste de White (WHITE, 1980), sendo este último de fácil aplicabilidade e independente da premissa de normalidade (GUJARATI, 2006). Uma vez confirmada a presença de heterocedasticidade, faz-se necessária a realização de medidas corretivas. Uma delas consiste na utilização do método dos mínimos quadrados generalizados (GUJARATI, 2006), pois demonstra a obtenção de estimativas eficientes. Ferguson e Leech (1978) constataram substancial vantagem da utilização do método dos mínimos quadrados generalizados em funções de produção de pinus para dados heterocedásticos, conferindo consistência e eficiência assintótica às estimativas.

Segundo Hoffmann e Vieira (1977), a existência de heterocedasticidade pode inviabilizar a utilização do método dos mínimos quadrados para estimativas por regressão e, nesses casos, o uso da técnica de ponderação pelo inverso da variância (mínimos quadrados generalizados) configura uma solução viável. Contudo, embora haja melhoria na qualidade das estimativas, a utilização desta ponderação não atende a todas as especificações, tais como a independência dos erros (SOUZA, 1998).

2.3.2 Autocorrelação residual

A autocorrelação pode ser considerada como a correlação entre os integrantes de séries temporais ou espaciais de observações. Uma vez que o erro é autocorrelacionado, as estimativas de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados ordinários são afetadas e as estimativas do erro-padrão apresentam-se tendenciosas. Portanto, a análise de regressão ordinária para dados de séries temporais não é aconselhável, pois as premissões nas quais o modelo de regressão linear clássico é baseado geralmente são violadas (SAS Institute, 1999). De acordo com Gujarati (2006), semelhantemente ao que acontece com a heterocedasticidade, na presença de autocorrelação, os estimadores de

mínimos quadrados ordinários ainda são lineares e não tendenciosos sendo, porém, ineficientes.

Como principais causas da autocorrelação têm-se a exclusão de variáveis importantes originalmente candidatas a compor o modelo, a utilização de modelo inadequado para expressar o real comportamento dos dados, a utilização de dados manipulados, tais como valores médios, interpolados ou extrapolados e a ausência de estacionaridade das características do modelo ao longo do tempo (GUJARATI, 2006).

Além de o método de ajuste por mínimos quadrados ordinário estimar erroneamente o erro-padrão, deve-se considerar que os critérios de avaliação estatística dos modelos como o teste F de Fischer e o t de Student podem apresentar tendenciosidade na análise de regressão de séries temporais (SOUZA, 1998). Adicionalmente, uma vez que séries temporais normalmente se apresentam com distribuição não-linear, é preferível, nesses casos, usar critérios como o Critério de Informação de Akaike (AIC) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC) para seleção de modelos (FLORIANO *et al.*, 2006).

A detecção da autocorrelação pode também estar vinculada à análise visual da distribuição gráfica dos resíduos ou por meio da aplicação de testes estatísticos. O teste de Durbin-Watson é o teste mais utilizado para constatação de autocorrelação e sua principal vantagem advém do fato de se basear nos resíduos estimados (GUJARATI, 2006). Ainda conforme Gujarati (2006), uma vez comprovada a autocorrelação, a primeira medida a ser tomada é verificar se a autocorrelação é do tipo pura ou decorrente do tipo de modelo utilizado. Não obstante, em se tratando dos dados utilizados para modelagem do crescimento e produção florestal, destaca-se a ocorrência da autocorrelação pura, uma vez que ocorre em função da remedição das variáveis. Se constatada a natureza pura da autocorrelação, pode-se recorrer à adoção de transformações no modelo ou à utilização do estimador de mínimos quadrados generalizados da mesma forma quando da ocorrência de heterocedasticidade.

3. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATES, D.M.; WATTS, D. G. Multiresponse estimation with special application to linear systems of differential equation. **Technometrics**, v.27, n.4, 1986.
- BOX, G. E. P.; DRAPER, N. R. The bayesian estimation of common parameters from several responses. **Biometrika**, v.52, p.355-365, 1965.
- BROWNLEE, K. A. **Statistical Methodology in Science and Engineering**. 3.ed.(Malabar, FL.: Robert G. Krieger). p.77-80, 1984.
- BURKHART, H. E.; CAO, Q. V.; WARE, K. D. **A comparison of growth and yield prediction models for loblolly pine**. School of Forestry and Wildlife Resources, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 59 p., 1981.
- CAMPOS, J. C. C. Análise de Crescimento e Produção em Plantações desbastadas. **Revista Árvore**, v. 4, n. 2, p.157-169, 1980.
- CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: perguntas e respostas**. 3.ed. Viçosa, MG: Universidade Federal de Viçosa, 548 p., 2009.
- CAO, Q. V. Annual tree growth predictions from periodic measurements. **In: Proc. of the 12th Biennial Southern Silvicultural Research Conference**, Connor, K. F. (ed.), p. 212-215. US.For.Serv. Gen. Tech. Rep. SRS-71. Asheville, NC. 2004.
- CLUTTER, J.L. Compatible growth and yield models for loblolly pine. **Forest Science**, v.9, n.3, p.354-371, 1963.
- DAVIS, L.S.; JOHNSON, K.N. **Forest management**. 3.ed. New York: McGraw-Hill, 1987. 789p.
- DECKMYN, G.; VERBEECK, H.; OP DE BEECK, M.; VANSTEENKISTE, D.; STEPPE, K.; CEULEMANS, R. ANAFORE: A stand-scale process-based forest model that includes wood tissue development and labile carbon storage in trees. **Ecological Modelling**, v.215, p.345-368, 2008.
- DIAS A. N.; LEITE, H. G.; CAMPOS, J. C. C.; CARVALHO, A. F. Emprego de um modelo de crescimento e produção em povoamentos desbastados de eucalipto. **Revista Árvore**, v.29, n.5, 2005.
- DURBIN, J.; WATSON, G. S. Testing for serial correlation in least-square regression. **Biometrika**, v.38, p.159-171, 1951.
- FERGUSON, I. S.; LEECH, J. W. Generalized least squares estimation of yield functions. **Forest Science**, v.24, n.1, p.27-42, 1978.
- FLORIANO, E. P.; MÜLLER, I.; FINGER, C. A. G.; SCHNEIDER, P. R. Ajuste e seleção de modelos tradicionais para série temporal de dados de altura de árvores. **Ciência Florestal**, v. 16, n. 2, p.177-199, 2006.

GARCÍA, O. New class of growth models for even-aged stands: *Pinusradiate* in Golden Downs Forest. **New Zealand Journal of Forest Science**.v.14, p.65-88, 1984.

GARCÍA, O. Growth modelling—A (re)view. **New Zealand Forestry**, v.33, n.3, p.14-17, 1988.

GODFREY, L. Testing for multiplicative heterocedasticity. **Journal of Econometrics**, v.8, p.227-236, 1978.

GORGENS, E. B.; LEITE, H. G.; NOGUEIRA, G. S.; DIAS, A. N. Tendência de crescimento de povoamento de eucalipto após aplicação de desbaste. **Revista Árvore**, v.31, n.5, 2007.

GUJARATI, D. N. **Econometria básica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 816 p., 2006.

HÄRKÖNEN, S.; LEHTONEN, A.; K. EERIKÄINEN, K.; PELTONIEMI, M.; MÄKELÄ, A. Estimating forest carbon fluxes for large regions based on process-based modelling, NFI data and Landsat satellite images. **Forest Ecology and Management**, v.262, p.2364-2377, 2011.

HIGUCHI, N.; SANTOS, J.; LIMA, A. J. N. Biometria Florestal. Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia / Coordenação de Pesquisas em Silvicultura Tropical - Laboratório de Manejo Florestal – LMF/ Manaus, AM, 141p., 2008.

HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. Análise de regressão: uma introdução à econometria. 2 ed., São Paulo, HUCITEC, 379p., 1977.

JOHNSTON, J. **Econometric methods**, 2 ed. New York, McGraw-Hill, 1972.

KIMMINS, J. P. Modeling the sustainability of forest production and yield for a changing and uncertain future. **The Forestry Chronicle**, v.66, p.271-280, 1990.

KIMMINS, J.P. **Forest Ecology: A Foundation for Sustainable Management**, 2nd ed. Prentice Hall, New Jersey, 596 p., 1997.

LEVINE, D. M.; STEPHAN, D.; KREHBIEL, T. C.; BERENSON, M. L. **Estatística- Teoria e aplicações: utilizando o Microsoft Excel em Português**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

MIEHLE, P.; LIVESLEY, S. J.; P.M. FEIKEMA, P. M.; LI, C.; ARNDT, S. K. Assessing productivity and carbon sequestration capacity of *Eucalyptus globulus* plantations using the process model Forest-DNDC: Calibration and validation. **Ecological Modelling**, v.192, p.83-94, 2006.

MOHREN, G.M.L., BURKHART, H.E., JANSEN, J. J., Contrasts between biologically-based process models and management-oriented growth and yield models. **Forest Ecology and Management**, v.69, p.1-5, 1994.

NOGUEIRA, G. S.; LEITE, H. G.; CAMPOS, J. C. C.; CARVALHO, A. F.; SOUZA, A. L. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de *Eucalyptus* sp. submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, v.29, n.4, 2005.

NIINIMÄKI, S.; TAHVONEN, O.; MÄKELÄ, A. Applying a process-based model in Norway spruce management. **Forest Ecology and Management**, v.265, p.102–115, 2012.

OCHI, N.; CAO, Q.V. A comparison of compatible and annual growth models. **Forest Science**, v.49, n.2, p.285-290, 2003.

PALAHÍ M., TOMÉ M., PUKKALA T., TRASOBARES A., MONTERO G., Site index model for *Pinus sylvestris* in north-east Spain, **Forest Ecology and Management**, v.187, p.35-47, 2004.

PASTERNAK, H.; SHALEV, B.A. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. **Growth, Development & Aging**, v.58, n.1, p.33-39, 1994.

PENG, C. Growth and yield models for uneven-aged stands: past, present and future. **Forest Ecology and Management**, v.132, p.259-279, 2000.

PENG, C.; LIU, J.; DANG, Q.; APPS, M. J.; HONG JIANG, H. TRIPLEX: a generic hybrid model for predicting forest growth and carbon and nitrogen dynamics. **Ecological Modelling**, v.153, p.109–130, 2002.

PINJUV, G.; MASON, E. G.; WATT, M. Quantitative validation and comparison of a range of forest growth model types. **Forest Ecology and Management**, v.236, p.37–46, 2006.

SALAS, C.; STAGE, A. R.; ROBINSON, A. P. Modeling effects of overstory density and competing vegetation on tree height growth. **Forest Science**, v.54, n.1, p.107-122, 2008.

SANTANA, C.; MELLO, A. A.; EISFELD, R. L.; SANQUETTA, C. R. Sistema de equações para simulação do crescimento e da produção em povoamentos de *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden sem desbaste baseado no modelo de Clutter. **Ambiência**, v.1, n.2, p.239-256, 2005.

SAS Institute. **SAS/ETS® User's Guide**, Version 7-2. Cary: SAS Institute, 1550 p., 1999.

SAYAGO, A.; BOCCIO, M.; ASUERO, A. Fitting straight lines with replicated observations by linear regression: the least squares postulates. **Critical Reviews in Analytical Chemistry**, v.34, p.39-50, 2004.

SHUGART, H.H., SMITH, T.M., POST, W.M. The application of individual-based simulation models for assessing the effects of global change. **Ann. Rev. Ecology Systematics**, v.23, p.15-38, 1992.

SOUZA, G. da S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não linear**. Brasília: Embrapa-SPI/Embrapa-SEA, 1998. 489p.

SALLES, T. T. **Modelagem de crescimento e produção de clones de eucalipto em um sistema agroflorestal**. 2010. 97p. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa – MG.

VANCLAY, J.K. **Modelling Forest Growth and Yield**: Applications to Mixed Tropical Forests. CAB International, Wallingford, UK, 312 p., 1994.

WATERWORTH, R. M.; RICHARDS, G. P.; BRACK, C. L.; EVANS, D.M.W.A generalised hybrid process-empirical model for predicting plantation forest growth. **Forest Ecology and Management**, v.238, p. 231-243, 2007.

WEISBERG, S. **Applied linear regression**. 3. ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2005, 310p.

WEST, P.W. Application of regression analysis to inventory data with measurements on successive occasions. **Forest Ecology and Management**, v.71, p.227-234, 1995.

WHITE, H.A Heterocedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test of Heterocedasticity. *Econometrica*, v.48, p.817-818, 1980.

WILLIS, M. J. **Differential Equations**. Department of Chemical and Process Engineering, University of Newcastle, 1999. Disponível em: <http://lorien.ncl.ac.uk/ming/control/gen/differ1.pdf>. Acesso em: 20 de agosto de 2011.

ZHANG, J.; CHU, Z.; GE, Y.; ZHOU, X.; HONG JIANG, H.; CHANG, J.; PENG, C.; ZHENG, J.; JIANG, B.; JINRU ZHU, J.; YU, S. TRIPLEX model testing and application for predicting forest growth and biomass production in the subtropical forest zone of China's Zhejiang Province. **Ecological Modelling**, v.219, p.264-275, 2008.

CAPÍTULO 1

MODELAGEM CONVENCIONAL DO CRESCIMENTO E DA PRODUÇÃO DE UM POVOAMENTO DE EUCALIPTO

1. INTRODUÇÃO

O papel e os benefícios econômicos das florestas plantadas no fornecimento de matéria-prima para o desenvolvimento industrial são incontestáveis e confirmados pela participação nos mercados nacional e global de produtos florestais, pela geração de divisas e consequente arrecadação de tributos (ABRAF, 2010). Adicionalmente, os plantios comerciais tornaram-se alternativas à exploração das florestas naturais. Neste contexto de expressivo desenvolvimento e avanços tecnológicos do setor florestal, o manejo florestal torna-se de fundamental importância no processo de tomada de decisão na gestão da produção florestal. O manejador florestal é responsável por questões como: quando, como, onde e quanto será a colheita dos produtos florestais (OLIVEIRA, 2007). Deliberar sobre estes questionamentos demanda informações sobre as condições atuais e futuras dos recursos (BURKHART, 1981).

Visto que as florestas constituem sistemas biológicos dinâmicos em contínua modificação, a modelagem do crescimento e produção é essencial na projeção destas mudanças (SANTANA *et al.*, 2005) e, conseqüentemente, no fornecimento de informações relevantes ao gerenciamento dos produtos florestais. Segundo Berger (2000), a previsão do crescimento de uma floresta, por meio de curvas de projeção do desenvolvimento em diâmetro, altura e volume, é a condição básica em qualquer processo de planejamento. A necessidade crescente do conhecimento do estoque atual dos povoamentos, bem como de sua dinâmica, tem conduzido a um aprimoramento contínuo de técnicas de construção de modelos de crescimento e produção (RESENDE *et al.*, 2004). Estes modelos demonstram a relação da quantidade de produção ou crescimento e os fatores que explicam ou predizem esse crescimento.

Existem diferentes tipos de modelos para a predição ou a projeção do crescimento e da produção de madeira, entre os quais se destacam os do tipo povoamento total caracterizados por estimativas por unidade de área (CAMPOS & LEITE, 2009). Os melhores representantes deste tipo de modelo são os de densidade variável, que é considerada como parte dinâmica do sistema de equações (SALLES *et al.*, 2012).

O modelo de Clutter é um exemplo de modelo de povoamento total de densidade variável. Clutter (1963) derivou modelos analíticos compatíveis para crescimento e produção em volume para *Pinus taeda*, assegurando que a forma algébrica do modelo de produção poderia resultar da integração matemática do modelo de crescimento (SANTANA *et al.*, 2005). Segundo Campos e Leite (2009), o modelo de Clutter em sua forma reduzida é um dos mais difundidos e utilizados até hoje na área florestal. Contudo, apesar de sua fundamentada consistência e aplicabilidade, estudos a respeito de sua aplicabilidade e suficiência estatística fazem-se necessários, uma vez que a crescente introdução de espécies adaptadas e a utilização de técnicas silviculturais intensificadas suscitam modificações na taxa de crescimento florestal.

Em muitas situações, mais de um modelo pode se adaptar aos dados sujeitos à modelagem. Sendo assim, o problema passa a ser a escolha do melhor modelo, o que nem sempre é tarefa fácil. Em termos gerais, podem ser utilizados métodos estatísticos para definição da suficiência descritiva de um modelo, como também sua simplicidade e generalização (FLORIANO *et al.*, 2006). Dessa forma, o melhor modelo deverá ser aquele que mais se aproxima da realidade, de acordo com o critério estatístico definido.

Algumas características dos dados de povoamentos florestais utilizados na modelagem, ao se realizar a estimativa dos parâmetros por meio de regressão linear, podem resultar em inconsistências ou baixa confiabilidade, diante da violação de pressuposições estatísticas (GARCÍA, 1988), tais como normalidade dos resíduos, independência dos erros e homogeneidade da variância.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho foi ajustar e avaliara consistência estatística de modelos de crescimento e produção em nível de povoamento baseadas no modelo de Clutter por meio de regressão linear pelo método dos mínimos quadrados ordinários.

2. MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Descrição dos dados

Os dados utilizados neste estudo, cedidos por uma empresa florestal, são oriundos de povoamentos não desbastados de clones de eucalipto, localizados na região norte do Estado de Minas Gerais. As informações utilizadas são referentes à coleta de variáveis dendrométricas de parcelas permanentes para inventários florestais contínuos. As coletas, realizadas em nível de árvore em cada parcela, foram processadas obtendo como resultado as estimativas por parcela e ano de medição das variáveis altura média das árvores dominantes (*Hd*), área basal (*B*) e volume comercial com casca para diâmetros maiores ou iguais a 4 cm (*V4cc*). Os valores médios, mínimos e máximos dessas variáveis e o número de casos avaliados, constam da Tabela 1.

Tabela 1. Número de parcelas, amplitude (Min. e Max.), valores médios (Med.) e desvio padrão (D.P) dos dados em altura dominante (*Hd*), área basal (*B*) e volume até 4 cm com casca (*V4cc*)

Casos	Idade (meses)	Hd (m)				B (m ² ha ⁻¹)				V4cc (m ³ ha ⁻¹)			
		Mín.	Méd.	Máx.	D.P	Mín.	Méd.	Máx.	D.P.	Mín.	Méd.	Máx.	D.P
2698	24	10,7	16,2	19,7	2,2	3,5	8,3	14,2	2,7	15,6	55,2	113,2	25,6
	36	9,3	17,8	35,4	2,5	3,0	10,2	20,4	2,4	10,4	76,5	211,6	27,0
	48	13,4	21,8	46,8	2,8	4,8	13,3	31,9	2,7	22,3	120,9	264,0	38,1
	60	15,7	24,6	39,5	2,9	6,4	15,5	41,2	3,0	44,0	156,8	526,8	48,7
	72	18,2	26,4	37,5	2,9	8,3	16,6	34,6	3,0	62,0	179,7	429,5	50,1
	84	19,9	28,0	36,7	3,5	9,9	18,2	34,3	2,9	78,8	213,5	389,1	60,6
	96	20,9	28,6	35,6	4,0	11,7	19,2	26,3	3,1	90,1	235,7	406,4	79,0

2.2 Altura dominante

Inicialmente foram ajustados modelos para a altura dominante, pelos quais se obtiveram equações para determinar o índice de local como forma de expressar a capacidade produtiva. Os índices de local resultantes desta etapa foram utilizados como variável explicativa em algumas alternativas do modelo de Clutter e suas derivações testadas para determinação do crescimento em volume e em área basal.

A altura dominante adotada correspondeu à altura total média das cinco árvores dominantes de cada parcela. Essas árvores foram identificadas por ocasião da primeira medição da parcela, sendo selecionadas árvores sadias, com fuste bem definido, sem bifurcação e tortuosidade, livre de danos e com a copa situada no dossel superior, recebendo radiação solar direta. Apresenta-se, na Figura 1, a distribuição das alturas dominantes nos períodos de medição.

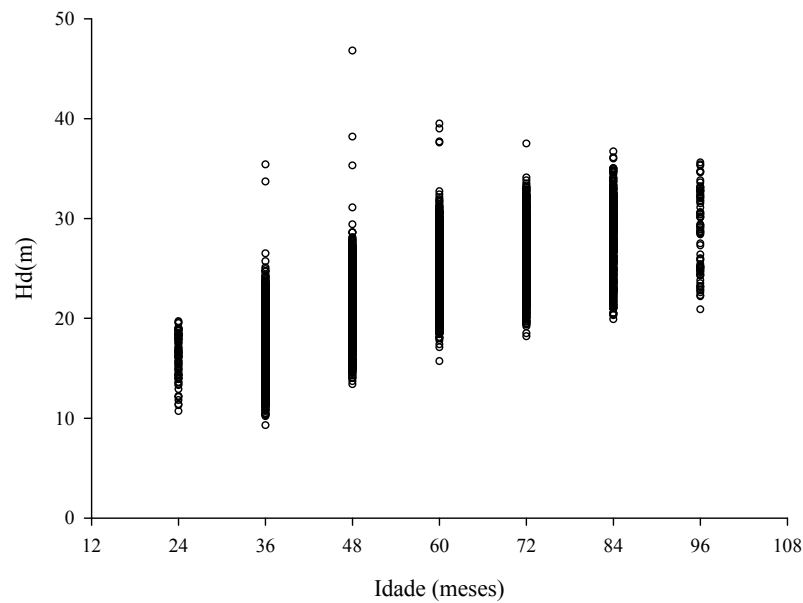


Figura 1. Alturas dominantes observadas.

Foram testados os modelos Logístico [1] e de Gompertz [2]. Ambos os modelos descrevem curvas de crescimento sigmoidais (ZEIDE, 1993); porém, no primeiro, a taxa relativa de crescimento decresce linearmente em função do tempo e a curva é simétrica em relação ao ponto de inflexão enquanto que, no segundo, o decréscimo é exponencial e a curva é assimétrica no ponto de inflexão.

$$Hd = \frac{\beta_0}{(1 + \beta_1 e^{-\beta_2 I})} + \varepsilon \quad [1]$$

$$Hd = \beta_0 e^{(-e^{\beta_1 - \beta_2 I})} \cdot \varepsilon \quad [2]$$

em que:

Hd = altura dominante (m);

I = idade (meses)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = parâmetros do modelo; e

ε = erro aleatório.

