

## AS CURVAS RELATIVAS CONTÍNUAS DE FORMA DE PREUßNER PARA O SORTIMENTO DOS FUSTES DE ESPÉCIES FLORESTAIS

Sylvio Péllico Netto<sup>1</sup>

**RESUMO** - O presente trabalho apresenta a teoria de curvas relativas de forma desenvolvidas por Preußner na Universidade de Dresden-Alemanha. A metodologia foi ilustrada pela aplicação a uma exaustiva amostragem de árvores nativas de *Araucaria angustifolia* realizada em toda a região Sul do Brasil. Os resultados mostraram uma alentadora oportunidade para sua utilização no campo de sortimentos de fustes comerciais, principalmente para árvores das florestas tropicais.

**PALAVRAS-CHAVE:** Funções de forma, sortimento dos Fustes, Curvas de Preußner

## THE CONTINUOUS RELATIVE PREUßNER FORM FUNCTIONS FOR STEM SORTING OF FOREST SPECIES

**ABSTRACT** - The present paper presents the theory of taper functions developed by Preußner, a researcher from the University of Dresden in Germany. The methodology was illustrated in this paper to taper functions developed for the species *Araucaria angustifolia* (Parana pine), in native trees sampled in all Southern Brazil. The results showed a very encouraging opportunity for recommending this theory for sorting commercial trees, specially for those from tropical forests.

**KEY-WORDS:** Form functions, stems assortment, Preußner curves

### INTRODUÇÃO

Na última década vários trabalhos foram escritos sobre curvas de forma visando aprimorar os procedimentos científicos para permitir a obtenção de sortimento do fustes de árvores, economicamente diversificados, quanto ao seu uso final.

Apesar da primeira tentativa de estabelecer um relacionamento entre séries diamétricas e séries de alturas ter sido apresentada por Höjer (1903), somente bem mais tarde foi efetivada por Altherr (1953), que construiu um sistema baseado no princípio da régua de cálculo, onde diâmetros e alturas são obtidos em valores absolutos a partir de seus valores relativos.

Mais tarde, foi aventada por outros autores, a possibilidade de relacionar as séries diamétricas e de alturas através de uma função polinomial. Osumi (1959) aplicou tal conceito para a espécie *Criptomeria japonica*, tendo-o solucionado através de um polinômio do 3º grau.

Wutt (1961), Prodan (1965), Schöpfer (1966) e Peters (1971) propuseram para diferentes espécies o ajustamento de um polinômio do 5º grau, tendo apresentado a vantagem de descrever a forma com uma única função,

facilitando sua integração e resultando em boa precisão.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \quad (1)$$

onde

$$y = \frac{dx}{d_{0.1}} Ax e \quad x = \frac{hx}{h} = A'_x \quad (2)$$

Peters (1971) aplicou tal processo à espécie *Araucaria araucana* com bons resultados no Chile.

Munro (1968) aplicou este processo para coníferas no Canadá, onde o diâmetro "d" sem casca foi resolvido através de uma função parabólica.

$$\frac{dx}{d} = a + b \frac{hx}{h} + c \frac{hx^2}{h^2} \quad (3)$$

ou,

$$y = a + bx + cx^2 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Departamento de Silvicultura e Manejo - UFPR - CP- 2959 - 80035-010 - Curitiba - PR.

Observe, que a série relativa dos diâmetros, neste caso, foi tomada em relação ao DAP, ou seja uma série denominada de artificial.

Afirma Munro que este modelo possibilita obter estimativas de dx dentro do intervalo de  $\pm 3$  cm, com confiabilidade de 95% de probabilidade. Prodan (1965) afirma, entretanto, que o ajuste de um polinômio do 3º grau não resultou em boas estimativas para dx, quando aplicado à espécie Fichte - *Picea abies*.

Mais recentemente a literatura sobre curvas de forma foi ampliada com a introdução da teoria denominada "Spline" com os primeiros trabalhos apresentados nos Estados Unidos por Ahlberg et al. (1967) e por Reinsch (1967), tratando ambos trabalhos sobre a teoria e aplicação de funções Spline, que constituem em se ajustar uma sucessão de polinômios ao longo do fuste das árvores, de tal forma a unificá-los sem descontinuidade.

Liu (1980) unificou todos os conceitos de Spline em seu compreensível trabalho publicado no Forest Science, sobre estimativa de volume de toras através de aproximações "Spline".

Com aproximada concepção, valendo-se da segmentação do fuste em partes, um novo conceito sobre curvas de forma foi introduzido por Preußner (1974). Seu processo constitui em subdividir a curva de forma em 4 partes distintas,

sendo cada uma delas equacionada com uma parábola. A metodologia de Preußner apresenta grandes atrativos, quando comparados com os demais anteriormente mencionados, por razões que se tornarão claras no desenvolvimento do seu conteúdo teórico.