2.2.1 Análise dos modelos

A escolha do modelo com melhores ajustes baseou-se no coeficiente de correlação ($r_{\hat{y}y}$), na raiz quadrada do erro médio ($RQEM$) e no erro médio percentual de predição ($bias\%$); definidos, respectivamente, pelas expressões [3], [4] e [5]:

$$r_{\hat{y}y} = \frac{\sum(\hat{y} - \bar{\hat{y}})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(\hat{y} - \bar{\hat{y}})^2(y - \bar{y})^2}} \quad [3]$$

$$RQEM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 1}} \quad [4]$$

$$bias\% = 100 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(Y_i - \hat{Y}_i)}{Y_i} \right] \quad [5]$$

em que:

Y_i = valores observados da variável dependente;

\hat{Y}_i = valores estimados da variável dependente;

\bar{Y}_i = valor médio da variável dependente;

n = número de observações; e

p = número de variáveis independentes.

Adicionalmente, avaliaram-se a distribuição gráfica dos resíduos em relação aos valores estimados e a distribuição de frequência percentual dos resíduos por classe de erro, como subsídio à seleção do melhor modelo.

Como subsídio à verificação de violações estatísticas nos ajustes avaliou-se a ocorrência de heterocedasticidade da variância pelo teste de White ($\alpha = 0,05$). O Teste de White testa a hipótese nula de não heterocedasticidade da variância (SAS Institute, 2010).

A ocorrência de autocorrelação residual (não-independência dos resíduos) foi verificada por meio do teste de Durbin-Watson ($\alpha = 0,05$). O teste de Durbin-Watson fundamenta-se no valor da estatística d (HOFFMANN & VIEIRA, 1977), de forma que valores de d próximos de 2 indicam ausência de autocorrelação ou correlação serial (SAS Institute, 2010). De forma a simplificar a interpretação do teste, foram tabelados diferentes intervalos (d_L e d_u) que contêm o valor crítico para os diferentes níveis de significância. Para se testar a hipótese nula de ausência de autocorrelação residual, o valor d é comparado com d_L e d_u . Se $d < d_L$, o resultado é significativo, rejeitando-se a hipótese nula. Se $d > d_u$, o resultado é não-significativo e se $d_L < d < d_u$ o resultado é inconclusivo (HOFFMANN & VIEIRA, 1977).

Para investigar a normalidade dos resíduos, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov ($\alpha = 0,05$), que avalia, como hipótese nula, a presença de resíduos com distribuição normal (SAS Institute, 2010).

Os ajustes dos modelos e os testes estatísticos foram realizados no Procedimento MODEL do *software* SAS 9.2.

2.3 Capacidade produtiva

O método para determinar a capacidade produtiva pelo índice de local foi o da curva guia, com idade índice (I_i) de 72 meses. Este método foi escolhido diante da eficiência (DIAS *et al.*, 2005; CRUZ *et al.*, 2008) e compatibilidade com os dados, além de ser o mais utilizado pelas empresas do setor florestal no Brasil (CAMPOS & LEITE, 2009). As equações transformadas do modelo Logístico [6] e de Gompertz [7] para a estimativa do índice de local, foram:

$$S = Hd \frac{(1 + \beta_1 e^{-\beta_2 I})}{(1 + \beta_1 e^{-\beta_2 I_i})} \quad [6]$$

$$S = Hd \frac{e^{(-e^{\beta_1 - \beta_2 I_i})}}{e^{(-e^{\beta_1 - \beta_2 I})}} \quad [7]$$

sendo:

S = índice de sítio (m);

Hd = altura dominante (m);

I = idade atual (meses); e

Os índices de local resultantes foram utilizados como variáveis independentes dos modelos de crescimento e produção, de forma a incluir na modelagem o fator referente ao potencial de produção de madeira em relação ao local de plantio. Foram definidas três classes de capacidade produtiva (baixa - III, média - II e alta - I), referentes a um feixe de curvas anamórficas com intervalos determinados de acordo com a dispersão e amplitude da altura dominante em função à idade índice (72 meses).

2.4 Modelagem e prognose da área basal e do volume em nível de povoamento

As Figuras 2 e 3 ilustram a distribuição do volume e da área basal observados nas idades de medição.

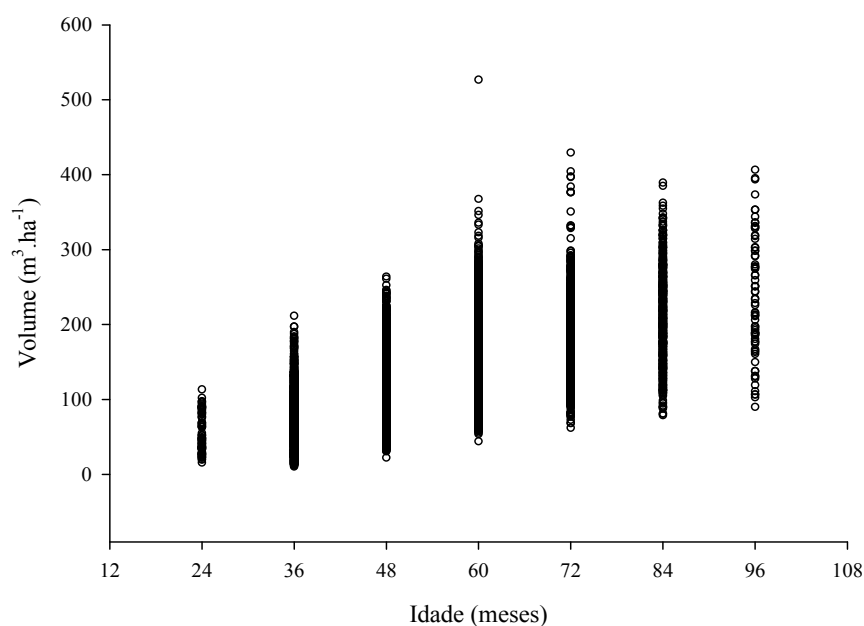


Figura 2. Distribuição do volume em função da idade.

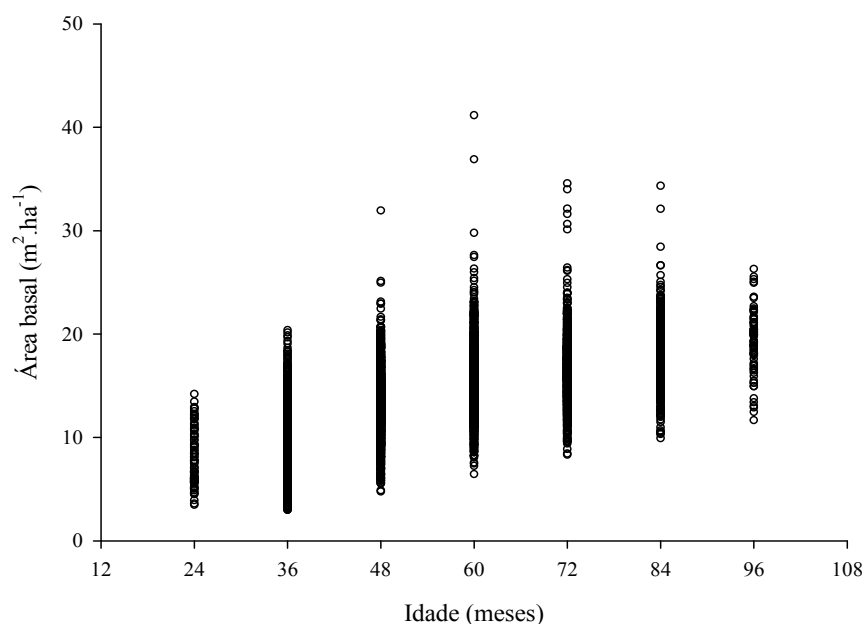


Figura3. Distribuição da área basalem função da idade.

O modelo de crescimento e produção de Clutter (1963) foi utilizado para prognose do crescimento e produção. O modelo de Clutter consiste de equações simultâneas, de forma que a variável dependente área basal (m^2ha^{-1}) aparece também como variável explicativa. Neste caso, o ajuste do modelo para estimar a área basal e a produção futuras deve ser obtido simultaneamente. Utilizou-se o método de mínimos quadrados em dois estágios para estimativa dos parâmetros. Este método consiste em duas aplicações sucessivas do método dos mínimos quadrados ordinários. No primeiro estágio, são estimados os parâmetros da equação reduzida, formada pela variável endógena (LnB_2) em função das demais variáveis exógenas. No segundo estágio, são utilizados os valores estimados da variável endógena (LnB_2) obtidos no primeiro estágio, para posterior substituição no modelo original e estimativa das equações estruturais (GUJARATI, 2006). Segundo Santana *et al.* (2005), este método é o mais indicado para o ajuste deste tipo de equações simultâneas.

Com base na forma reduzida do modelo de Clutter, foram testadas três alternativas de modelos (Tabela 2). A primeira refere-se ao modelo original reduzido. Na segunda, utiliza-se a variável altura dominante na idade atual, ao invés do índice de sítio, na equação referente à produção em área basal. Esta alternativa fundamentou-se em situações práticas onde tem sido comum a inconsistência do parâmetro α_1 associado ao índice de sítio. Sendo a altura dominante uma medida direta do povoamento, evitam-

se, assim, erros associados às estimativas. Já a terceira alternativa sugere uma provável ausência de contribuição estatística do índice de sítio na equação de produção em área basal. As alternativas basearam-se nos resultados de Alcântara (2012).

Tabela 2. Alternativas de Modelos de crescimento e produção avaliadas

Alternativa	Modelo
1	$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S_1 + \varepsilon_i$ $\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$
2	$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) Hd_1 + \varepsilon_i$ $\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} S_1 + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$
3	$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \varepsilon_i$ $\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$

B_1 = área basal (m²/ha), na idade I_1 ; B_2 = área basal futura (m²/ha); V_2 = volume futuro (m³/ha); I_1 = idade presente (meses); I_2 = idade futura (meses); S_1 = índice de local presente (m); Hd_1 = Altura dominante observada (m); $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ = parâmetros do modelo; ε_i = erro aleatório.

Em todas alternativas utilizaram-se somente as parcelas com mais de duas medições. O procedimento para a aplicação do modelo consistiu em: i) ajustar os modelos; ii) estimar a área basal (B_{1c}) compatível com o volume na idade atual (V_1); iii) aplicar a equação da área basal para a idade de futura (I_2) utilizando B_{1c} para obtenção da área basal futura; e iv) utilizar a área basal futura, obtida (B_2) em iii), para estimar o volume futuro (V_2).

2.4.1 Análise dos modelos

A análise dos modelos baseou-se no coeficiente de determinação ajustado ($R_{ajust.}^2$) e nas medidas de exatidão: i) raiz quadrada do erro médio ($RQEM$) e ii) erro médio percentual de predição ($bias\%$), descritas na seção 2.2.1. A análise dos resíduos foi expressa por meio da distribuição gráfica em relação aos valores estimados, bem como pela distribuição da frequência percentual dos resíduos por classes de erro.

A significância e o sinal dos coeficientes também foram avaliados. Em ajustes pelo método dos mínimos quadrados em dois estágios, avaliações estatísticas por testes como o F de Fischer e o t de Student podem apresentar tendenciosidade na análise de

regressão e o coeficiente de determinação deve ser utilizado com cautela (DEBERTIN, 1975). Sendo assim, a avaliação da significância dos parâmetros baseou-se em verificar a veracidade da hipótese de o valor absoluto de cada coeficiente ser maior que o dobro do seu respectivo erro-padrão. Caso verdadeira, a estimativa foi considerada significativa ($\alpha = 0,05$). Este método deriva da estatística t de Student, que é dada pela razão entre o valor estimado do parâmetro e o seu erro-padrão e foi sugerida por Salles *et al.* (2012). Adicionalmente, foram elaboradas as curvas de crescimento em área basal e volume para cada alternativa de forma a elucidar o comportamento da modelagem.

Como subsídio à verificação de violações estatísticas nos ajustes avaliou-se a ocorrência de heterocedasticidade da variância pelo teste de White ($\alpha = 0,05$), a autocorrelação residual (não-independência dos resíduos) por meio do teste de Durbin-Watson ($\alpha = 0,05$) e a normalidade dos resíduos pelo teste de Kolmogorov-Smirnov ($\alpha = 0,05$).

Após os ajustes, foram elaboradas curvas de incrementos médios e correntes anuais para as três classes de produtividade, de forma a elucidar o comportamento preditivo dos modelos em relação à determinação da idade técnica de colheita (ITC).

Os ajustes dos modelos e os testes estatísticos foram realizados no Procedimento MODEL do *software* SAS 9.2.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Modelos de altura dominante e determinação da capacidade produtiva

A Tabela 3 apresenta as estatísticas dos modelos Logístico e de Gompertz ajustados para as estimativas da altura dominante. Estes modelos apresentaram estimativas dos parâmetros significativas pelo teste t ($p < 0,01$). Com base no coeficiente de correlação ($r_{\hat{y}y}$), na raiz quadrada do erro médio ($RQEM$) e no erro médio percentual de predição ($bias\%$), apesar de ambos os modelos apresentarem valores relativamente próximos, o modelo Logístico obteve superioridade.

O teste de Durbin-Watson ($\alpha = 0,05$) comprovou a ocorrência de autocorrelação residual para os modelos avaliados. De maneira semelhante, o teste de White foi significativo em ambos os modelos a 95 % de probabilidade, demonstrando a presença de heterocedasticidade. Segundo Calegario *et al.* (2005), a heterogeneidade da variância e/ou a autocorrelação residual apresentam-se, frequentemente, nas bases de dados florestais e se caracterizam como violações das pressuposições básicas dos modelos lineares e não-lineares clássicos.

Já o teste de Kolmogorov-Smirnov ($\alpha = 0,05$) foi não-significativo, comprovando, assim, a normalidade da distribuição dos resíduos nos dois modelos avaliados.

Tabela 3. Parâmetros e estatísticas dos modelos Logístico e de Gompertz ajustados para altura dominante

Logístico							
$r_{\hat{y}y} = 0,77$; $RQEM = 2,850$; $bias\% = -1,8103$							
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t	d ⁽¹⁾	W's ⁽²⁾	KS ⁽³⁾
β_0	29,9525	0,2514	119,1433	<0,0001			
β_1	3,4204	0,122	28,0322	<0,0001	0,5433*	85,87*	0,04 ^{n.s}
β_2	0,0458	0,0014	33,1193	<0,0001			
Gompertz							
$r_{\hat{y}y} = 0,77$; $RQEM = 2,853$; $bias\% = -1,8223$							
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t	d ⁽¹⁾	W's ⁽²⁾	KS ⁽³⁾
β_0	31,03	0,3386	91,6497	<0,0001			
β_1	0,6254	0,0311	20,1122	<0,0001	0,5424*	88,25*	0,04 ^{n.s}
β_2	0,0345	0,0013	26,4217	<0,0001			

⁽¹⁾estatística d de Durbin-Watson, em que "*" indica significância e "n.s." indica não-significância ao nível de 5% de probabilidade; ⁽²⁾ teste de White, em que "*" indica significância e "n.s." indica não-significância ao nível de 5% de

probabilidade; ⁽³⁾ teste de Kolmogorov-Smirnov, em que "*" indica significância e "n.s." indica não-significância ao nível de 5% de probabilidade.

Na Figura 4 estão dispostos o gráfico dos resíduos percentuais em relação aos valores estimados de altura dominante (a) e a distribuição da frequência dos resíduos por classe de erro (b) pelos modelos Logístico e de Gompertz. A apresentação desses dois tipos de distribuição gráfica dos resíduos deve-se à avaliação de possíveis limitações quando da interpretação apenas do gráfico usual visualizado em (a). Diante de um elevado número de dados, apenas este tipo de avaliação gráfica pode resultar em equívocos decorrentes da sobreposição de pontos.

Contudo, o comportamento satisfatório da distribuição dos resíduos para os modelos Logístico (1a) e de Gompertz (2a), ambos com cerca de 63 % da frequência dos resíduos concentrados entre $\pm 10\%$ (Tabela 4), confirmou-se nos gráficos de distribuição de frequência percentual por classe de erro (1b e 2b). Este gráfico permite ainda confirmar, visualmente, o comportamento dos resíduos em todas as classes de erros e, assim, inferir sobre a normalidade da distribuição.

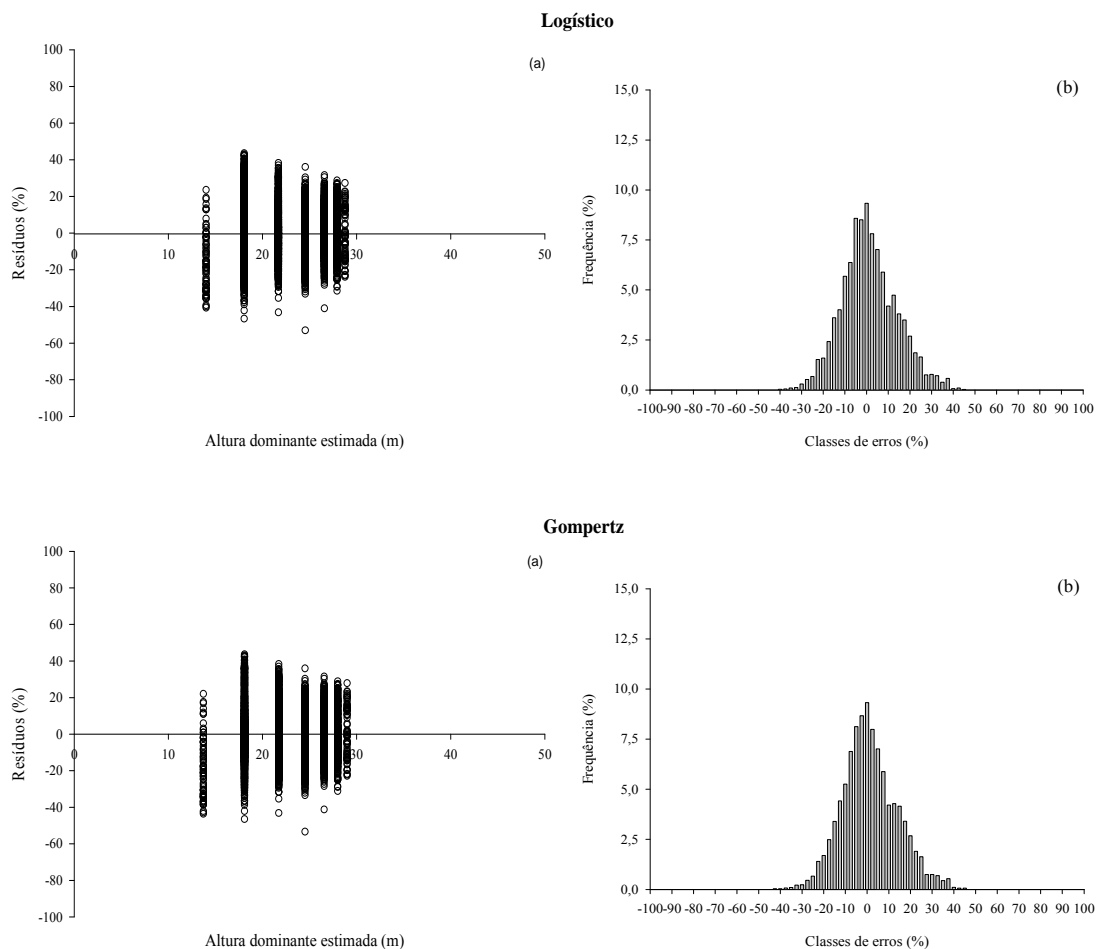


Figura 4. Distribuição dos resíduos em função da altura dominante estimada (a) e frequência residual por classe de erro (b) para os ajustes dos modelos Logístico e de Gompertz.

Tabela 4. Porcentagem da frequência dos resíduos em altura dominante entre os intervalos ± 10 e ± 20 para os modelos Logístico e de Gompertz

Modelo	Intervalos (%)	
	± 10	± 20
Logístico	63,3	89,6
Gompertz	63,3	89,7

O modelo logístico foi escolhido diante de seu desempenho satisfatório em estimar a altura dominante, em relação à significância dos coeficientes, das medidas de exatidão e da distribuição gráfica dos resíduos. Este modelo também foi utilizado para descrever o crescimento em altura dominante em Casaubon *et al.* (2001), Oliveira *et al.* (2009) e Salles *et al.* (2012).

Após a seleção do modelo Logístico para a estimativa da altura dominante em função da idade, os índices de local foram determinados. A equação resultante, bem como os parâmetros estimados, ficou assim definida:

$$S = Hd \frac{(1 + 3,4204 \cdot e^{-0,0458 \cdot I})}{(1 + 3,4204 \cdot e^{-34204 \cdot I_i})} \quad [8]$$

A partir da análise das alturas dominantes observadas, estabeleceram-se três classes de capacidade produtiva (Tabela 5) referentes a um feixe de curvas anamórficas, com intervalos determinados de acordo com a dispersão das alturas dominantes em relação à idade índice (72 meses).

Classe de capacidade produtiva	Limites de inclusão (m)
I	28 – 34
II	22 – 28
III	16 – 22

A Figura 5 apresenta a distribuição das alturas dominantes observadas e as curvas de índices de local para cada classe de capacidade produtiva (I, II e III). Pode-se verificar que as classes de capacidade produtiva definidas foram representativas do comportamento da altura dominante na idade índice.

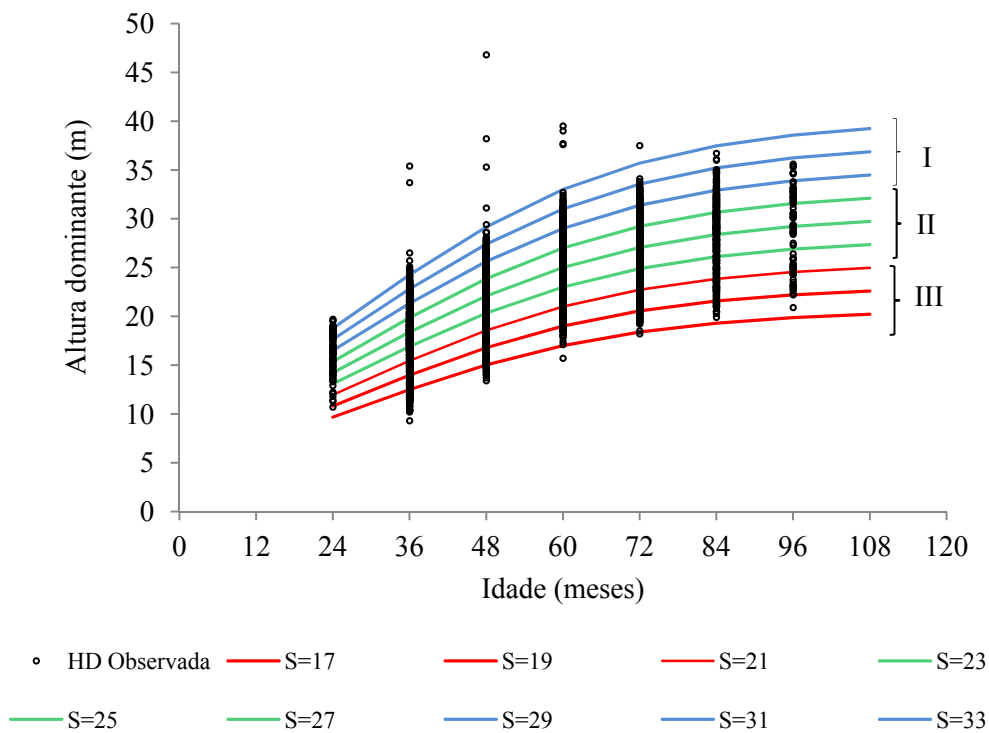


Figura 5. Curvas de índice de sítio nas classes de produtividade em função da idade.