## AS CURVAS CONTÍNUAS DE FORMA DE PREÜßNER

### • A construção da curva de forma

Através de uma sucessiva coleta de quocientes de forma, todos em posições relativas do fuste, conforme proposto por Hohenadl (1924), pode-se estabelecer uma curva contínua de forma, que une os sucessivos extremos dos quocientes, tomados a uma referência básica; no caso de Preußner no diâmetro  $d_{0,5h}$  Figura 1.

Essa curva quando estruturada num sistema de coordenadas, tornando-se o eixo x o comprimento do fuste passando pelo seu centro geométrico e no eixo y, conseqüentemente, os raios de forma, tem-se a função matemática configurada  $y = d_{0,5h} f(x)$ , conforme o que está apresentado na Figura 2.

Como o diâmetro e não o raio é usado nas estimativas volumétricas do fuste, o ajuste será equacionado tornando y como diâmetro, por

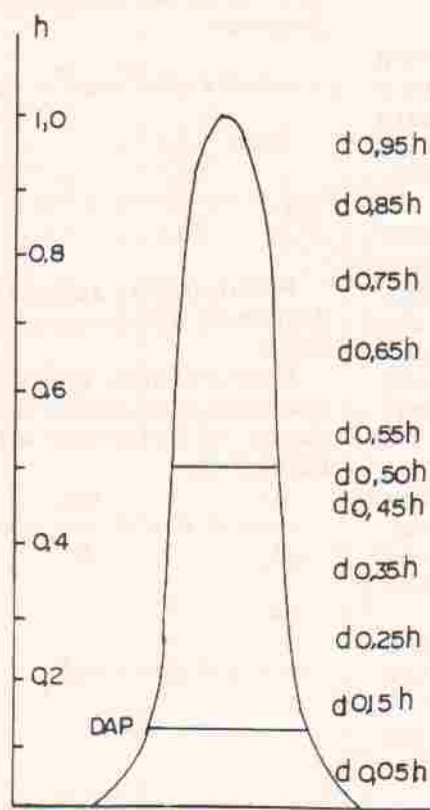


FIGURA 1. Estrutura do fuste de uma árvore com medições relativas.

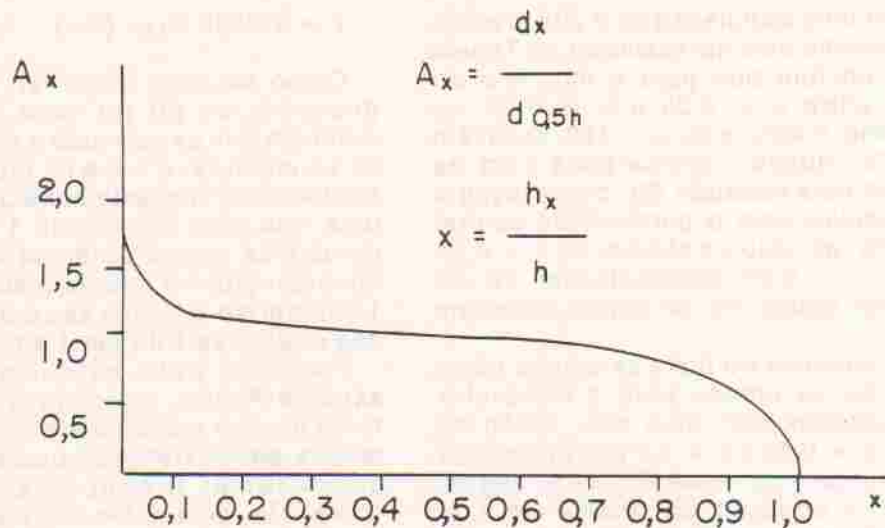


FIGURA 2. Curvas de forma,  $y = d_{0,5h} \cdot f(x)$ .

razões de ordem prática. Nessas circunstâncias, não se muda em nada o conceito teórico do ajuste, apenas será necessário manter em mente, que a variável "y" foi duplicada e, conseqüentemente, o volume quadruplicado quando este for usado nos cálculos estimativos.

A variável "x" tem existência real no intervalo entre 0,0 e 1,0 dado que  $0/h \leq x \leq hx/h$ . A variável "y" representa, portanto, os diâmetros absolutos correspondentes aos seqüentes pontos onde foram tomados os quocientes de forma.

Se observando, a curva de forma pode ser equacionada por uma única função matemática, ou por um conjunto de funções sucessivas tomadas ao longo do fuste.

• **A solução da curva de forma em partes, em função do diâmetro médio  $d_{0,5h}$  proposto por Preußner**

Considerando-se que o fuste de uma árvore pode ser subdividido em partes, observando-se suas mudanças peculiares, em forma, torna-se possível identificar com facilidade um neilóide na base, um ou mais parabolóides no centro e um cone no ápice do fuste.

Procurando-se observar com atenção o fuste, pode-se estabelecer os limites equilibrados dos sólidos acima mencionados.