3.2 Alternativas de modelagem e prognose da área basal e volume em nível de povoamento

As estatísticas dos parâmetros, bem como as medidas de precisão e exatidão dos ajustes, para as três alternativas de modelagem do crescimento e produção, podem ser verificadas na Tabela 6. Obteve-se ajuste satisfatório para as três alternativas de modelagem. Todas as estimativas dos parâmetros foram significativas pelo teste t ($p < 0,01$). Diante de a estatística t não ser a mais indicada em relação aos ajustes por mínimos quadrados ordinários em dois estágios (DEBERTIN, 1975), utilizou-se como referência o erro padrão. As estimativas dos parâmetros em todas as alternativas de modelagem apresentaram valores absolutos maiores do que o dobro do erro padrão associado, sendo assim, consideradas como significativas.

O coeficiente α_1 foi negativo para as alternativas 1 e 2. A menos que seu valor absoluto seja relativamente pequeno, a presença deste coeficiente negativo pode resultar em estimativas inconsistentes. As curvas de produção em volume em cada classe de produtividade não evidenciaram este tipo de inconsistência na modelagem (Figura 6). Contudo, nas curvas de produção em área basal para a alternativa 1 de modelagem houve tendência de subestimar as estimativas nas idades acima de 60 meses (Figura 7),

demonstradas pela junção das curvas em relação às classes de produtividade. Essa inconsistência, quando da aplicação do modelo, pode ocorrer devido a limitações nos dados e número de medições, a alguma inconsistência na relação entre a área basal e o índice de local (ALCÂNTARA, 2012) ou, ainda, devido às violações das premissas do método de mínimos quadrados ordinários. Para a alternativa 2, mesmo com coeficiente α_1 negativo e valor em módulo maior que o estimado para a alternativa 1, não houve inconsistências; isto pode estar vinculado a melhorias resultantes da utilização da altura dominante observada em detrimento do índice de sítio na equação de produção em área basal.

Tabela 6. Estimativas, erro padrão e significância dos parâmetros dos modelos atribuídos às três alternativas de modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento

Alternativa 1				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	<i>t</i>	p > <i>t</i>
α_0	3,629145	0,0296	122,38	<0,0001
α_1	-0,0084	0,00111	-7,54	<0,0001
β_0	1,440166	0,0352	40,96	<0,0001
β_1	-21,3134	0,6844	-31,14	<0,0001
β_2	0,027815	0,000716	38,84	<0,0001
β_3	1,173293	0,0141	83,41	<0,0001
Alternativa 2				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	<i>t</i>	p > <i>t</i>
α_0	3,608564	0,0220	164,37	<0,0001
α_1	-0,01001	0,00107	-9,32	<0,0001
β_0	1,057275	0,0259	40,84	<0,0001
β_1	-0,80205	0,0248	-32,78	<0,0001
β_2	0,042389	0,00102	41,95	<0,0001
β_3	1,171897	0,0138	85,05	<0,0001
Alternativa 3				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	<i>t</i>	p > <i>t</i>
α_0	3,407804	0,00427	798,57	<0,0001
β_0	1,468068	0,0359	40,85	<0,0001
β_1	-21,7287	0,6986	-31,11	<0,0001
β_2	0,028288	0,000731	38,69	<0,0001
β_3	1,160994	0,0144	80,71	<0,0001

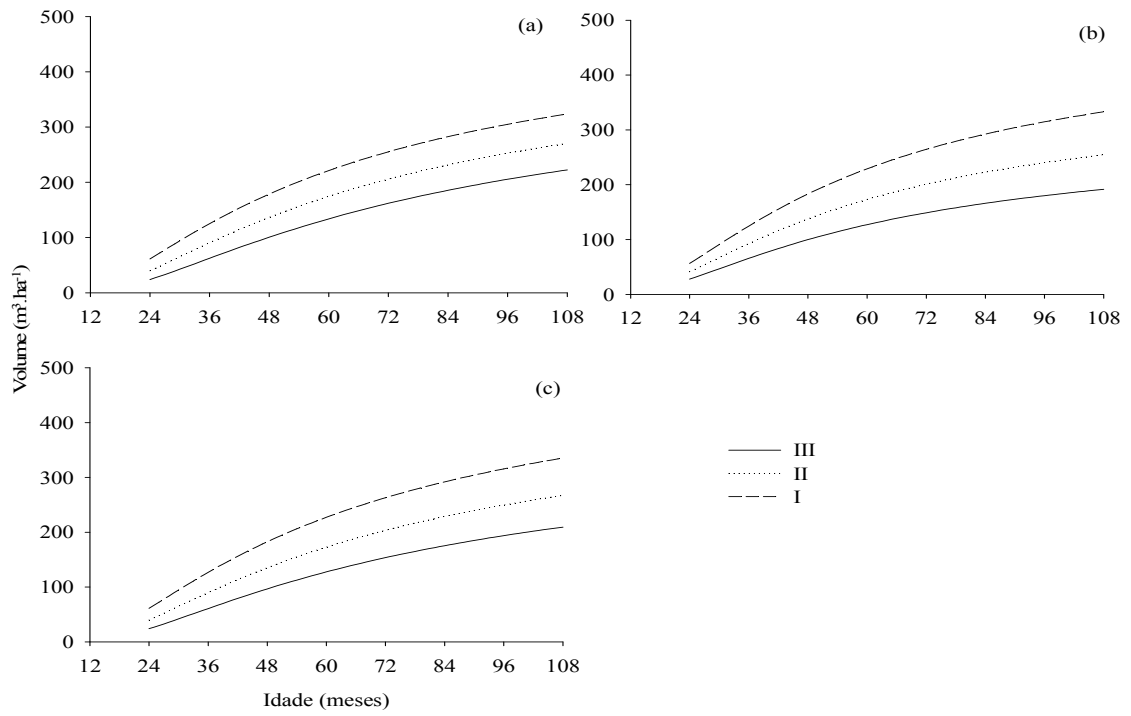


Figura 6. Curvas de produção em volume (m^3ha^{-1}) nas classes de produtividade I, II e III para as alternativas de modelagem 1 (a), 2 (b) e 3 (c).

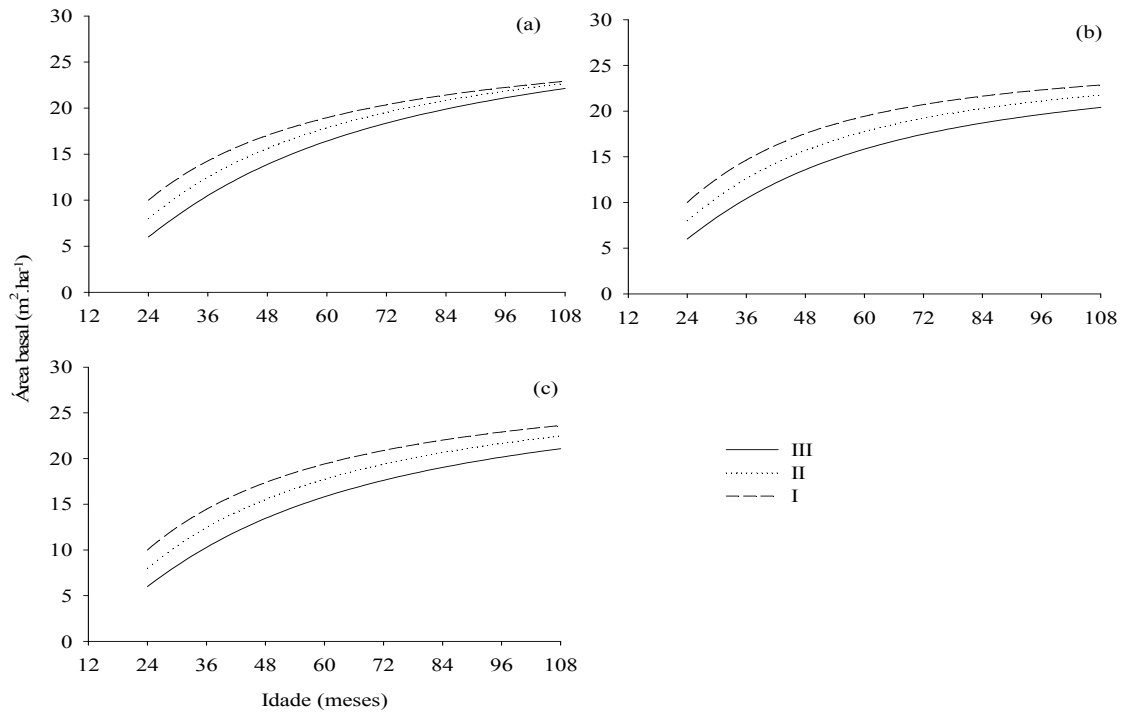


Figura 7. Curvas de produção em área basal (m^2ha^{-1}) nas classes de produtividade I, II e III para as alternativas de modelagem 1 (a), 2 (b) e 3 (c).

Os ajustes das três alternativas resultaram em coeficientes de determinação ajustado ($R_{ajust.}^2$) superiores a 0,90, indicando desempenho satisfatório dos modelos para estimar a produção em volume e área basal (Tabela 7). Contudo, evidencia-se um melhor ajuste da alternativa 2, tanto para a estimativa em volume quanto para área basal. A raiz quadrada do erro médio ($RQEM$) e o erro médio percentual de predição ($bias\%$) também se apresentaram aceitáveis nas três alternativas, com valores absolutos inferiores a 0,1 e 1 %, respectivamente, em todos os casos. Comparativamente, a alternativa 2 foi a que exibiu os menores valores absolutos de $RQEM$ e a alternativa 1 os $bias\%$ mais baixos.

O teste de White foi significativo em todas as três alternativas de modelagem a 95 % de probabilidade; assim, rejeitou-se a hipótese nula de não heterocedasticidade da variância. Diante deste resultado, pode-se inferir que as variâncias dos resíduos não se distribuem de forma homogênea em relação ao horizonte de análise. Em ajustes por regressão linear pelo método de mínimos quadrados, a homogeneidade da variância é uma exigência com relação às estimativas e, portanto, o resultado encontrado é uma violação estatística do método. Quando da ocorrência de heterocedasticidade, o estimador por mínimos quadrados pode ser não-tendencioso; porém, não é eficiente (HOFFMANN & VIEIRA, 1977). Uma vez que todas as alternativas testadas foram originadas de modelos usualmente aplicados, salienta-se a necessidade de uma criteriosa investigação dos dados, bem como das metodologias de estimativas utilizadas.

A análise de normalidade dos resíduos pelo teste de Kolmogorov-Smirnov ($\alpha = 0,05$) foi não-significativa em todos os ajustes, aceitando-se a hipótese nula de normalidade dos resíduos. Desta maneira, houve conformidade em relação ao requerido para estimativas por regressão linear.

O teste de Durbin-Watson ($\alpha = 0,05$) foi significativo na equação de volume nas três alternativas de modelagem, ou seja, foi comprovada a ocorrência de autocorrelação dos resíduos. A presença de autocorrelação, da mesma forma que na observância de heterocedasticidade, promove estimativas não-tendenciosas, porém ineficientes (GUJARATI, 2006).

Uma vez que a heterocedasticidade e a autocorrelação residual caracterizam-se como violações aos pressupostos estatísticos básicos dos modelos lineares e não-lineares clássicos, faz-se necessário a utilização do estimador de mínimos quadrados generalizados como tentativa de se remediar a presença de tais problemas (CALEGARIO *et al.*, 2005).

Tabela 7. Modelos ajustados, medidas de exatidão e estatísticas para as três alternativas de modelagem

Alternativa 1						
Modelo	$R^2_{ajust.}$	$RQEM$	$bias \%$	$d^{(1)}$	$W'S^{(2)}$	$KS^{(3)}$
$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S_1 + \varepsilon_i$	0,916	0,0651	0,701	1,7597 ^{n.s}	144,4*	0,04 ^{n.s}
$\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$	0,955	0,0809	0,546	1,2715*	2533*	0,04 ^{n.s}
Alternativa 2						
Modelo	$R^2_{ajust.}$	$RQEM$	$bias \%$	$d^{(1)}$	$W'S^{(2)}$	$KS^{(3)}$
$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) Hd_1 + \varepsilon_i$	0,916	0,0649	0,864	1,7423 ^{n.s}	121,6*	0,04 ^{n.s}
$\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} S_1 + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$	0,957	0,0792	0,744	1,3187*	2682*	0,03 ^{n.s}
Alternativa 3						
Modelo	$R^2_{ajust.}$	$RQEM$	$bias \%$	$d^{(1)}$	$W'S^{(2)}$	$KS^{(3)}$
$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \varepsilon_i$	0,915	0,0654	0,736	1,8106 ^{n.s}	80,6*	0,05 ^{n.s}
$\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$	0,954	0,0811	0,572	1,2820*	2589*	0,04 ^{n.s}

⁽¹⁾estatística d de Durbin-Watson, em que "*" indica significância e "n.s." indica não-significância ao nível de 5% de probabilidade; ⁽²⁾teste de White, em que "*" indica significância e "n.s." indica não-significância ao nível de 5% de probabilidade; ⁽³⁾teste de Kolmogorov-Smirnov, em que "*" indica significância e "n.s." indica não-significância ao nível de 5% de probabilidade.

Semelhante ao apresentado para os modelos de altura dominante optou-se pela geração de dois tipos de gráficos de distribuição dos resíduos para as três alternativas de modelagem (Figuras 8, 9 e 10, respectivamente), uma vez que o elevado número de dados poderia sugerir uma falsa interpretação usual do gráfico por pontos. Nas alternativas de modelagem analisadas todas as distribuições dos resíduos por pontos (a) mostraram-se satisfatórias, com baixa amplitude de resíduos percentuais, e os gráficos por classes de erros (b) confirmaram a normalidade da distribuição dos resíduos. Contudo, ambos os gráficos não foram sensíveis suficientes para se detectar visualmente a ocorrência de heterocedasticidade da variância dos resíduos, implicando assim, a necessidade de realização de testes estatísticos.

A Tabela 8 apresenta a concentração da frequência percentual dos resíduos nas classes de erro com amplitudes de $\pm 10 \%$ e $\pm 20 \%$ para as estimativas em volume. Quando da distribuição total, apesar do comportamento satisfatório das três alternativas,

a alternativa 3 foi significativamente superior em relação à distribuição gráfica dos resíduos, com cerca de 73 % entre as classes de erro de $\pm 10\%$ e cerca de 92 % entre as classes de erro de $\pm 20\%$. Isto demonstra o bom comportamento do modelo quando da exclusão da variável associada à capacidade produtiva.

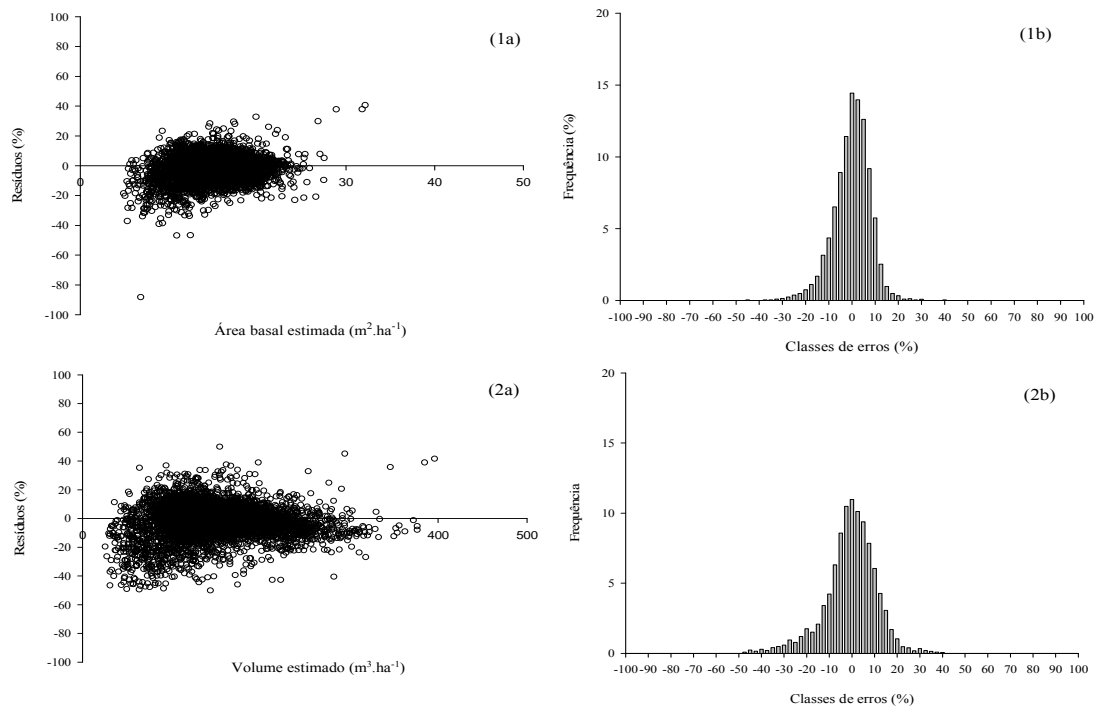


Figura 8. Resíduos percentuais (a) e frequência por classe de erro (b) em área basal (1) e volume (2) para a alternativa 1.

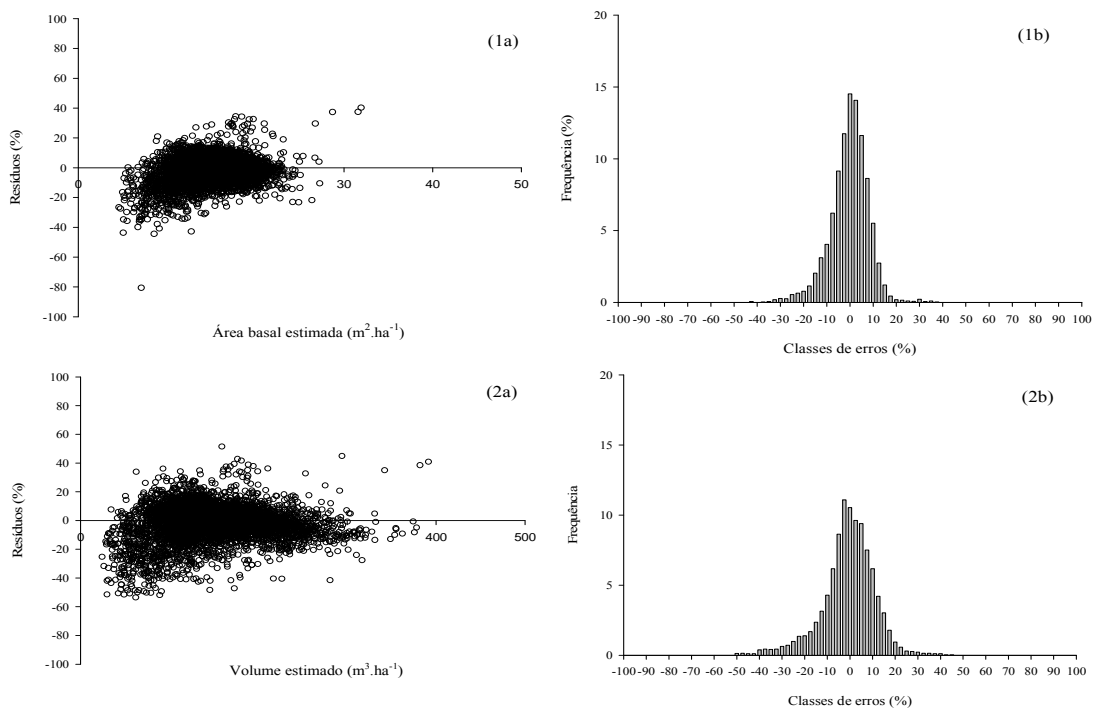


Figura 9. Resíduos percentuais (a) e frequência por classe de erro (b) em área basal (1) e volume (2) para a alternativa 2.

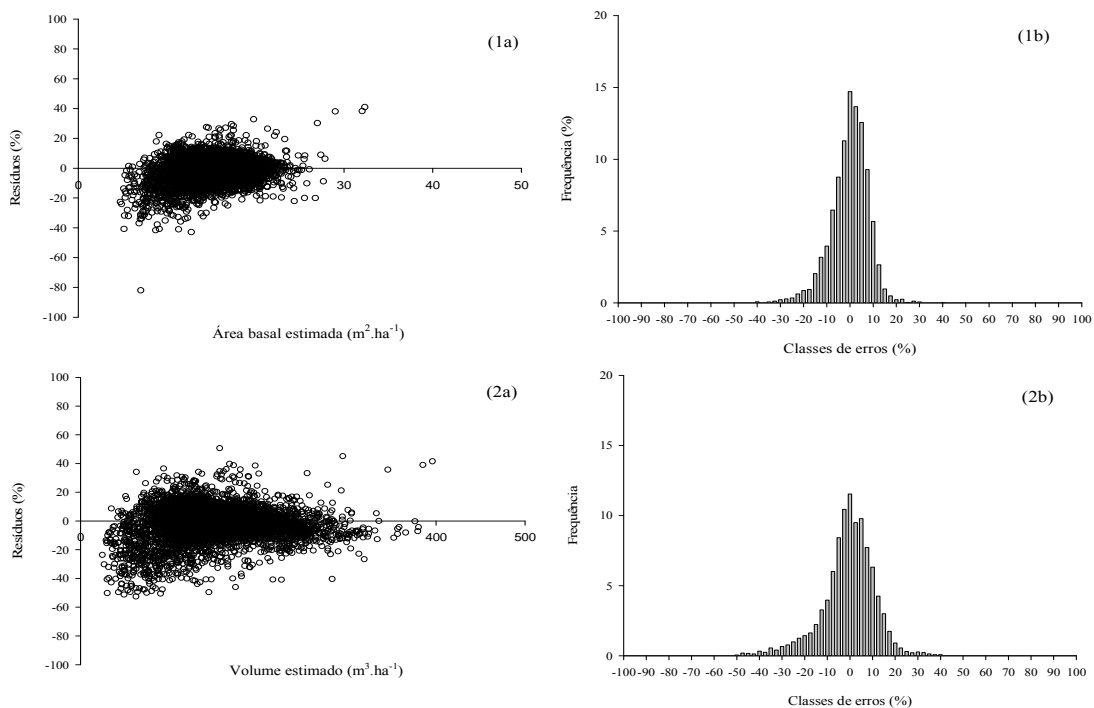


Figura 10. Resíduos percentuais (a) e frequência por classe de erro (b) em área basal (1) e volume (2) para a alternativa 3.

Tabela 8. Porcentagem da frequência dos resíduos em volume entre os intervalos $\pm 10\%$ e $\pm 20\%$ para as três alternativas de modelagem

Alternativas	Intervalos (%)	
	±10	±20
1	57,67	89,89
2	49,32	85,73
3	73,74	92,24

Na Figura 11 são apresentadas as relações entre os incrementos correntes e médios mensais em volume (m^3ha^{-1}) nas classes de capacidade produtiva para três alternativas de modelagem. A idade técnica de colheita (ITC), resultante da interseção das curvas de incremento médio e corrente, corroborou a ocorrência de menores idades técnicas de colheita para os melhores sítios (Tabela 9), conforme verificado em Clutter *et al.* (1983), Campos *et al.* (1996), Dias *et al.* (2005) e Demolinari *et al.* (2007). Na alternativa 2, apesar de não ter havido grandes diferenças na ITC, as respectivas produtividades diferiram consideravelmente e foram semelhantes às demais alternativas. Mesmo para a abordagem com diferentes alternativas de modelagem e seus respectivos ajustes, não houve diferença substancial nas estimativas de produtividade na ITC entre os modelos.

Baseando-se apenas na significância dos coeficientes, nas medidas de precisão e exatidão, as alternativas 2 e 3 apresentaram resultados satisfatórios, em detrimento da alternativa 1 que apresentou inconsistência quanto ao parâmetro α_1 da equação de área basal. Em relação à distribuição gráfica total dos resíduos, a alternativa 3 apresentou melhores resultados, uma vez que a maior parte da distribuição dos resíduos em volume concentrou-se entre as classes de $\pm 10\%$. Entretanto, apesar do bom desempenho da alternativa 3, sabe-se que o crescimento em área basal sofre influência da capacidade produtiva do local. Sendo assim, estes resultados suscitam maiores investigações estatísticas em relação à inclusão destas variáveis aos modelos.

Em contrapartida ao bom desempenho dos modelos, foram comprovadas violações aos pressupostos estatísticos necessários ao ajuste de regressão linear por mínimos quadrados ordinários, o que resulta em falta de consistência estatística e, portanto, em perda de eficiência da modelagem. Esta constatação reafirma a importância de se estudarem alternativas de modelagem e da análise criteriosa dos resultados, uma vez que a escolha por modelos que não expressam o comportamento biológico dos povoamentos florestais pode resultar em opções equivocadas de colheita e, conseqüentemente, em prejuízos financeiros significativos.

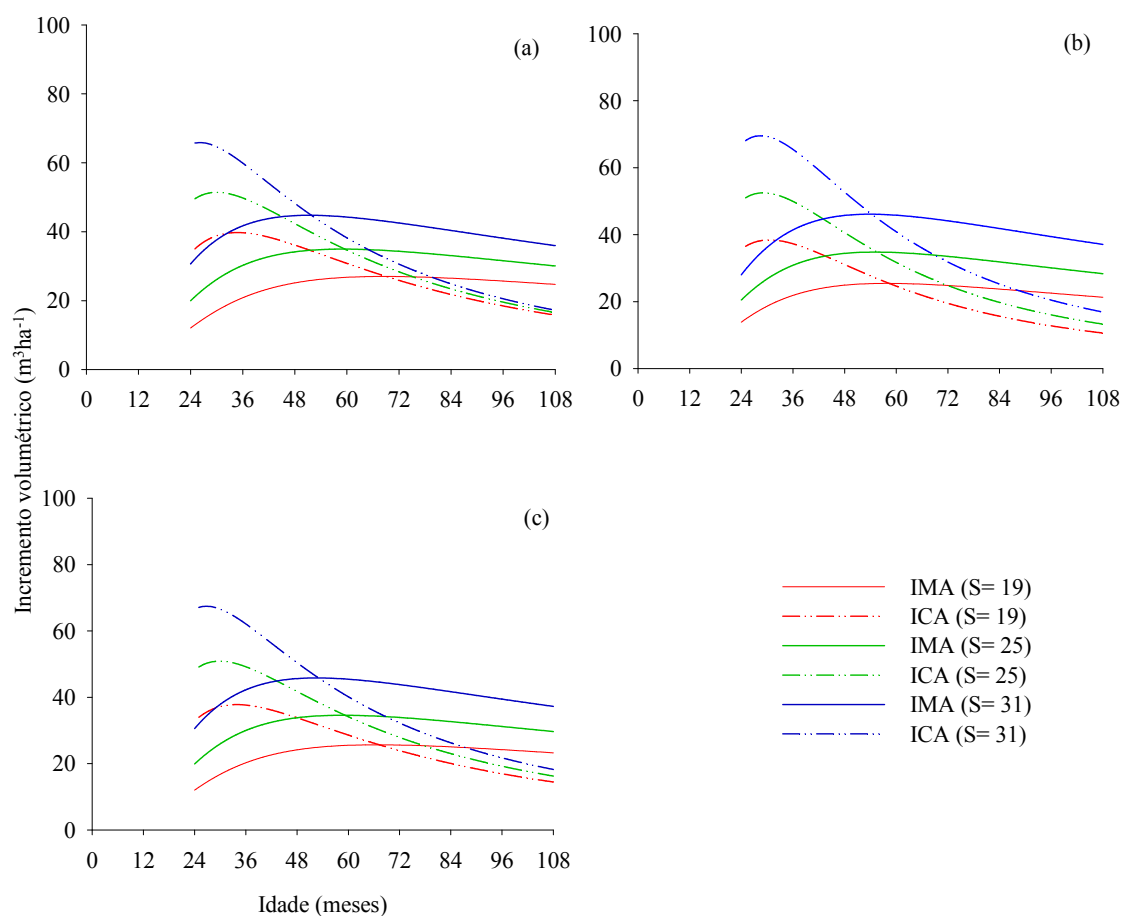


Figura 11. Incrementos correntes (ICA) e médios anuais (IMA) para as classes de produtividade I (S= 31), II (S= 25) e III (S= 19) para as alternativas 1 (a), 2 (b) e 3 (c).

Tabela 9. Idades técnicas de colheita por classe de produtividade e produtividade para as três alternativas de modelagem

Alternativas	Classes de produtividade					
	Idade técnica de colheita (meses)			Produtividade ($m^3 ha^{-1} ano^{-1}$) na idade técnica de colheita		
	I	II	III	I	II	III
1	52	60	69	44,76	34,95	27,02
2	54	56	59	46,12	34,80	25,46
3	53	59	67	44,98	34,59	25,68

4. CONCLUSÕES

- ✓ Rejeitou-se a hipótese nula H_{01} : O método dos mínimos quadrados ordinários em dois estágios é estatisticamente eficiente para o ajuste de modelos de crescimento e produção.
- ✓ O modelo Logístico é indicado para modelagem da altura dominante nos povoamentos contemplados no estudo.
- ✓ A altura dominante observada pode ser utilizada em substituição ao índice de local na equação de projeção da área basal do modelo de Clutter e, ainda, resultar em melhorias no ajuste.
- ✓ As três alternativas de modelagem avaliadas neste estudo resultaram nas mesmas produtividades na idade técnica de colheita.
- ✓ Foram comprovadas violações dos pressupostos estatísticos de homocedasticidade da variância e ausência de autocorrelação residual para os dados utilizados na modelagem da altura dominante e do Clutter, comprometendo, assim, a consistência estatística dos ajustes.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAF. Associação Brasileira de Produtores de Florestas Plantadas. Anuário estatístico da ABRAF. Ano base 2009/ ABRAF. – Brasília, 2010. 140p.

ALCÂNTARA, A. E. M. **Alternativas de modelagem para projeção do crescimento de eucalipto em nível de povoamento**. 2012. 63p. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa – MG.

BERGER, R. **Crescimento e qualidade da madeira de um clone de *Eucalyptus saligna* Smith sob o efeito do espaçamento e da fertilização**. 2000. 110 p. Dissertação(Mestrado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria – RS.

BURKHART, H. E.; CAO, Q. V.; WARE, K. D. **A comparison of growth and yield prediction models for loblolly pine**. School of Forestry and Wildlife Resources, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 59 p., 1981.

CALEGARIO, N.; CALEGARIO, CL. L.; MAESTRI, R.; DANIELS, L. Melhoria da qualidade de ajuste de modelos biométricos florestais pelo emprego da teoria dos modelos não lineares generalizados. **Revista Scientia Florestalis**, v.69, p.38-50, 2005.

CAMPOS, J. C. C.; ROSAS, M. P.; LEITE, H. G. Comparação de alternativas de determinação da idade técnica de corte em plantações de eucalipto. **Revista Árvore**, v.20, n.1, 1996.

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: perguntas e respostas**. 3.ed. Viçosa, MG: Universidade Federal de Viçosa, 548 p., 2009.

CASAUBON, E.A.; GURINI, L.B.; CUETO, G.R. Diferente calidad de estación en una plantación de *Populus deltoides* cv *Catfish 2* del Bajo Delta bonaerense del Río Paraná (Argentina). **Invest. Agr.:Sist. Recur. For**, v.10, n.2, 2001.

CLUTTER, J.L. Compatible growth and yield models for Loblolly pine. **Forest Science**, v.9, n.3, p.354-371, 1963.

CLUTTER, J. L. **Timber management: A quantitative approach**. New York: John Wiley & Sons, 1983. 333p.

CRUZ, J. P.; LEITE, H. G.; SOARES, C. P. B.; CAMPOS, J. C. C.; SMIT, L.; NOGUEIRA, G. S. Curvas de crescimento e de índice de local para povoamentos de *Tectona grandis* em Tangará da Serra, Mato Grosso. **Revista Árvore**, v.32, n.4, p.679-685, 2008.

DEBERTIN, D.L. Significance tests of regression coefficients: an additional reminder. **American Journal of Agricultural Economics**, v.57, 1975.

DEMOLINARI, R. A.; SOARES, C. P. B.; LEITE, H. G.; SOUZA, A. L. Crescimento de plantios clonais de eucalipto não desbastados na região de Monte Dourado (PA). **Revista Árvore**, v.31, n.3, 2007.

DIAS A. N.; LEITE, H. G.; CAMPOS, J. C. C.; CARVALHO, A. F. Emprego de um modelo de crescimento e produção em povoamentos desbastados de eucalipto. **Revista Árvore**, v.29, n.5, 2005.

FLORIANO, E. P.; MÜLLER, I.; FINGER, C. A. G.; SCHNEIDER, P. R. Ajuste e seleção de modelos tradicionais para série temporal de dados de altura de árvores. **Ciência Florestal**, v. 16, n. 2, p.177-199, 2006.

GARCÍA, O. Growth modelling—A (re)view. **New Zealand Forestry**, v.33, n.3, p.14-17, 1988.

GUJARATI, D. N. **Econometria básica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 816 p., 2006.

HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. Análise de regressão: uma introdução à econometria. 2 ed., São Paulo, HUCITEC, 379p., 1977.

OLIVEIRA, M.L.R. **Mensuração e modelagem do crescimento e da produção de povoamentos não-desbastados de clones de eucalipto**. 2007. 119p. Tese (Doutorado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa – MG.

OLIVEIRA, M.L.R.; LEITE, H.G.; NOGUEIRA, G.S.; CAMPOS, J.C.C. Modelagem e prognose em povoamentos não desbastados de clones de eucalipto. **Revista Árvore**, v.33, p.841-852, 2009.

RESENDE, R. R.; VALE, A. B.; SOARES, T. S.; SILVA, M. L.; COUTO, L.; VALE, R. S. Emprego de um modelo de crescimento e produção para determinação da rotação em povoamentos de eucalipto. **Revista Árvore**, v.28, n.2, p.219-225, 2004.

SALLES, T. T.; LEITE, H. G.; NETO, S. N. O.; SOARES, C. P. B.; PAIVA, H. N.; SANTOS, F. L. Modelo de Clutter na modelagem de crescimento e produção de eucalipto em sistemas de integração lavoura-pecuária-floresta. **Pesq. agropec. bras.**, v.47, n.2, p.253-260, 2012.

SANTANA, C.; MELLO, A. A.; EISFELD, R. L.; SANQUETTA, C. R. Sistema de equações para simulação do crescimento e da produção em povoamentos de *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden sem desbaste baseado no modelo de Clutter. **Ambiência**, v.1, n.2, p.239-256, 2005.

SAS Institute, **SAS/OR ® 9.22. User's Guide: Mathematical Programming**. Cary, NC: SAS Institute Inc, 2010.

ZEIDE, B. Analysis of growth equations. **Forest Science**, v.39, n.3, p.594-616, 1993.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM DO CRESCIMENTO E PRODUÇÃO EM NÍVEL DE POVOAMENTO POR MÍNIMOS QUADRADOS GENERALIZADOS

1. INTRODUÇÃO

O conhecimento a respeito do estoque de madeira em empreendimentos florestais é um fator decisivo para planejamentos mais precisos e com tomadas de decisões mais sensatas (CARVALHO *et al.*, 2011). Na maioria dos casos, a quantificação do volume é o objetivo principal das empresas florestais e, com isso, estudos e desenvolvimento de modelos e métodos que visem à máxima redução dos erros envolvidos no processo de modelagem fazem-se essenciais. Não obstante, há diferentes tipos de modelos estatísticos consagrados na literatura para predição ou a projeção do crescimento e da produção de madeira, entre os quais se destacam os do tipo povoamento e, dentre estes, o modelo de Clutter é o mais utilizado no Brasil (CAMPOS & LEITE, 2009).

Os dados utilizados para modelagem do crescimento e produção florestal caracterizam-se por serem desbalanceados e irregularmente espaçados (GREGOIRE *et al.*, 1995), ou seja, são correlacionados e remediados ao longo do horizonte de análise, ocasionando dependência entre os erros e tendências ao longo das medições. Diante desse comportamento, algumas dificuldades de ajuste são passíveis de ocorrerem, principalmente face à violação de alguns dos pressupostos estatísticos (Garcia, 1988) necessários às estimativas por mínimos quadrados ordinários, tais como a homocedasticidade da variância e a dependência dos resíduos.

Uma vez comprovada a violação à homogeneidade da variância e à autocorrelação residual, o estimador de mínimos quadrados permanece como linear e não tendencioso mas, em contrapartida, deixa de ser eficiente (JOHNSTON, 1972), ou seja, deixa de apresentar variância mínima. Isso pode resultar em dúbia interpretação dos testes de hipóteses habituais e, conseqüentemente, em inferências enganosas a respeito do modelo de regressão (GUJARATI, 2006). Dessa forma, há que se desenvolverem estudos a respeito da aplicabilidade e eficiência da utilização de modelos baseados em estimativas de parâmetros mais robustas, levando-se em consideração um maior esforço computacional e complexidade.

Segundo García (1984) a modelagem do crescimento e produção florestal por meio de sistemas de equações diferenciais estocásticas, pode ser considerada como um

método com propriedades estatísticas desejáveis, à medida que se assume como “verdadeira” a estrutura de erros do modelo utilizado. Entretanto, se as pressuposições estocásticas não forem estritamente válidas, como sempre é o caso, não haverá garantias de que tal procedimento terá melhor desempenho (GARCÍA, 2011a). Ademais, a utilização de sistemas dinâmicos pode ser insensível a detalhes da modelagem estocástica e procedimentos estatísticos (GARCÍA, 2011b).

Métodos alternativos à análise de regressão linear por mínimos quadrados ordinários, por exemplo, o método de mínimos quadrados generalizados, constituem ferramentas úteis à consistência estatística das estimativas em bases de dados florestais quando a heterogeneidade da variância e/ou a autocorrelação residual encontram-se presentes (CALEGARIO *et al.*, 2005). Este método alternativo pode ser considerado como uma opção promissora às dificuldades de ajuste usualmente encontradas quando se faz o ajuste por técnicas de regressão.

Atualmente, o método de mínimos quadrados generalizados tem sido considerado como a solução mais precisa para correção desses tipos de violações (SEBER & WILD, 1989). No Brasil, estudos em biometria florestal com ajustes por mínimos quadrados generalizados são escassos. Encontram-se alguns exemplos nos trabalhos de Buse (1973), Díaz e Couto (1999), Calegario *et al.* (2005) e, mais recentemente, Carvalho *et al.* (2011).

O presente trabalho tem como objetivo ajustar modelos crescimento e produção em nível de povoamento baseados no modelo de Clutter pelo método dos mínimos quadrados generalizados e avaliar a eficiência estatística deste método levando-se em consideração a ocorrência de heterocedasticidade e autocorrelação residual em comparação ao ajuste por mínimos quadrados ordinários.

2. MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Métodos de estimativas do modelo de altura dominante e determinação da capacidade produtiva

Uma vez decidida a utilização do modelo Logístico para descrição do crescimento em altura dominante e posterior determinação da capacidade produtiva e, ainda, após a constatar-se a ocorrência de violações estatísticas nos ajustes dos modelos, optou-se pela avaliação do modelo Logístico com ajuste por mínimos quadrados ordinários em comparação ao i) ajuste por mínimos quadrados generalizados para modelos não lineares, ii) ajuste por mínimos quadrados generalizados para modelos levando-se em consideração a heterocedasticidade e, ainda, iii) ajuste por mínimos quadrados generalizados com consideração da heterocedasticidade e com modelagem da autocorrelação residual. A Tabela 1 descreve as especificações do modelo de acordo com o método de estimativa dos parâmetros.

Tabela 1. Especificação do modelo logístico com os métodos de estimativa

Especificação do método de estimativa	Modelo Logístico
HD_MQO ⁽¹⁾	$Hd = \frac{\beta_0}{(1 + \beta_1 e^{-\beta_2 l})} + \varepsilon$
HD_MQG ⁽²⁾	
HD_MQG_W ⁽³⁾	
HD_MQG_WC ⁽⁴⁾	

⁽¹⁾ Estimativa por mínimos quadrados ordinários; ⁽²⁾ Estimativa por mínimos quadrados generalizados; ⁽³⁾ Estimativa por mínimos quadrados generalizados considerando a heterocedasticidade; ⁽⁴⁾ Estimativa por mínimos quadrados generalizados considerando a heterocedasticidade e a autocorrelação;

A correção da heterocedasticidade deu-se pela utilização da função de ponderação da variância, que retorna o inverso dos desvios-padrão que correspondem à estrutura da função de variância. Este procedimento foi realizado pela classe *varPower* especificada pelo argumento *weights* da função *gnls* (mínimos quadrados generalizados para modelagem não linear) da biblioteca *nlme* do *software* R. O modelo de variância representado por esta classe é (PINHEIRO & BATES, 2009):

$$Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 |v_{ij}|^{2\delta} \quad [1]$$

A função de variância correspondente é determinada por:

$$g(v_{ij}, \delta) = |v_{ij}|^\delta \quad [2]$$

que representa uma potência do valor absoluto da variância da covariável v_{ij} . Nesta função, o parâmetro δ é irrestrito, denotando uma capacidade de exibir qualquer valor real e, portanto, de modelar casos de aumento ou diminuição da variância associados ao valor absoluto da variância da covariável. Quando $v_{ij} = 0$ e $\delta > 0$, a função de variância é 0 e a ponderação da variância é indefinida. Portanto, essa classe *varPower* não deve ser usada quando a variância da covariável assume valor nulo (PINHEIRO & BATES, 2009).

A estrutura de autocorrelação foi definida pelo esquema autorregressivo de primeira ordem [3], denotado como AR(1). Modelos autorregressivos expressam uma observação corrente como uma função linear de uma observação anterior associada ao coeficiente de autocorrelação ρ mais um termo estocástico a_t , sendo este com média zero e independente das observações anteriores [18] (PINHEIRO & BATES, 2009).

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + a_t \quad \text{com } -1 < \rho < +1 \quad [3]$$

Uma das razões para se usar o modelo AR(1) não está apenas em sua simplicidade em relação aos demais modelos autorregressivos (PINHEIRO & BATES, 2009), mas também, diante de sua comprovada utilidade em várias aplicações e, ainda, por fundamentar-se em diversos trabalhos teóricos e empíricos (GUJARATI, 2006). Este procedimento foi realizado pela especificação *corAR1* da função *gnls* da biblioteca *nlme* do *software R*.

A capacidade produtiva foi determinada por meio de índices de local expressos pela equação transformada descrita em [4].

$$S = Hd \frac{(1 + \beta_1 e^{-\beta_2 l})}{(1 + \beta_1 e^{-\beta_2 l_i})} \quad [4]$$

Os índices de local resultantes, referentes ao melhor ajuste estatístico do modelo de altura dominante (HD_MQO; HD_MQG, MQG_W ou HD_MQG_WC), foram então utilizados como variáveis independentes dos modelos de crescimento e produção em área basal e volume.

2.2 Métodos de estimativas dos modelos e prognose para área basal e volume em nível de povoamento

As três alternativas de modelagem para o crescimento e produção, com base na forma reduzida do modelo de Clutter (1963), descritas no Capítulo 1, foram então reajustadas i) pelo método de mínimos quadrados ordinários em dois estágios com a inclusão das variáveis altura dominante e índice de local oriundas do melhor método de estimativa definido na seção 2.1, ii) pelo método de mínimos quadrados generalizados, iii) pelo método de mínimos quadrados generalizados inserindo-se o efeito da heterocedasticidade e iv) com o método de mínimos quadrados generalizados com o efeito da heterocedasticidade e da autocorrelação. As especificações das alternativas estão definidas na Tabela 2.

Tabela 2. Denominação das alternativas dos modelos de crescimento e produção de acordo com o método de reajuste

Alternativa	Modelo	Especificação da alternativa com reajuste
1	$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S_1 + \varepsilon_i$ $\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$	MQO ⁽¹⁾
		MQG ⁽²⁾
		MQG_W ⁽³⁾
		MQG_WC ⁽⁴⁾
2	$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) Hd_1 + \varepsilon_i$ $\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} S_1 + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$	MQO
		MQG
		MQG_W
		MQG_WC
3	$\ln B_2 = \ln B_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \varepsilon_i$ $\ln V_2 = \beta_0 + \frac{\beta_1}{I_2} + \beta_2 S_1 + \beta_3 \ln B_2 + \varepsilon_i$	MQO
		MQG
		MQG_W
		MQG_WC

⁽¹⁾ Estimativa por mínimos quadrados ordinários em dois estágios; ⁽²⁾ Estimativa por mínimos quadrados generalizados; ⁽³⁾ Estimativa por mínimos quadrados generalizados considerando a heterocedasticidade; ⁽⁴⁾ Estimativa por mínimos quadrados generalizados considerando a heterocedasticidade e a autocorrelação.

Os ajustes foram realizados por meio da função *glm* (mínimos quadrados generalizados para modelagem linear) da biblioteca *nlme* do software R, com a especificação da classe *varPower* do argumento *weights* para correção da

heterocedasticidade e da especificação *corAR1* para consideração da autocorrelação pelo esquema autorregressivo de primeira ordem.

2.3 Avaliação dos ajustes e comparação entre os modelos

As análises dos métodos de ajuste do modelo de altura dominante e das alternativas de modelagem do crescimento e produção em volume e área basal basearam-se na raiz quadrada do erro médio (*RQEM*) [5] e no erro médio percentual de predição (*bias%*) [6].

$$RQEM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 1}} \quad [5]$$

$$bias\% = 100 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(Y_i - \hat{Y}_i)}{Y_i} \right] \quad [6]$$

em que:

Y_i = valores observados da variável dependente;

\hat{Y}_i = valores estimados da variável dependente;

n = número de observações.

A análise de significância e o sinal dos coeficientes também foram avaliados, bem como a distribuição gráfica dos resíduos em relação aos valores estimados e a distribuição da frequência percentual dos resíduos por classe de erro. O comportamento dos métodos de ajuste das alternativas de modelagem do crescimento e produção em volume e área basal foi verificado tanto por meio das curvas de produção em área basal e volume, quanto pela verificação das idades técnicas de colheita (ITC) e das produtividades nas ITC, elucidativas do comportamento preditivo dos modelos. Adicionalmente, os modelos ajustados por mínimos quadrados generalizados foram comparados por meio do Critério de Informação de Akaike (AIC), do Critério de Informação Bayesiano (BIC) e do Teste de Razão da Máxima Verossimilhança (TRMV), de forma a inferir sobre a inclusão da heterocedasticidade e autocorrelação nas estimativas.

O AIC é uma medida da qualidade relativa do ajuste de um modelo estatístico inicialmente publicado em Akaike (1974). É definido como [7]:

$$AIC = -2 \ln(L_p) + 2p \quad [7]$$

em que L_p é o valor que torna máxima a função de máxima verossimilhança do modelo estimado e p é o número de parâmetros do modelo.

Assim como o AIC, o Critério de Informação Bayesiano (BIC) é utilizado para comparação e seleção de modelos. Sua determinação se dá pela expressão definida em [8]:

$$BIC = -2 \ln(L_p) + kp \quad \text{para } k = \ln(n) \quad [8]$$

sendo n o número de observações. Tanto o AIC quanto o BIC aumentam conforme a soma dos quadrados dos erros aumenta. Além disso, ambos os critérios penalizam modelos com muitas variáveis, sendo que valores menores de AIC e BIC são preferíveis.

O Teste de Razão da Máxima Verossimilhança (TRMV) expressa quantas vezes seria mais provável que os dados estivessem sob um modelo do que sob outro. É, de fato, um teste de comparação de modelos hierárquicos (aninhados) pareados, determinado pela diferença entre os valores máximos da função de verossimilhança dos modelos (CARVALHO *et al.*, 2011), como em [9]:

$$TRMV = 2[\ln(L_{p2}) - \ln(L_{p1})] \quad [9]$$

Uma vez que o TRMV seja significativo ao nível de α de probabilidade, o modelo com maior valor de máxima verossimilhança possuirá maior precisão. Quando a hipótese nula representa um caso especial da hipótese alternativa, a distribuição de probabilidade da estatística de teste é de, aproximadamente, uma distribuição qui-quadrado.

2.4 Prognose

De forma a inferir sobre a influência dos métodos de ajuste na aplicação das alternativas de modelagem, determinou-se a prognose da produção em volume por meio da projeção dos Incrementos Médios Anuais (IMA) aos 6 e 7 anos, a partir da idade inicial, para cada parcela do inventário. Os resultados foram então agrupados com as expectativas médias dos IMA em cada alternativa.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Modelo de altura dominante e determinação da capacidade produtiva

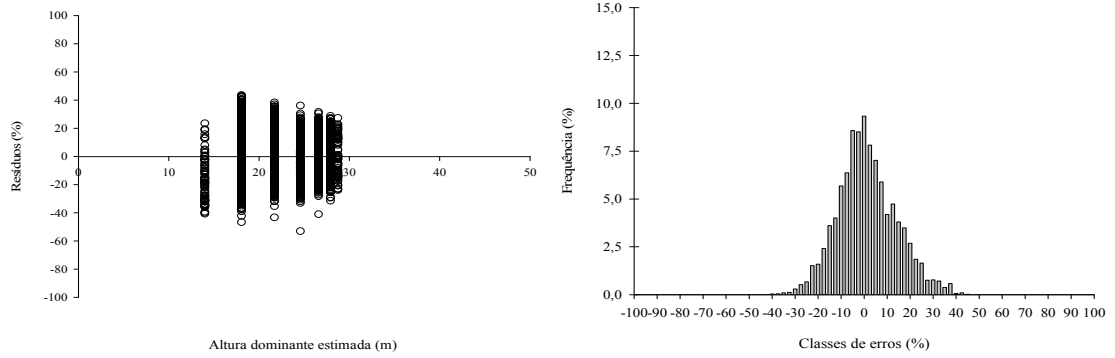
A Tabela 3 ilustra as estatísticas do modelo Logístico ajustado por mínimos quadrados ordinários (MQO), mínimos quadrados generalizados (MQG), mínimos quadrados generalizados com inclusão da ocorrência de heterocedasticidade (MQG_W) e mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade e a autocorrelação residual (MQG_WC). Todos os ajustes apresentaram estimativas dos parâmetros significativas pelo teste t ($p < 0,01$). Devido ao elevado número de observações, praticamente não houve alteração nos valores da raiz quadrada do erro médio ($RQEM$). Já os valores do erro médio percentual de predição ($bias\%$) apresentaram melhoras quando do uso do método de mínimos quadrados generalizados, com uma piora quando da avaliação da heterocedasticidade e, um pouco mais, ao se considerar a heterocedasticidade juntamente com a autocorrelação.

Na Figura 4 encontram-se os gráficos dos resíduos percentuais em relação aos valores estimados de altura dominante (esquerda) e a distribuição da frequência dos resíduos por classe de erro (direita) para cada método de ajuste do modelo Logístico. Todos os gráficos apresentaram desempenho satisfatório e corroboraram o padrão de normalidade da distribuição dos resíduos. Contudo, devido à elevada massa de dados, não foi possível verificar alteração acentuada entre os métodos pela análise visual dos gráficos. A análise da distribuição percentual da frequência dos resíduos concentrados entre as classes de erros de $\pm 10\%$ e $\pm 20\%$ (Tabela 4) confirmou o bom desempenho da distribuição de todos os métodos de ajustes, sem, contudo, expressar uma diferença significativa de comportamento entre os métodos. Ambos apresentaram cerca de 63 % da frequência dos resíduos entre as classes de $\pm 10\%$ e cerca de 89 % da frequência entre as classes de $\pm 20\%$, com uma sensível superioridade para os modelos com ajustes por mínimos quadrados generalizados.

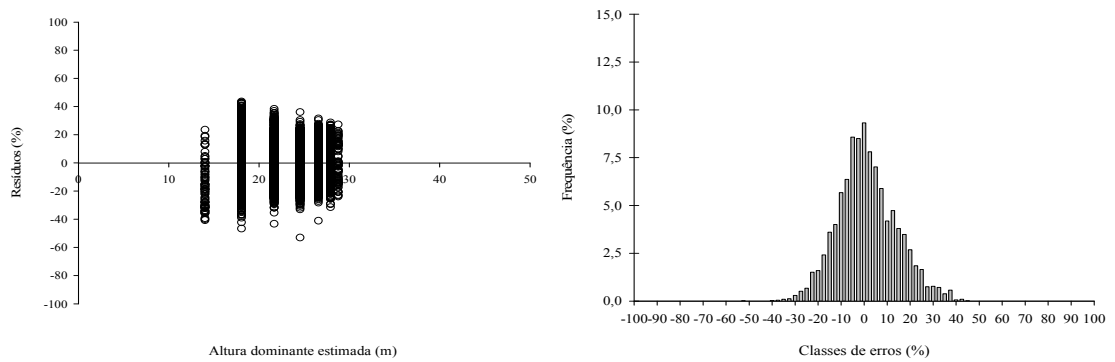
Tabela 3. Parâmetros e estatísticas dos métodos de ajuste do modelo Logístico para altura dominante

HD MQO				
<i>RQEM = 2,850; bias% = -1,8103</i>				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	<i>t</i>	<i>p > t </i>
β_0	29,9525	0,2514	119,1433	<0,0001
β_1	3,4204	0,122	28,0322	<0,0001
β_2	0,0458	0,0014	33,1193	<0,0001
HD MQG				
<i>RQEM = 2,850; bias% = -1,7459</i>				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	<i>t</i>	<i>p > t </i>
β_0	30,0068	0,2512	119,4489	<0,0001
β_1	3,3971	0,1179	28,8183	<0,0001
β_2	0,0454	0,0013	33,5424	<0,0001
HD MQG W				
<i>RQEM = 2,851; bias% = -1,7571</i>				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	<i>t</i>	<i>p > t </i>
β_0	30,2279	0,2775	108,9158	<0,0001
β_1	3,2966	0,1053	31,3128	<0,0001
β_2	0,0442	0,0013	32,9502	<0,0001
HD MQG WC				
<i>RQEM = 2,851; bias% = -1,7958</i>				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	<i>t</i>	<i>p > t </i>
β_0	30,5754	0,6947	44,0128	<0,0001
β_1	3,1693	0,2030	15,6082	<0,0001
β_2	0,0424	0,0029	14,4561	<0,0001

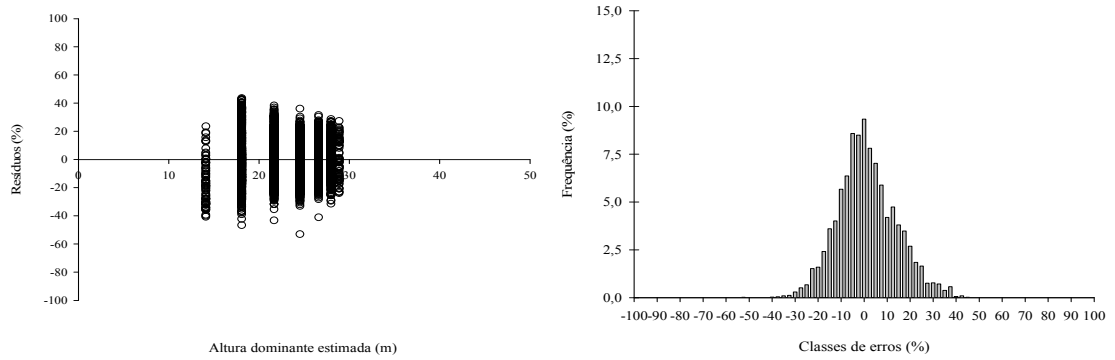
HD_MQG



HD_MQG



HD_MQG_W



HD_MQG_WC

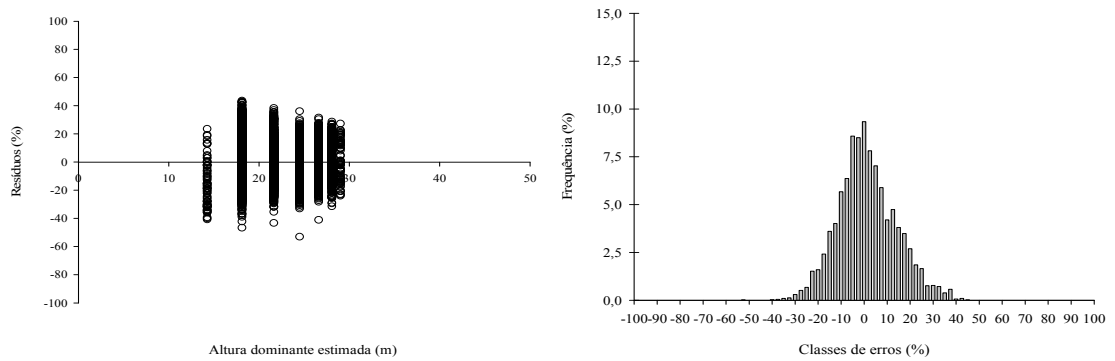


Figura 4. Distribuição dos resíduos em função da altura dominante estimada (esquerda) e frequência residual por classe de erro (direita) para os métodos de estimativa do modelo Logístico.

Tabela 4. Porcentagem da frequência dos resíduos em altura dominante entre os intervalos $\pm 10\%$ e $\pm 20\%$ para métodos de estimativas do modelo Logístico

Métodos	Intervalos (%)	
	± 10	± 20
HD_MQO	63,3	89,6
HD_MQG	63,4	89,7
HD_MQG_W	63,4	89,7
HD_MQG_WC	63,4	89,7

A avaliação e seleção do método com maior consistência estatística deu-se pelos valores do Critério de Informação de Akaike (AIC), do Critério de Informação Bayesiano (BIC) e pelas estatísticas do Teste de Razão da Máxima Verossimilhança TRMV (Tabela 5). Os baixos valores do AIC e do BIC e o elevado valor e significância ($p < 0,0001$) para TRMV denotam a superioridade do modelo Logístico com ajuste por mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade e a autocorrelação residual. Consequentemente, mesmo com a ausência de diferenças significativas em relação aos valores da *RQEMe*, ainda, com certo aumento para o *bias%*, optou-se pela utilização deste método de ajuste uma vez que o mesmo leva em consideração a ocorrência de heterocedasticidade e autocorrelação e, com isso, confere consistência estatística ao ajuste.

Tabela 5. Valores do Critério de Informação de Akaike (AIC), do Critério de Informação Bayesiano (BIC) e estatísticas do Teste de Razão da Máxima Verossimilhança (TRMV) entre os modelos ajustados por mínimos quadrados generalizados

Métodos	AIC	BIC	$\ln(L_p)$	TRMV	<i>p - value</i>
HD_MQG	39684,36	39712,36	-19838,2	---	
HD_MQG_W	39602,96	39637,96	-19796,5	83,40158	<0,0001
HD_MQG_WC	34978,78	35020,78	-17483,4	4709,58	<0,0001

Após a seleção do método de ajuste do modelo Logístico por mínimos quadrados generalizados levando-se em consideração a heterocedasticidade e a autocorrelação residual para a estimativa da altura dominante em função da idade, os índices de local foram determinados. A equação resultante, com os parâmetros estimados, ficou definida como [10]:

$$S = Hd \frac{(1 + 3,1693 \cdot e^{-0,0424 I})}{(1 + 3,1693 \cdot e^{-3,1693 I_i})} \quad [10]$$

Tomando-se como referência as alturas dominantes observadas, foram estabelecidas três classes de capacidade produtiva (Tabela 6), com intervalos determinados de acordo com a dispersão das alturas dominantes em relação à idade índice (72 meses).

Tabela 6. Limites das classes de capacidade produtiva

Classe de capacidade produtiva	Limites de inclusão (m)
I	28 – 34
II	22 – 28
III	16 – 22

Os índices de local oriundos da aplicação da expressão [10] foram então utilizados como variável explicativa para o ajuste das alternativas de modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento baseadas na forma reduzida do modelo de Clutter (1963).

3.2 Modelos e prognose para área basal e volume em nível de povoamento

Nas Tabelas 7, 8 e 9 encontram-se as estatísticas dos parâmetros dos métodos de ajustes para as alternativas de modelagem do crescimento e produção 1, 2 e 3, respectivamente. Os métodos de ajuste por mínimos quadrados ordinários (MQO), mínimos quadrados generalizados (MQG) e mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade (MQG_W) apresentaram ajustes satisfatórios no que diz respeito à significância dos coeficientes para as três alternativas de modelagem. Em contrapartida, para o método de ajuste por mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade e a autocorrelação (MQG_WC), as alternativas de modelagem constituídas pelo índice de local ou altura dominante como variáveis explicativas vinculadas à expressão da capacidade produtiva do lugar na equação de área basal, respectivamente, alternativas 1 e 2, apresentaram o coeficiente α_1 não-significativo. Do ponto de vista da análise de modelos, uma vez determinada a não-significância de determinado parâmetro, a decisão por sua inclusão na modelagem recai sobre a avaliação a respeito da relevância da variável em relação ao caráter preditivo do modelo. Em se tratando de variáveis influentes na modelagem do crescimento e produção em área basal, decidiu-se pela permanência dos parâmetros não-significativos neste método de ajuste.

Ainda tratando-se do coeficiente α_1 , foram verificados valores negativos em todos os métodos de ajustes (MQO, MQG, MQG_W e MQG_WC) tanto para a alternativa 2 quanto para a alternativa 1, excetuando-se, nesta última, o método de estimativa por mínimos quadrados generalizados com abrangência da heterocedasticidade e da autocorrelação (MQG_WC). Em relação a este coeficiente, a menos que seu valor absoluto seja relativamente pequeno, seu valor negativo pode resultar em estimativas inconsistentes. Mesmo a alternativa 2 tendo apresentado valor de α_1 negativo para o método MQG_WC, seu valor absoluto apresentou uma redução em torno de 83 % em comparação ao estimado pelo método MQO, o que resultou em um comportamento superior dos ajustes quando da utilização do método MQG_WC. A ocorrência do coeficiente α_1 com valor positivo associado à variável explicativa índice de local na equação de área basal do modelo reduzido de Clutter (alternativa 1) representa uma relevante adicionalidade da utilização do método MQG_WC, uma vez que a modelagem convencional por mínimos quadrados ordinários tem apresentado inconsistências com relação ao ajuste associado a este coeficiente. Com isso, pode-se inferir que as inconsistências atualmente verificadas associam-se não somente ao comportamento da variável índice de local em relação ao crescimento em área basal, como também, à ocorrência de autocorrelação residual nos dados de crescimento utilizados nos ajustes.

Tabela 7. Estimativas, erro padrão e significância dos parâmetros dos métodos de ajuste dos modelos para a Alternativa 1 de modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento

Alternativa 1				
MQO				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,629145	0,029655	122,378	<0,0001
α_1	-0,008401	0,001114	-7,541	<0,0001
β_0	1,440166	0,035161	40,96	<0,0001
β_1	-21,313429	0,684394	-31,14	<0,0001
β_2	0,027815	0,000716	38,84	<0,0001
β_3	1,173293	0,014066	83,41	<0,0001
MQG				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,632584	0,0298	121,88	<0,0001
α_1	-0,008532	0,00112	-7,62	<0,0001
β_0	1,426455	0,0351	40,67	<0,0001
β_1	-20,719751	0,6778	-30,57	<0,0001
β_2	0,027706	0,000717	38,64	<0,0001
β_3	1,175376	0,0141	83,50	<0,0001
MQG_W				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t

α_0	3,545753	0,0313	113,19	<0,0001
α_1	-0,005489	0,00119	-4,66	<0,0001
β_0	1,393302	0,0357	39,02	<0,0001
β_1	-21,373339	0,6657	-32,11	<0,0001
β_2	0,027214	0,000691	39,38	<0,0001
β_3	1,19635	0,0139	85,92	<0,0001

MQG WC				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,389624	0,0357	95,03	<0,0001
α_1	0,000552	0,00133	0,42	0,6776
β_0	1,425541	0,0359	39,70	<0,0001
β_1	-20,901087	0,9677	-21,60	<0,0001
β_2	0,026049	0,000679	38,39	<0,0001
β_3	1,192899	0,0125	95,67	<0,0001

Tabela 8. Estimativas, erro padrão e significância dos parâmetros dos métodos de ajuste dos modelos para a Alternativa 2 de modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento

Alternativa 2				
MQO				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,608564	0,021954	164,37	<0,0001
α_1	-0,010010	0,001074	-9,32	<0,0001
β_0	1,058825	0,025925	40,84	<0,0001
β_1	-0,81331	0,024605	-32,78	<0,0001
β_2	0,042646	0,001008	41,95	<0,0001
β_3	1,170703	0,013753	85,05	<0,0001
MQG				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,608564	0,0219	164,37	<0,0001
α_1	-0,01001	0,00107	-9,32	<0,0001
β_0	1,0539506	0,0259	40,65	<0,0001
β_1	-0,7907163	0,0246	-32,14	<0,0001
β_2	0,0420083	0,00101	41,68	<0,0001
β_3	1,17458	0,0137	85,41	<0,0001
MQG W				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,565776	0,0224	159,46	<0,0001
α_1	-0,007915	0,00106	-7,49	<0,0001
β_0	1,0184917	0,0272	37,40	<0,0001
β_1	-0,802161	0,0238	-33,68	<0,0001
β_2	0,0414059	0,000959	43,19	<0,0001
β_3	1,1953179	0,0136	87,78	<0,0001
MQG WC				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,439704	0,0300	114,54	<0,0001
α_1	-0,001742	0,00143	-1,22	0,222
β_0	1,0680209	0,0264	40,38	<0,0001
β_1	-0,8003177	0,0339	-23,58	<0,0001
β_2	0,0401296	0,00102	39,43	<0,0001
β_3	1,1891806	0,0124	95,88	<0,0001

Tabela 9. Estimativas, erro padrão e significância dos parâmetros dos métodos de ajuste dos modelos para a Alternativa 3 de modelagem do crescimento e produção em nível de povoamento

Alternativa 3				
MQO				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,407804	0,004267	798,57	<0,0001
β_0	1,45400	0,03593	40,85	<0,0001
β_1	-21,12000	0,69860	-31,11	<0,0001
β_2	0,02817	0,00073	38,69	<0,0001
β_3	1,16300	0,01439	80,71	<0,0001
MQG				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,407804	0,00427	798,57	<0,0001
β_0	1,453516	0,0359	40,57	<0,0001
β_1	-21,116266	0,6915	-30,53	<0,0001
β_2	0,028168	0,000732	38,49	<0,0001
β_3	1,163374	0,0144	80,84	<0,0001
MQG_W				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,401143	0,00434	783,05	<0,0001
β_0	1,415408	0,0365	38,76	<0,0001
β_1	-21,936351	0,6776	-32,37	<0,0001
β_2	0,027785	0,000704	39,49	<0,0001
β_3	1,186123	0,0142	83,25	<0,0001
MQG_WC				
Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	t	p > t
α_0	3,404132	0,00731	465,86	<0,0001
β_0	1,43396	0,0362	39,61	<0,0001
β_1	-21,1167	0,9832	-21,48	<0,0001
β_2	0,026167	0,000682	38,34	<0,0001
β_3	1,189981	0,0125	94,90	<0,0001

As curvas de produção em cada classe de produtividade (I, II e III) dos quatro métodos de ajustes (MQO, MQG, MQG_W e MQG_WC) encontram-se nas Figuras 5, 6 e 7 para produção em volume e nas Figuras 8, 9 e 10 para produção em área basal das alternativas de modelagem 1, 2 e 3, respectivamente. Em se tratando das curvas de produção em volume, não foi evidenciada a influência da inconsistência do valor negativo do coeficiente α_1 . Entretanto, na curva de produção em área basal para a alternativa 1 de modelagem (Figura 8) houve tendência de subestimar as estimativas nas idades acima de 60 meses (Figura 8a), demonstradas pela junção das curvas em relação às classes de produtividade. Essa inconsistência, contudo, torna-se não tão expressiva quando se considera a ocorrência de heterocedasticidade pelo método pelo método de mínimos quadrados generalizados (Figura 8c) e deixa de existir quando se utiliza mínimos quadrados generalizados com a inclusão da heterocedasticidade e da autocorrelação residual (Figura 8d); comprovando o que foi demonstrado nas

estimativas dos coeficientes. Para a alternativa 2, mesmo com coeficiente α_1 negativo, em todos os métodos de ajustes, não se verificou inconsistência nas curvas de produção, apresentando assim, um comportamento satisfatório; o mesmo se deu para a alternativa 3.

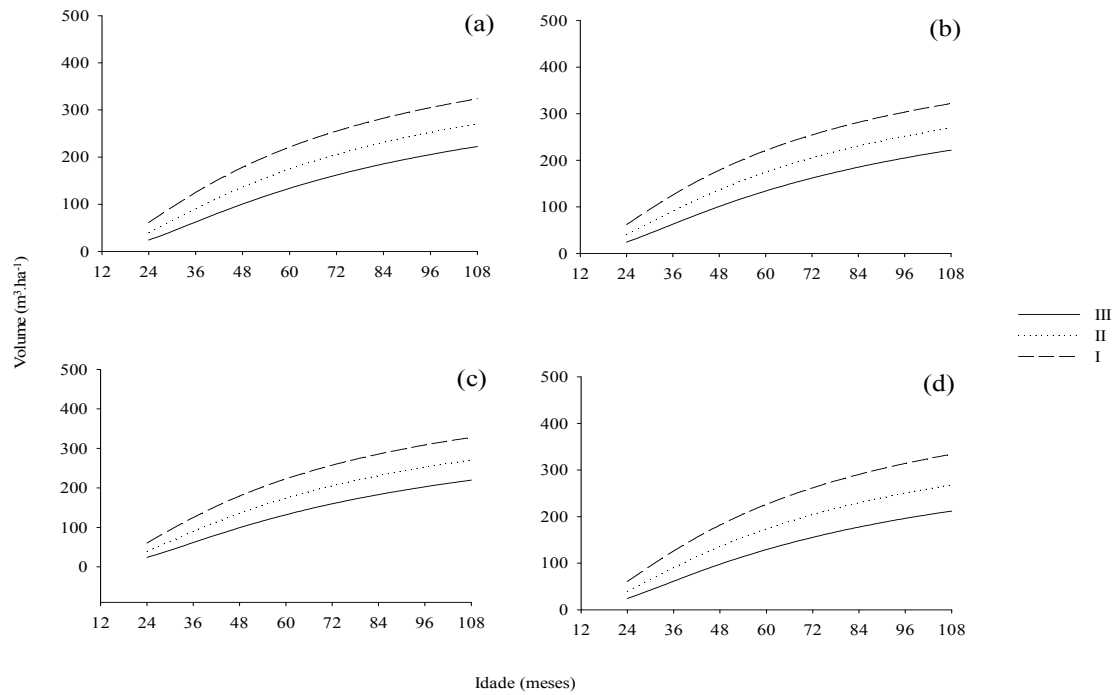


Figura 5. Curvas de produção em volume ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$) nas classes de produtividade I, II e III com uso dos métodos de ajuste MQO (a), MQG (b), MQG_W (c) e MQG_WC (d) para a alternativas de modelagem 1.

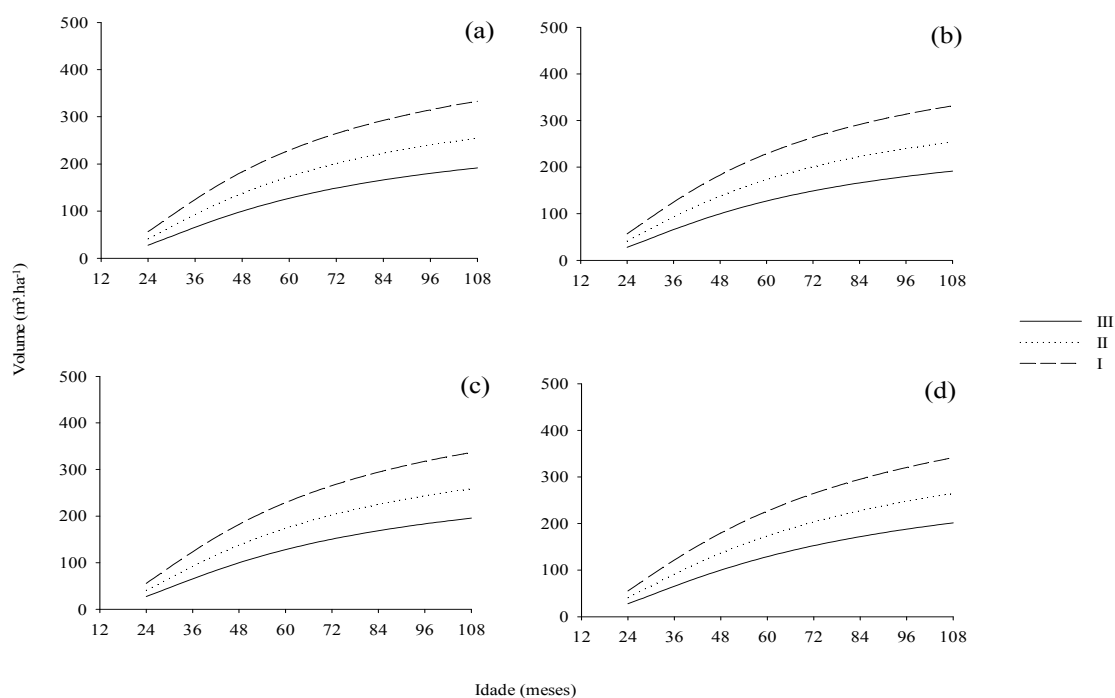


Figura 6. Curvas de produção em volume ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$) nas classes de produtividade I, II e III com uso dos métodos de ajuste MQO (a), MQG (b), MQG_W (c) e MQG_WC (d) para a alternativas de modelagem 2.

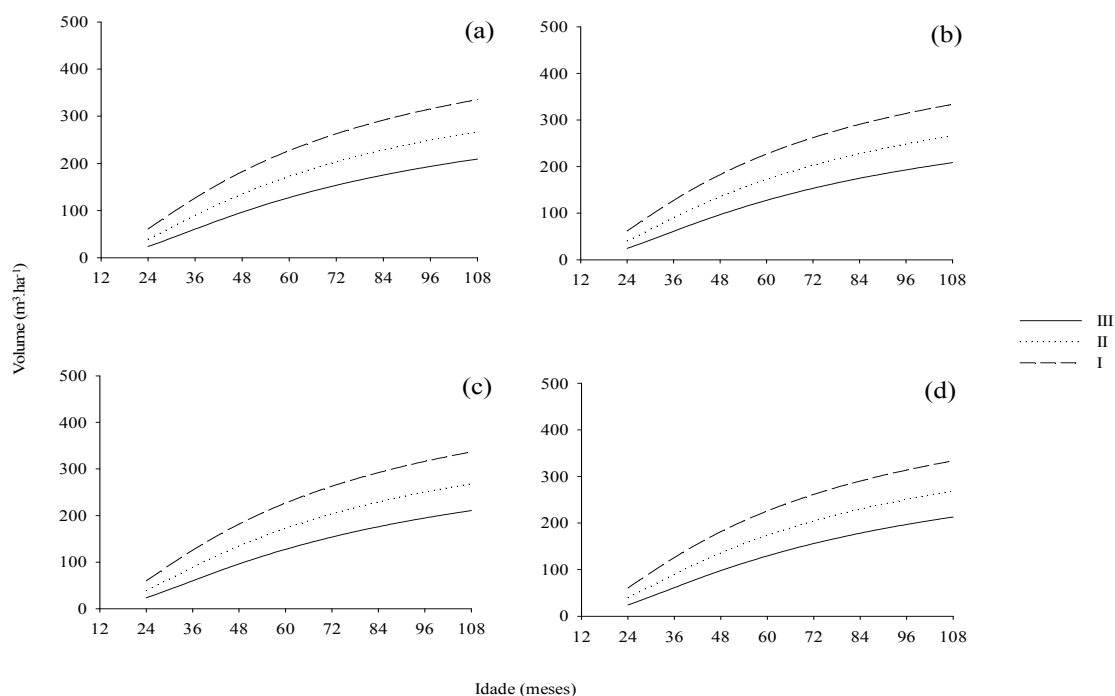


Figura 7. Curvas de produção em volume ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$) nas classes de produtividade I, II e III com uso dos métodos de ajuste MQO (a), MQG (b), MQG_W (c) e MQG_WC (d) para a alternativas de modelagem.

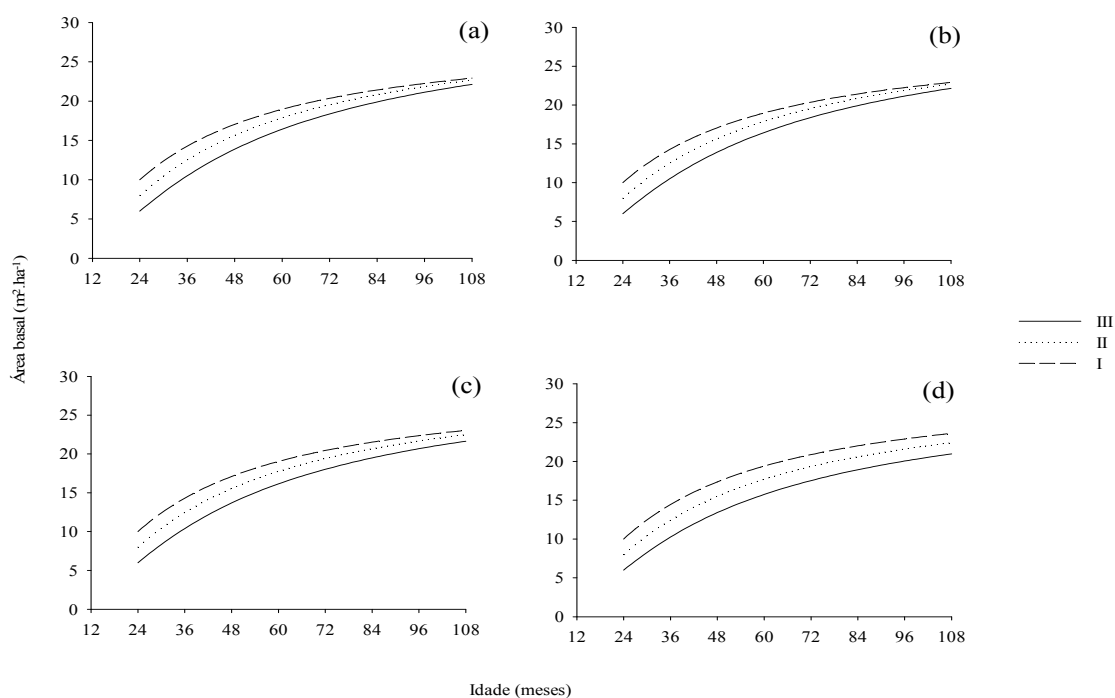


Figura 8. Curvas de produção em área basal (m^2ha^{-1}) nas classes de produtividade I, II e III com uso dos métodos de ajuste MQO (a), MQG (b), MQG_W (c) e MQG_WC (d) para a alternativas de modelagem 1.

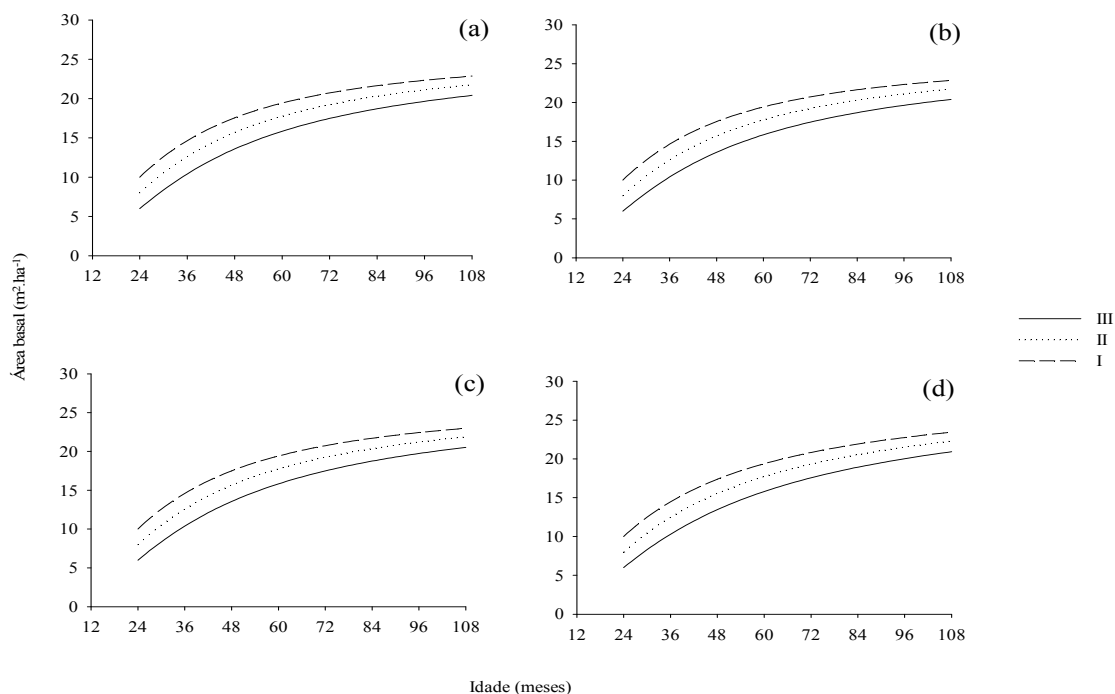


Figura 9. Curvas de produção em área basal (m^2ha^{-1}) nas classes de produtividade I, II e III com uso dos métodos de ajuste MQO (a), MQG (b), MQG_W (c) e MQG_WC (d) para a alternativas de modelagem 2.

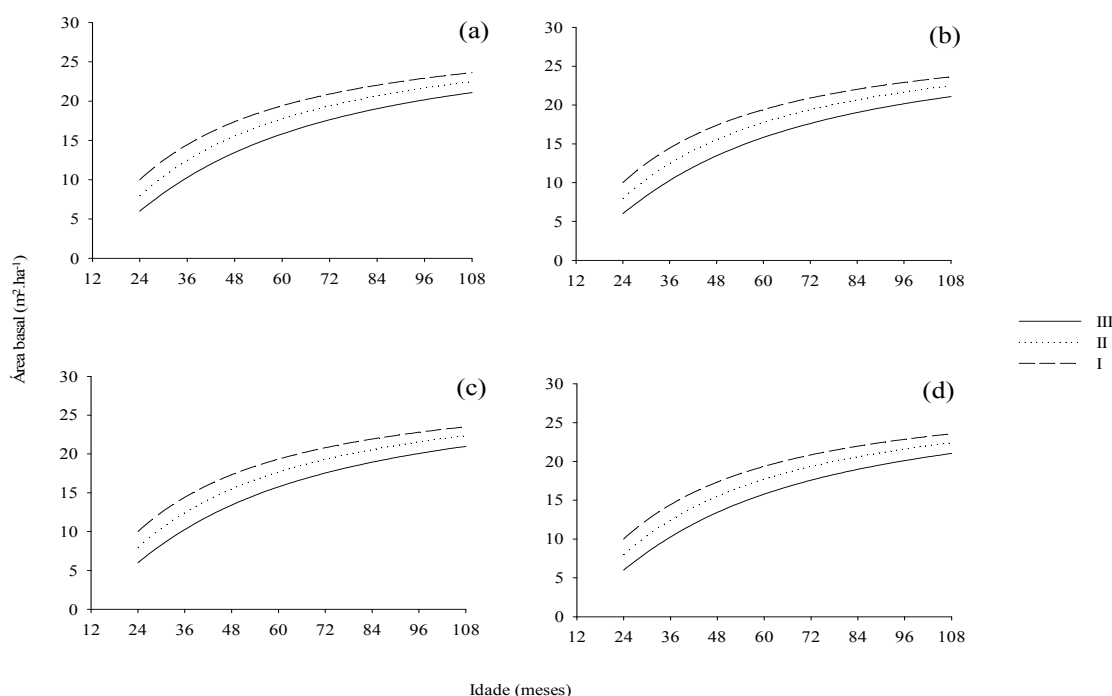


Figura 10. Curvas de produção em área basal (m^2ha^{-1}) nas classes de produtividade I, II e III com uso dos métodos de ajuste MQO (a), MQG (b), MQG_W (c) e MQG_WC (d) para a alternativas de modelagem 3.

Em todos os métodos de ajuste as três alternativas apresentaram valores do erro médio percentual de predição (*bias*%) e da raiz quadrada do erro médio (*RQEM*) satisfatórios, ambos inferiores a 0,12 e 1 %, respectivamente. Comparativamente, pelo método MQO, a alternativa 1 foi a que exibiu os menores valores absolutos de *RQEM* e *debias* %. Contudo, para esta alternativa, à medida que são utilizados os métodos de mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade (MQG_W) e a heterocedasticidade e a autocorrelação (MQG_WC) há um aumento dos valores dessas medidas. Tal fato não ocorre para as alternativas 2 e 3, uma vez que os valores do *bias* % apresentam uma redução considerável e a *RQEM* apresenta-se praticamente constante. Levando-se em consideração a maior complexidade desses métodos em relação ao método de mínimos quadrados ordinários, um certo aumento nos valores de medidas como o *bias* % e a *RQEM* pode ser considerado como um custo razoável a ser pago pela garantia de não violação à determinados pressupostos estatísticos. Entretanto, uma vez que este aumento só foi verificado para a alternativa 1, salienta-se que o comportamento da variável índice de local em relação ao crescimento em área basal ainda carece de maiores investigações e, neste caso, a utilização da altura dominante observada ou até mesmo a eliminação da variável associada à capacidade produtiva na

equação de área basal pode resultar em certa superioridade em termos das medidas de exatidão.

Tabela 10. Medidas *RQEM* e *bias%* para cada método de ajuste nas três alternativas de modelagem

Alternativa 1								
Modelo	MQO		MQG		MQG_W		MQG_WC	
	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>
$B_2^{(1)}$	-0,3186	0,0669	-0,3184	0,0668	0,4909	0,0784	0,6301	0,0802
$V_2^{(2)}$	0,5408	0,1136	0,7380	0,1135	0,37487	0,1141	0,5058	0,1150
Alternativa 2								
Modelo	MQO		MQG		MQG_W		MQG_WC	
	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>
B_2	0,8611	0,0839	0,9247	0,0835	0,5270	0,0836	0,5991	0,0854
V_2	0,6432	0,1172	0,8206	0,1169	0,4103	0,1173	0,4798	0,1176
Alternativa 3								
Modelo	MQO		MQG		MQG_W		MQG_WC	
	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>	<i>bias %</i>	<i>RQEM</i>
B_2	0,7936	0,0802	0,8640	0,0802	0,4406	0,0795	0,6011	0,0801
V_2	0,5634	0,1152	0,7782	0,1150	0,3184	0,1153	0,4742	0,1149

⁽¹⁾Equação de área basal do modelo referente a cada alternativa; ⁽²⁾Equação de volume do modelo referente a cada alternativa.

Os gráficos de distribuição dos resíduos em relação aos valores estimados (a) e de distribuição de frequência percentual dos resíduos em relação às classes de erros (b) para área basal (1) e volume (2) pelos métodos MQO, MQG, MQG_W e MQG_WC encontram-se, respectivamente, nas Figuras 11, 12, 13 e 14 para a alternativa 1; nas Figuras 15, 16, 17 e 18 para a alternativa 2; e nas Figuras 19, 20, 21 e 22 para a alternativa 3. Em todos os métodos de ajuste, para todas as alternativas de modelagem analisadas, as distribuições dos resíduos por pontos (a) mostraram-se satisfatórias, com baixa amplitude de resíduos percentuais e os gráficos por classes de erros (b) confirmaram a normalidade da distribuição dos resíduos. Diante do elevado número de observações não foi possível verificar mudanças consideráveis no comportamento dos resíduos em relação aos métodos de ajuste avaliados.

De forma a elucidar a distribuição dos resíduos em resposta ao método de ajuste, verificou-se a concentração percentual das classes de erro nas amplitudes de $\pm 10\%$ e $\pm 20\%$ para as estimativas em volume (Tabela 11), onde se assume que haverá um melhor comportamento do ajuste em relação à distribuição dos resíduos quanto maior a concentração percentual nessas classes de erros. Para as três alternativas, os maiores

valores percentuais foram observados quando da utilização do método MQG_W seguido pelo método MQG_WC. Considerando-se o método MQO, a alternativa 3 foi significativamente superior, com cerca de 74 % da frequência concentrada entre as classes de $\pm 10\%$ e cerca de 92 % entre as classes de $\pm 20\%$. Contudo, após a consideração da heterocedasticidade e da autocorrelação residual, as alternativas 1 e 2 apresentaram uma melhora substancial, equiparando-se à alternativa 3, que praticamente não sofreu alteração pela mudança do método de ajuste. Isso demonstra a superioridade do comportamento do modelo quando da utilização do método de mínimos quadrados generalizados com a avaliação das violações aos pressupostos estatísticos. Contudo, a ausência de sensibilidade da alternativa 3 ao se alterar o método de ajuste pode indicar que a maior parte da falta de eficiência estatística associada à ocorrência de heterocedasticidade e autocorrelação residual encontra-se na estrutura da equação da área basal, que influencia diretamente a predição volumétrica, uma vez que se adota como variável explicativa a capacidade produtiva expressa na forma do índice de local ou da altura dominante. Possíveis causas para este comportamento são as alterações no padrão de crescimento das florestas plantadas de eucalipto frente ao predomínio de plantios clonais, o que exige, portanto, estudos mais aprofundados a respeito deste tema.

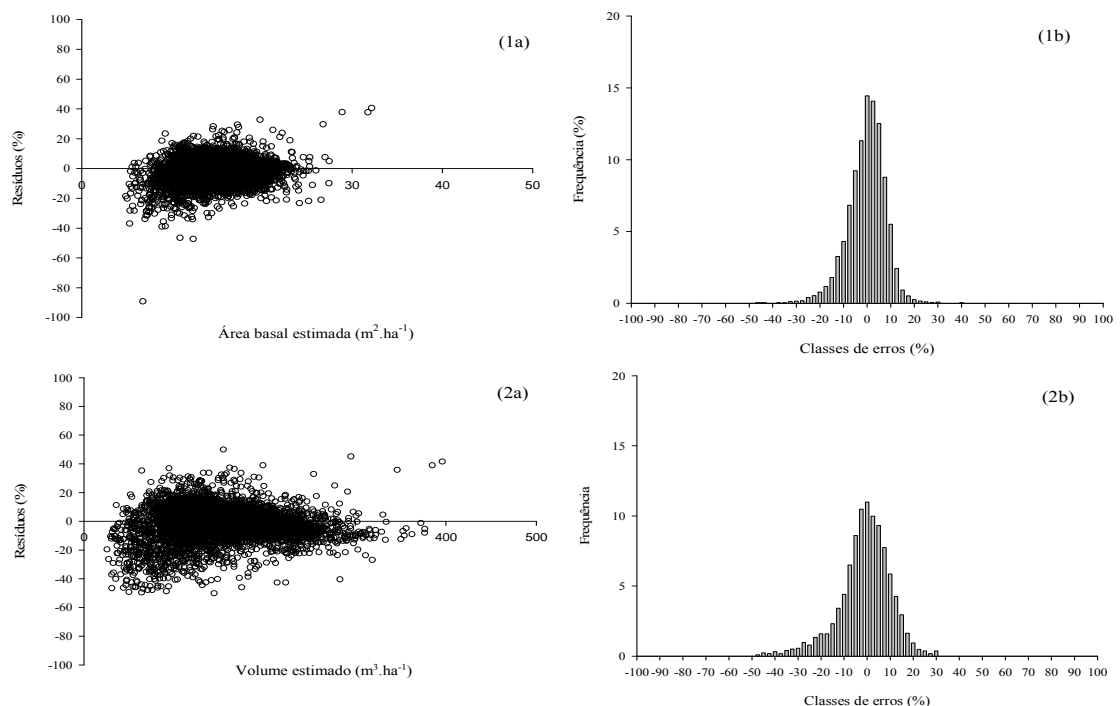


Figura 11. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 1 pelo método MQO.

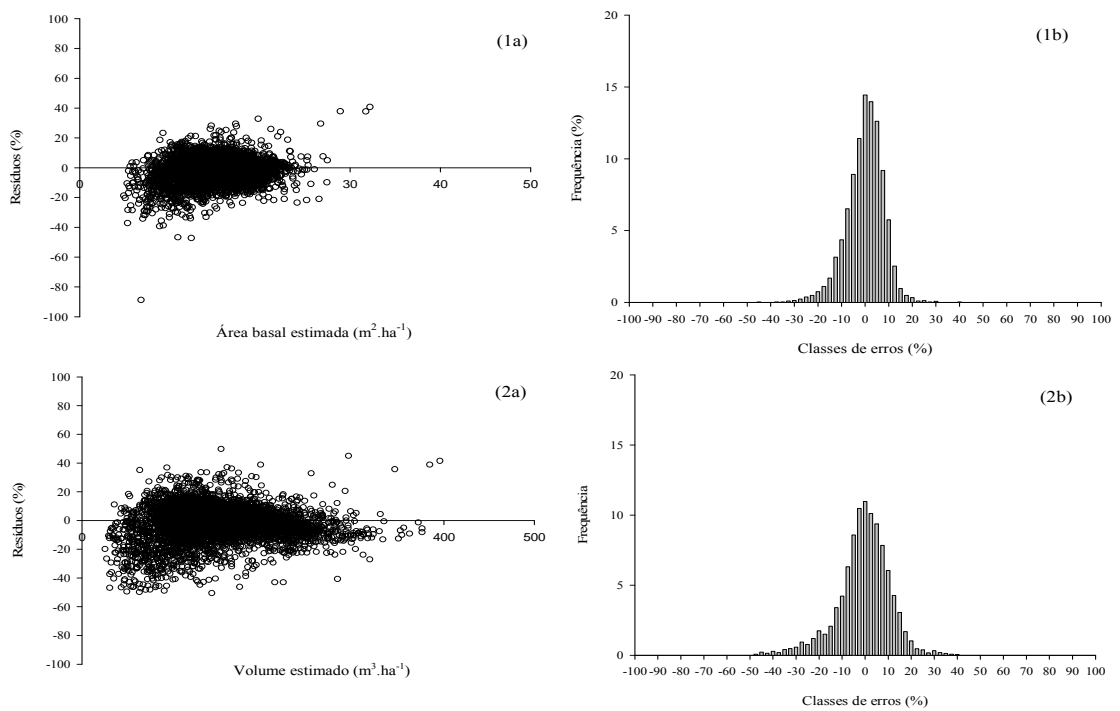


Figura 12. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 1 pelo método MQG.

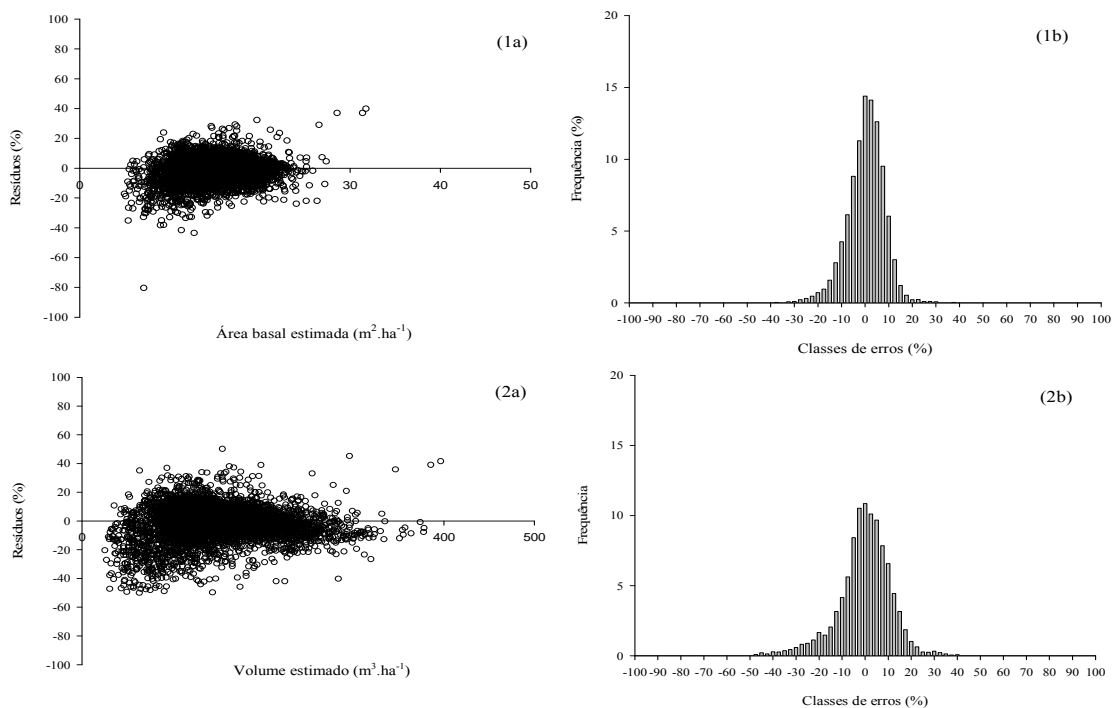


Figura 13. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 1 pelo método MQG_W.

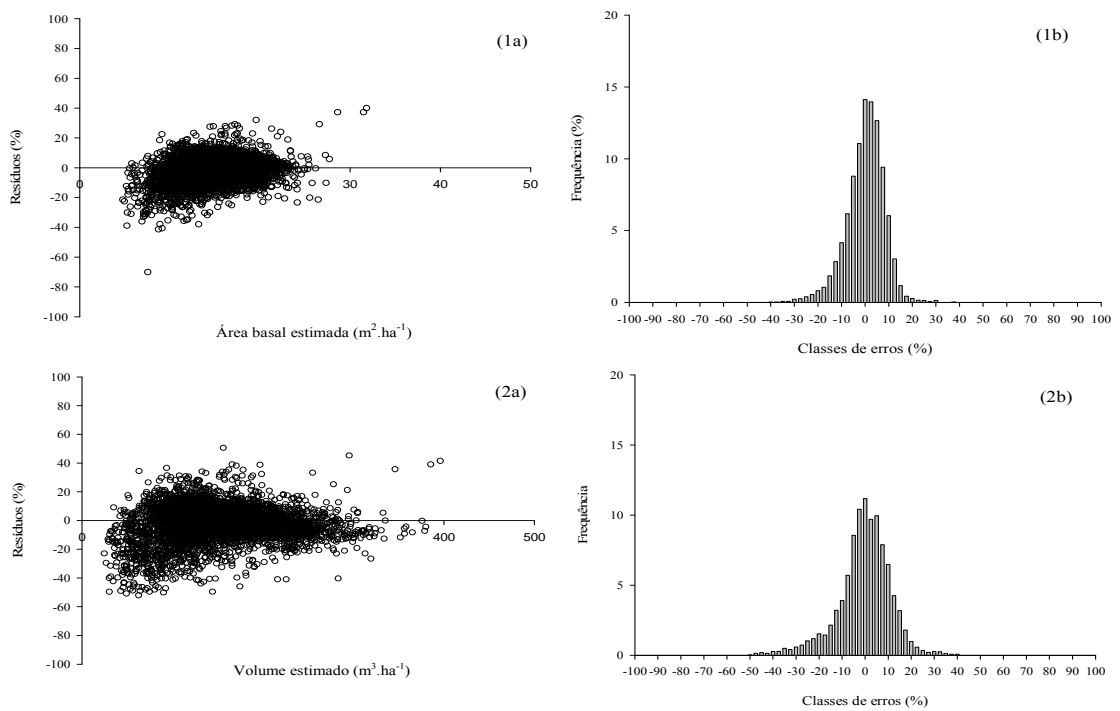


Figura 14. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 1 pelo método MQG_WC.

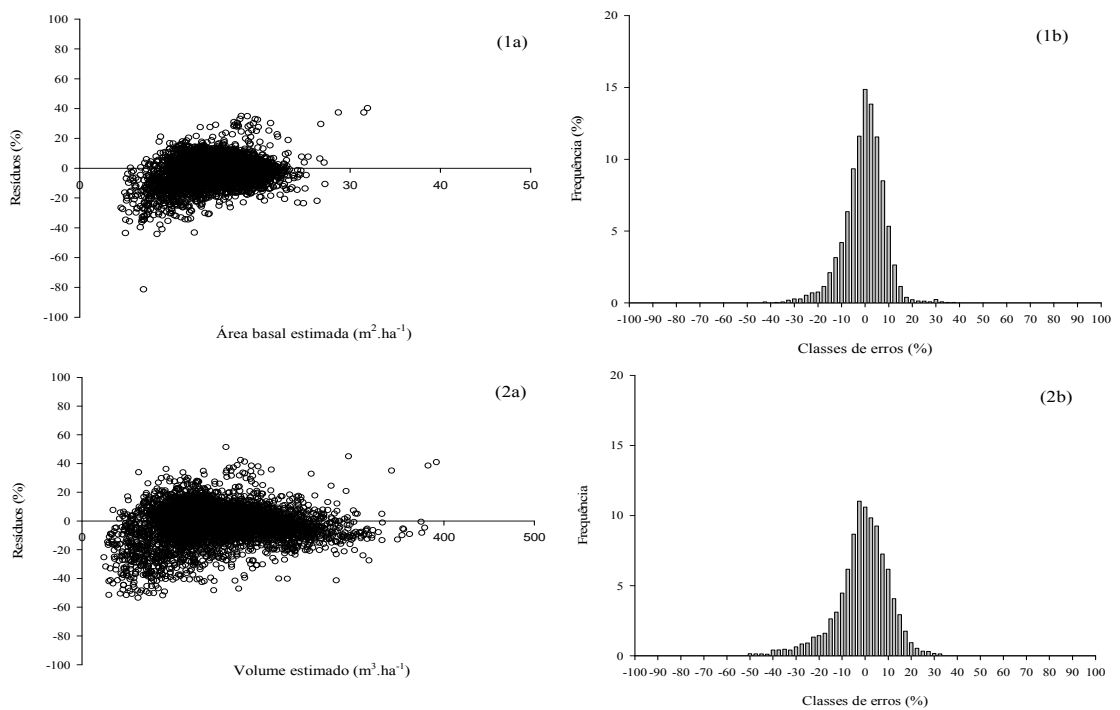


Figura 15. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 2 pelo método MQO.

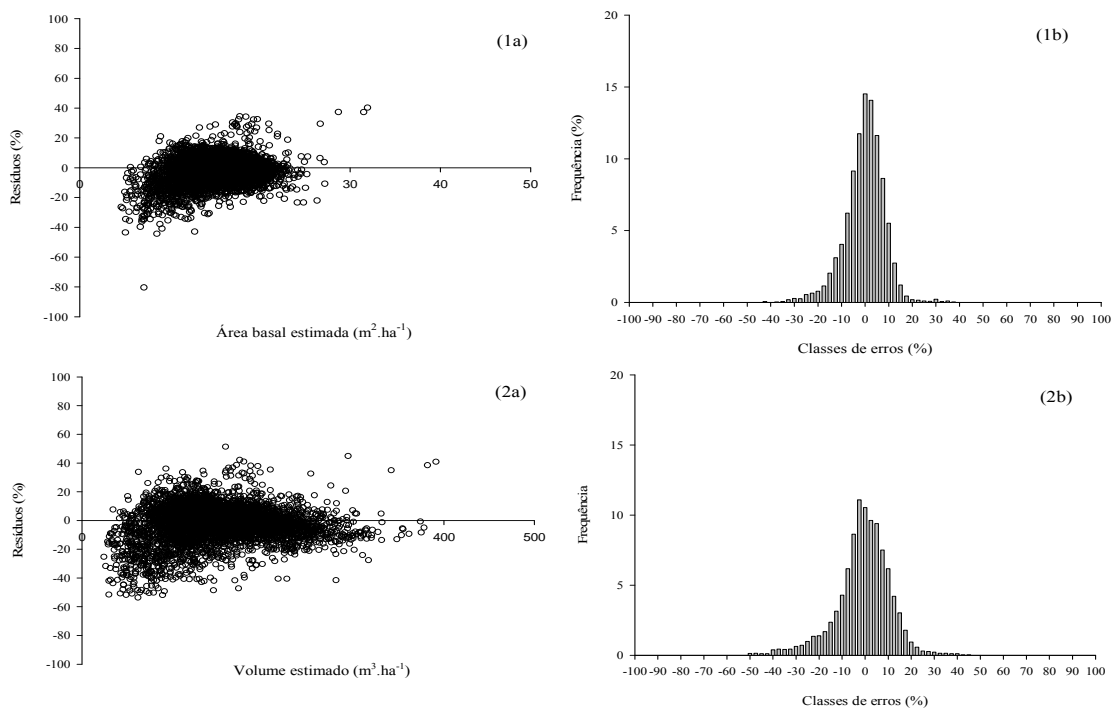


Figura 16. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 2 pelo método MQG.

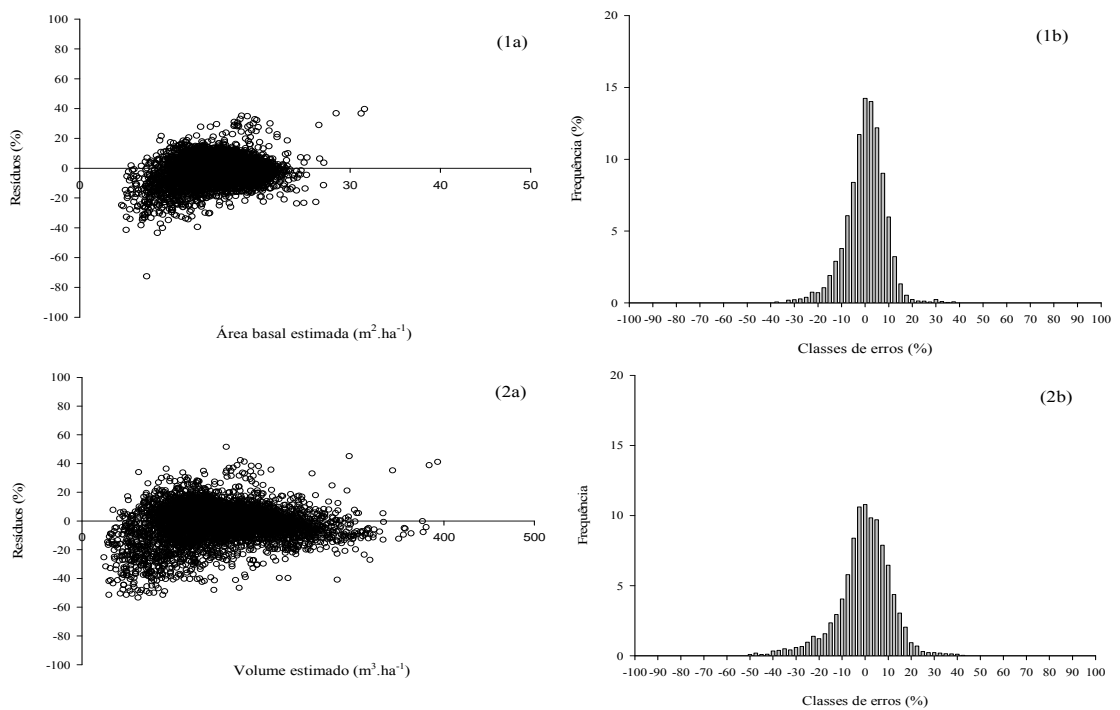


Figura 17. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 2 pelo método MQG_W.

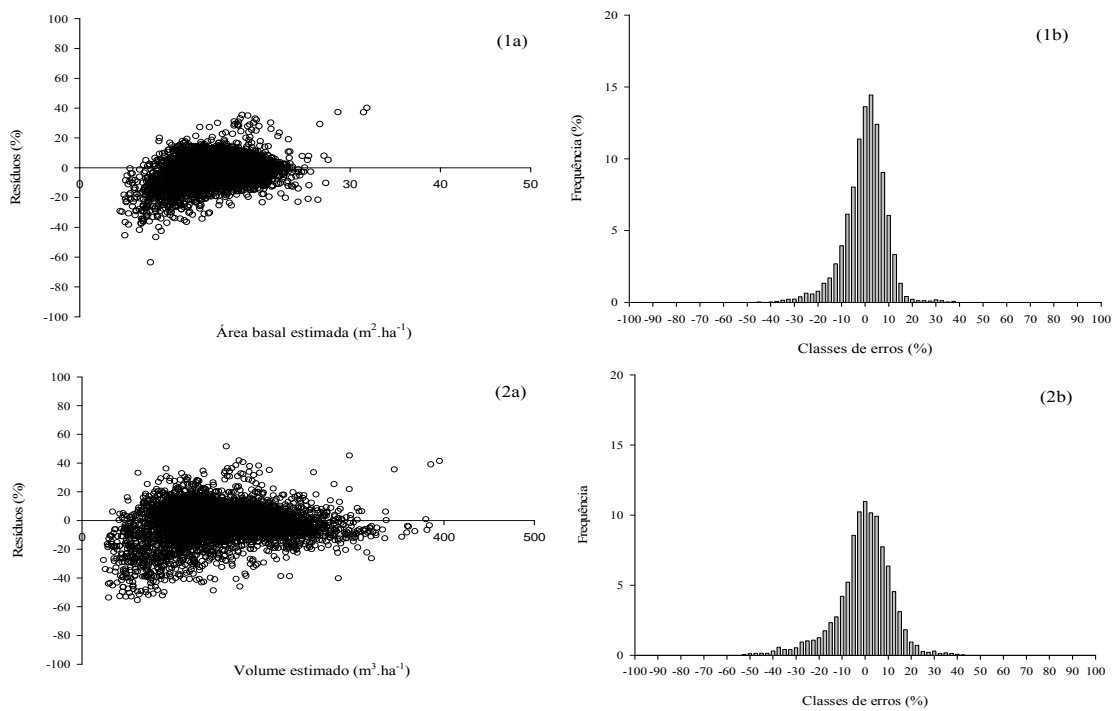


Figura 18. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 2 pelo método MQG_WC.

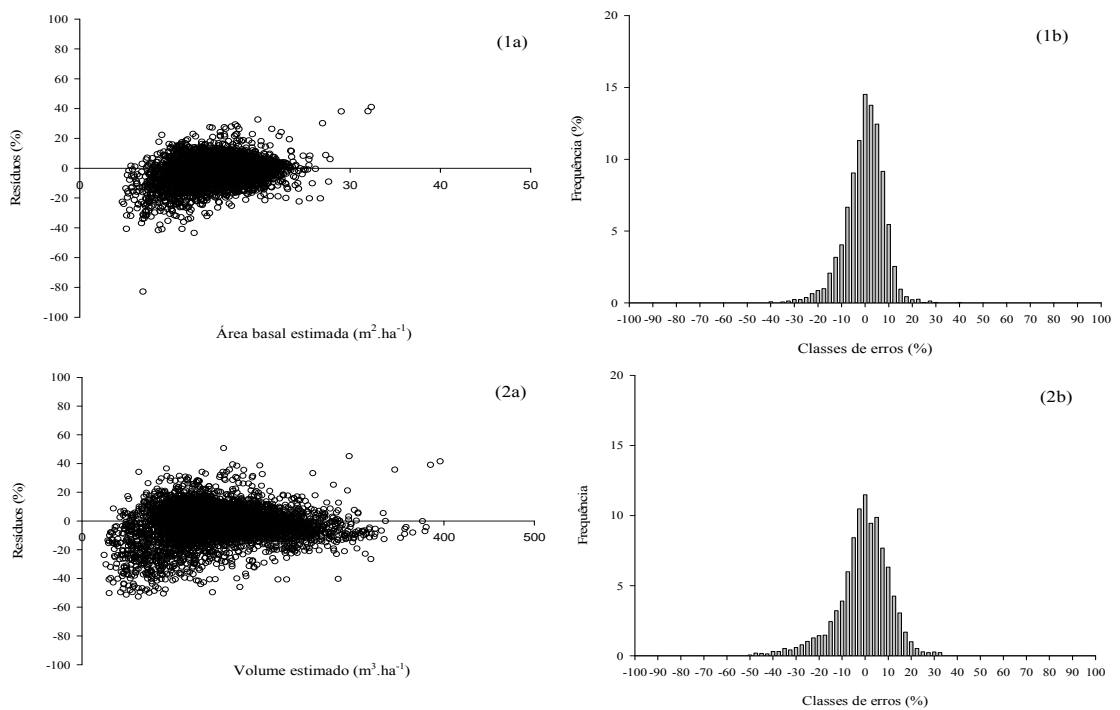


Figura 19. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 3 pelo método MQO.

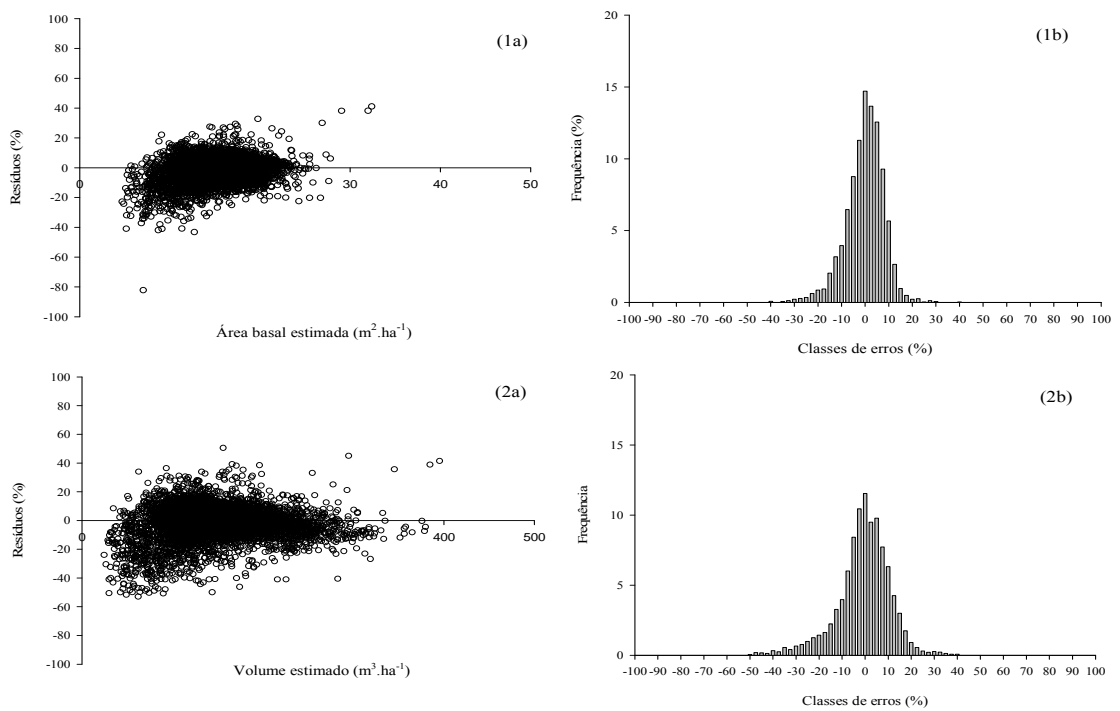


Figura 20. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 3 pelo método MQG.

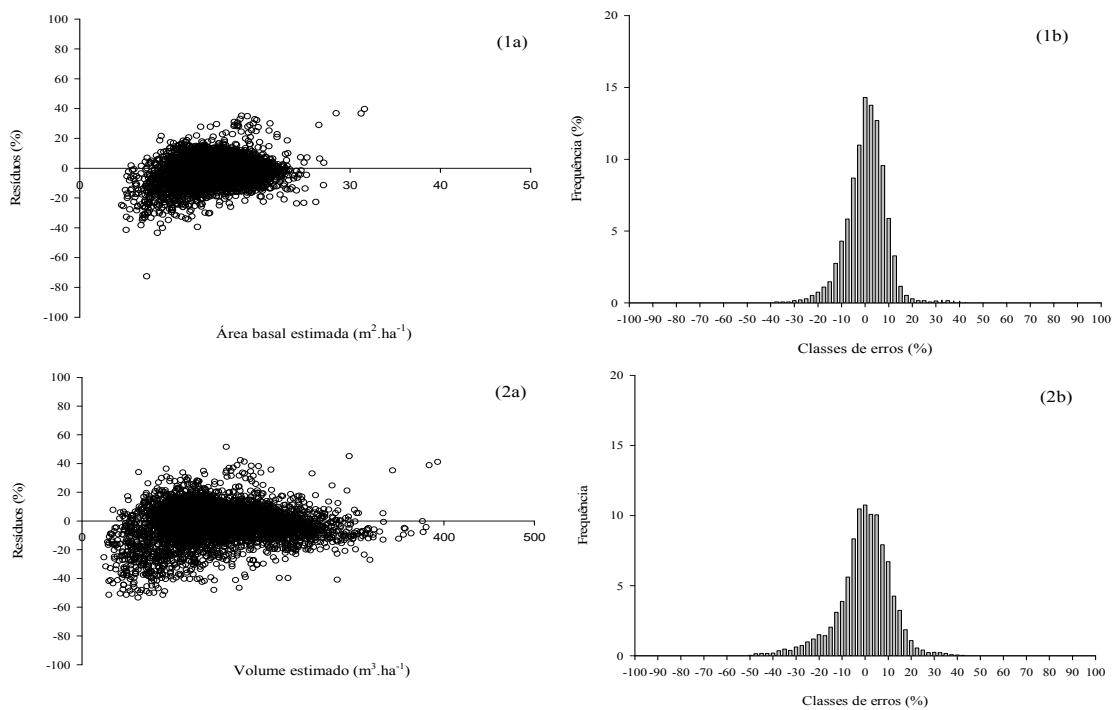


Figura 21. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 3 pelo método MQG_W.

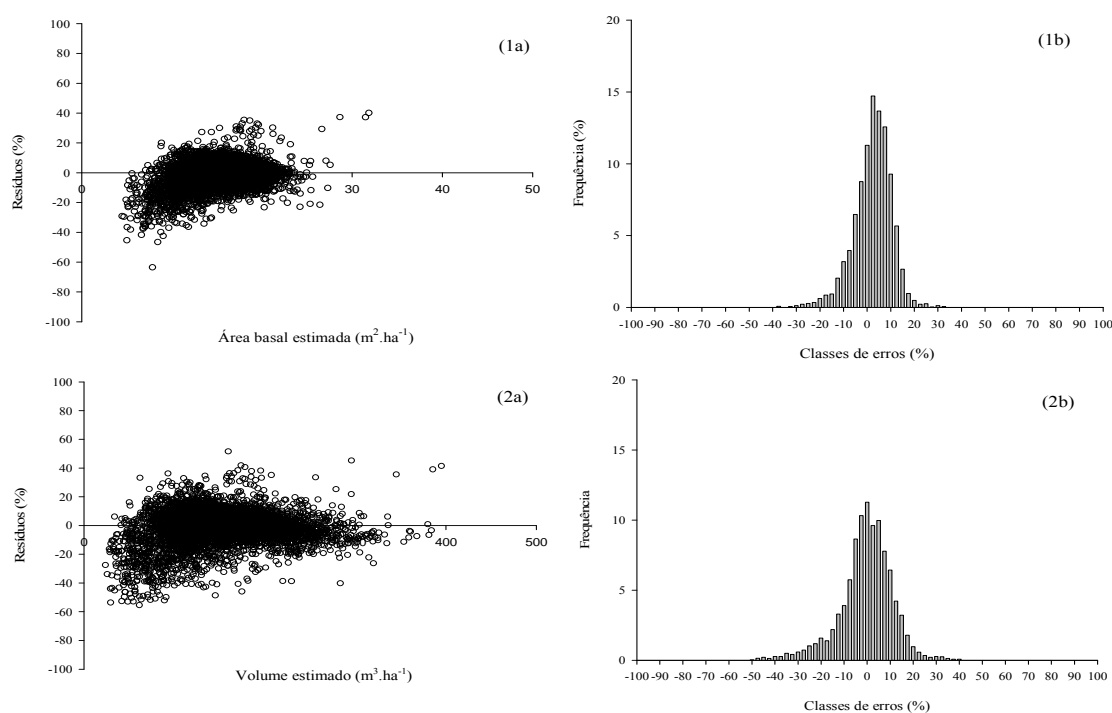


Figura 22. Distribuição dos resíduos em função da área basal (1a) e volume (2a) estimados e frequência residual por classe de erro para área basal (1b) e volume (2b) da alternativa 3 pelo método MQG_WC.

Tabela 11. Porcentagem da frequência dos resíduos em volume entre os intervalos $\pm 10\%$ e $\pm 20\%$ para cada método de ajuste nas três alternativas de modelagem

Alternativa	Método de estimativa	Intervalos (%)	
		± 10	± 20
1	MQO	58,27	90,14
	MQG	57,67	89,89
	MQG_W	73,82	92,68
	MQG_WC	73,82	92,41
2	MQO	49,77	86,04
	MQG	49,32	85,73
	MQG_W	73,52	92,00
	MQG_WC	73,37	91,89
3	MQO	73,64	92,24
	MQG	73,74	92,24
	MQG_W	73,85	92,39
	MQG_WC	73,72	92,41

Após a constatação da superioridade dos ajustes por mínimos quadrados generalizados, a avaliação do método de ajuste com maior consistência estatística baseou-se nos valores do Critério de Informação de Akaike (AIC) e do Critério de Informação Bayesiano (BIC) e pelas estatísticas do Teste de Razão da Máxima Verossimilhança TRMV (Tabela 5). Para equação de área basal, nas três alternativas de modelagem, os valores reduzidos do AIC e do BIC e o elevado valor e significância

($p < 0,0001$) para TRMV (Tabela 12) denotam a superioridade do ajuste por mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade e a autocorrelação residual. Este mesmo comportamento foi observado para equação de volume (Tabela 13), comprovando a eficácia estatística deste método e, conseqüentemente, pela sua seleção o ajuste das alternativas de modelagem propostas.

Tabela 12. Valores do Critério de Informação de Akaike (AIC), do Critério de Informação Bayesiano (BIC) e estatísticas do Teste de Razão da Máxima Verossimilhança (TRMV) entre as alternativas ajustadas pelos métodos de mínimos quadrados generalizados para equação de área basal

Alternativa 1					
Método	AIC	BIC	$\ln(L_p)$	TRMV	p-value
MQG	-13504.84	-13485.20	6755.418	---	
MQG_W	-13723.70	-13697.51	6865.851	220.865	<0,0001
MQG_WC	-15019.80	-14987.07	7514.899	1518.962	<0,0001
Alternativa 2					
Método	AIC	BIC	$\ln(L_p)$	TRMV	p-value
MQG	-13533.16	-13513.52	6769.579	---	
MQG_W	-13759.15	-13732.96	6883.573	227.9876	<0,0001
MQG_WC	-15023.13	-14990.40	7516.567	1493.975	<0,0001
Alternativa 3					
Método	AIC	BIC	$\ln(L_p)$	TRMV	p-value
MQG	-13460.85	-13447.75	6732.424	---	
MQG_W	-13705.30	-13685.66	6855.650	246.4508	<0,0001
MQG_WC	-15033.63	-15007.44	7520.815	1576.782	<0,0001

Tabela 13. Valores do Critério de Informação de Akaike (AIC), do Critério de Informação Bayesiano (BIC) e estatísticas do Teste de Razão da Máxima Verossimilhança (TRMV) as alternativas ajustadas pelos mínimos quadrados generalizados para equação de volume

Alternativa 1					
Método	AIC	BIC	$\ln(L_p)$	TRMV	p-value
MQG	-7057,658	-7024,926	3533,829	---	
MQG_W	-7195,167	-7155,889	3603,584	139,5089	<0,0001
MQG_WC	-8775,520	-8729,696	4394,760	1721,862	<0,0001
Alternativa 2					
Método	AIC	BIC	$\ln(L_p)$	TRMV	p-value
MQG	-7209,437	-7176,705	3609,718	---	
MQG_W	-7360,526	-7321,248	3686,263	153,0899	<0,0001
MQG_WC	-8843,443	-8797,618	4428,722	1638,006	<0,0001
Alternativa 3					
Método	AIC	BIC	$\ln(L_p)$	TRMV	p-value
MQG	-6868,972	-6836,240	3439,486	---	
MQG_W	-7002,512	-6963,234	3507,256	135,5404	<0,0001
MQG_WC	-8713,110	-8667,285	4363,555	1848,138	<0,0001

Em se tratando da idade técnica de colheita (ITC)(Tabela 14), resultante da aplicação de cada método de ajuste para as três alternativas, comprovou-se a ocorrência de menores idades técnicas de colheita para as melhores classes de produtividade. Em relação aos métodos de ajustes, não foram verificadas diferenças significativas em relação à ITC e à produtividade volumétrica na ITC. Mesmo a alternativa 2 não tendo apresentado maiores diferenças na ITC, os valores da produtividade na ITC não diferiram de maneira substancial, igualando-se ao encontrado nas demais alternativas. Isto corrobora o já então esclarecido que, mesmo o ajuste por método de mínimos quadrados ordinários não sendo o mais eficiente quando da ocorrência de heterocedasticidade e autocorrelação residual, suas estimativas podem ser não-tendenciosas e, dessa forma, não serem tão prejudiciais. Contudo, à medida que metodologias mais consistentes e de fácil aplicação encontram-se disponíveis, tal como as baseadas no método dos mínimos quadrados generalizados, sua utilização torna-se, mais que pertinente, imperativa.

Tabela 14. Idades técnicas de colheita por classe de produtividade para cada método de ajuste nas três alternativas de modelagem

Alternativa	Método de estimativa	Classes de produtividade					
		Idade técnica de colheita (meses)			Produtividade ($m^3 ha^{-1} ano^{-1}$) na idade técnica de colheita		
		I	II	III	I	II	III
1	MQO	52	60	69	44,76	34,95	27,02
	MQG	52	59	69	44,76	34,94	27,01
	MQG_W	53	60	70	44,94	34,80	26,63
	MQG_WC	53	60	68	45,62	34,71	25,98
2	MQO	54	56	59	46,10	34,79	25,45
	MQG	54	56	59	46,08	34,79	25,47
	MQG_W	55	57	60	45,99	34,85	25,61
	MQG_WC	57	58	61	45,44	34,74	25,78
3	MQO	53	59	67	45,83	34,59	25,68
	MQG	53	59	67	45,82	34,55	25,64
	MQG_W	55	60	69	45,65	34,53	25,70
	MQG_WC	53	60	68	45,53	34,71	26,04

Baseando-se nas medidas de exatidão, nos valores do AIC e do BIC e na significância do TRMV, todas as alternativas foram satisfatórias com relação ao ajuste pelo método MQG_WC, com certa superioridade das alternativas 2 e 3. Diante disso, o comportamento diferenciado da modelagem florestal, frente aos métodos de ajustes baseados na forma reduzida do modelo de Clutter, reafirma a relevância de estudos a respeito do comportamento estatístico da modelagem, priorizando a abordagem teórica e a garantia de consistência das estimativas.

3.3 Prognose

A Tabela 15 apresenta os Incrementos Médios Anuais (IMA) em volume nas idades 6 e 7 anos pelos métodos de ajuste nas três alternativas de modelagem. De maneira geral, as projeções dos IMA a partir de 24 meses apresentaram diferenças entre as alternativas e, com o aumento da idade inicial, houve tendência de se igualarem. Demonstrou-se, assim, a instabilidade ao se adotar idades muito jovens para prognose da produção em volume. Em relação aos métodos de ajuste, não observou-se variação significativa, ou seja, do ponto de vista da prognose não houve diferença. Portanto, a aplicação comercial da modelagem por mínimos quadrados ordinários não implicaria em prejuízos à estimativa da produção. Todavia, reafirma-se a relevância de se utilizar o método mais eficiente estatisticamente e, com isso, optou-se pelos mínimos quadrados generalizados com consideração da heterocedasticidade e da autocorrelação residual.

Tabela 15. Incrementos Médios Anuais (IMA) aos 6 e 7 anos em cada método de ajuste para as três alternativas de modelagem

MQO						
Alternativa						
	1		2		3	
Idade inicial (meses)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)
24	38,67	37,09	41,66	47,15	39,90	38,34
36	31,07	30,40	31,53	36,07	31,12	30,44
48	31,72	30,99	31,68	36,11	31,82	31,11
60	29,69	29,23	29,49	33,66	29,70	29,23
72	30,27	29,72	30,35	34,41	30,27	29,73
84	29,46	28,98	30,02	33,96	29,42	28,98
MQG						
Alternativa						
	1		2		3	
Idade inicial (meses)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)
24	38,55	36,94	41,52	40,23	39,77	38,17
36	31,00	30,29	31,46	30,81	31,03	30,32
48	31,64	30,88	31,60	30,84	31,72	30,98
60	29,62	29,12	29,41	28,76	29,61	29,11
72	30,20	29,61	30,27	29,39	30,17	29,61
84	29,38	28,88	29,94	29,00	29,33	28,86
MQG_W						
Alternativa						

	1		2		3	
Idade inicial (meses)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)
24	38,95	37,43	41,39	40,17	39,83	38,34
36	31,05	30,41	31,50	30,90	31,10	30,47
48	31,74	31,05	31,75	31,07	31,83	31,17
60	29,71	29,27	29,55	28,99	29,73	29,30
72	30,33	29,80	30,36	29,61	30,34	29,84
84	29,52	29,08	29,92	29,14	29,52	29,11

MQG_WC

	Alternativa					
	1		2		3	
Idade inicial (meses)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)	IMA (6 anos)	IMA (7 anos)
24	39,64	38,10	40,32	39,06	39,57	38,04
36	31,08	30,41	31,19	30,55	31,08	30,42
48	31,76	31,06	31,82	31,16	31,76	31,07
60	29,68	29,22	29,67	29,19	29,69	29,23
72	30,25	29,73	30,31	29,75	30,26	29,74
84	29,40	28,97	29,57	29,08	29,41	28,99

4 CONCLUSÕES

- ✓ Rejeitou-se a hipótese nula H_{02} : A utilização de técnicas de regressão linear por mínimos quadrados ordinários em dois estágios para o ajuste de modelos de crescimento e produção justifica-se pela superioridade em eficiência em detrimento à correção da heterocedasticidade e autocorrelação pelo método de mínimos quadrados generalizados.
- ✓ O ajuste por mínimos quadrados generalizados considerando-se a heterocedasticidade e a autocorrelação residual para modelagem da altura dominante é o método de ajuste indicado para o modelo Logístico.
- ✓ A inconsistência no coeficiente α_1 , quando da aplicação do método de mínimos quadrados ordinários em dois estágios no modelo de Clutter está associada à ocorrência de autocorrelação residual.
- ✓ A ineficiência estatística associada à ocorrência de heterocedasticidade e autocorrelação residual encontra-se na estrutura da equação da área basal do modelo de Clutter ao se adotar a capacidade produtiva como variável explicativa.
- ✓ As três alternativas de modelagem avaliadas neste estudo resultaram nas mesmas produtividades na idade técnica de colheita.
- ✓ A aplicação comercial da modelagem por mínimos quadrados ordinários em dois estágios não implicaria em prejuízos à estimativa da produção pelo modelo de Clutter.
- ✓ Dos métodos de ajuste avaliados, o mais eficiente estatisticamente foi de mínimos quadrados generalizados levando-se em consideração a heterocedasticidade e a autocorrelação residual.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUSE, A. Goodness of fit in generalized least square estimation. **The American Statistician**, v.27, n.3, p.103-108, 1973.

CALEGARIO, N.; CALEGARIO, CL. L.; MAESTRI, R.; DANIELS, L. Melhoria da qualidade de ajuste de modelos biométricos florestais pelo emprego da teoria dos modelos não lineares generalizados. **Revista Scientia Florestalis**, v.69, p.38-50, 2005.

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal**: perguntas e respostas. 3.ed. Viçosa, MG: Universidade Federal de Viçosa, 548 p., 2009.

CARVALHO, S. P. C.; CALEGARIO, N.; SILVA, F. F.; BORGES, L. A. C.; MENDONÇA, A. R.; LIMA, M. P. Modelos não lineares generalizados aplicados na predição da área basal e volume de *Eucalyptus* clonal. **Revista Cerne**, v.17, n.4, p.541-548, 2011.

CLUTTER, J.L. Compatible growth and yield models for loblolly pine. **Forest Science**, v.9, n.3, p.354-371, 1963.

DIAZ, M. P. ; COUTO, H. T. Z. Modelos generalizados para mortalidade de árvores de *Eucalyptus grandis* no estado de São Paulo, Brasil. **Scientia Forestalis**, v.56, p.101-111, 1999.

GARCÍA, O. New class of growth models for even-aged stands: *Pinus radiata* in Golden Downs Forest. **New Zealand Journal of Forest Science**. v.14, p.65-88, 1984.

GARCÍA, O. Growth modeling—A (re)view. **New Zealand Forestry**, v.33, n.3, p.14-17, 1988.

GARCÍA, O.; BURKHART, H. E.; AMATEIS, R. L. A biologically-consistent stand growth model for loblolly pine in the Piedmont physiographic region, USA. **Forest Ecology and Management**, v. 262, p.2035-2041, 2011a.

GARCÍA, O. A parsimonious dynamic stand model for interior spruce in British Columbia. **Forest Science**, v.57, n.4, p.265-280, 2011b.

GREGOIRE, T. G.; SCHABENBERGER, O.; BARRETT, J. P. Linear modeling of irregularly spaced, unbalanced, longitudinal data from permanent-plot measurements. **Canadian Journal of Research**, v.25, n.1, p.137-156, 1995.

GUJARATI, D. N. **Econometria básica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 816 p., 2006.

JOHNSTON, J. **Econometric methods**, 2 ed. New York, McGraw-Hill, 1972.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 528 p., 2009.

SEBER, G.A.F.; WILD, C.J. **Nonlinear regression**. New York: John Wiley, 1989. 792p.