Tentando-se considerar uma solução matematicamente consistente e mantendo-se uma visão de praticidade e facilidades operativas para o Engenheiro Floretal, Preußner propôs que os segmentos do fuste fossem ajustados com uma parábola clássica, ou seja

$$y^2 = p \cdot x \quad (5)$$

Como a curva de forma é decrescente da esquerda para a direita (-x) e sua variação relativa à variável x, tem como ponto de interseção o valor 1 e não zero, então (5) deve ser expresso com a forma

$$y^2 = p(1-x) \quad (6)$$

ou

$$y = a \sqrt{1-x} \quad (7)$$

Para se conhecer o valor da constante a, pode-se valer do valor conhecido de x para o diâmetro tomado como referência, ou  $d_{0,5h}$ . Então

$$y = d_{0,5h}, \quad x = 0,5$$

e

$$a = \frac{y}{\sqrt{1-x}} = \frac{d_{0,5h}}{\sqrt{1-0,5}} = \frac{d_{0,5h}}{\sqrt{0,5}} = d_{0,5h} \cdot 1,4142 \quad (8)$$

A equação para o parabolóide tomado no centro da árvore é obtido pela substituição de (8) em (7)

$$y = 1,4142 d_{0,5h} \sqrt{1-x}$$

onde:

y = diâmetro na posição x;

$d_{0,5h}$  = diâmetro no meio do fuste

hx

x =  $\frac{hx}{h}$  = comprimento relativo do fuste;

h

l = comprimento do fuste no diâmetro considerado

h = altura total da árvore.

Testando em uma população de 2.238 árvores de Fichte, conforme está apresentado no Tabela 1, Preußner concluiu que para o intervalo do fuste tomado entre  $x = 0,25$  e  $x = 0,60$ , os valores da série média  $y/d_{0,5h} \cdot 100$  variavam menos que 1%, quando comparados com os valores obtidos pela equação (9), o que levou a fixar esta condição para o parabolóide central do fuste. Como os valores abaixo de  $x = 0,25$  e superiores  $x = 0,60$  extrapolaram 1% de variação, novas equações de ajuste deveriam ser obtidas.

Se na parte superior do fuste se admite obter um cone, então os limites para a variável  $x$  podem ser ajustados com uma reta. Então no intervalo entre  $x = 0,60$  e  $x = 1,0$  pode interligar de forma contínua uma equação como segue: Para  $x = 0,60$  a equação (9) resulta em  $y = 0,8945 d_{0,5h}$ . Para o ponto de interseção ou ápice do fuste onde  $x = 0$  e  $y = 1$  pode-se obter a equação para a reta, ou seja

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ou

$$\frac{y - 0}{0,8945 - 0} = \frac{x - 1}{0,60 - 1}$$

ou ainda

$$y = 2,2362 d_{0,5h} (1-x) \quad (10)$$

Como se pode observar, a equação (10) se diferencia da (9) no valor da constante e na potência que se submete a expressão  $(1-x)$ , que na equação (9) é  $1/2$  e na (10) é 1. Portanto, daí depende-se que esta equação funcionará como uma reta com a potência 1 e tornar-se-á mais parabólica com a potência 0,5. Aplicando-se a equação (10) no intervalo entre  $x = 0,60$  e  $x = 1,0$  poder-se-á avaliar seu comportamento frente aos dados reais da série amostral coletada.

Preußner, após este teste com a série da espécie Fichte, concluiu que o expoente 0,5 torna a curva muito forte e 1 muito fraca, ou seja, resulta em diferenças superiores a 1%. Propôs assim tomar o expoente  $3/4$  e reavaliar a expressão, bem como seu intervalo de validade, ou seja:

$$y = c \cdot d_{0,5h} (1-x)^{3/4}$$

Como a condição de continuidade da curva de forma é pré-condição matemática para o seccionamento do fuste, então a constante "c" pode ser obtida no ponto limítrofe do segmento anterior

$$1,4142 d_{0,5h} \sqrt{1-0,60} = c \cdot d_{0,5h} (1-0,60)^{3/4}$$

$$e \\ c = 1,7782$$

TABELA 1. Série relativa de forma equacionada para a espécie fichte por Preußner.

x	Observada Ax	Ajustada Bx y/d <sub>0,5h</sub> . 100	Desvio em % entre a série ajustada e Ax
0,00	184,0	181,1	-1,6
0,05	142,5	142,8	0,2
0,15	128,5	128,7	0,2
0,25	121,5	122,5	0,8
0,35	114,0	114,0	0,0
0,45	105,0	104,9	-0,1
0,50	100,0	100,0	0,0
0,55	95,0	94,9	-0,1
0,65	81,0	80,9	-0,1
0,75	63,5	62,9	-0,9
0,85	41,5	41,1	-1,0
0,95	17,0	16,4	-3,5
1,00	0,0	0	0,0

A nova expressão para o próximo segmento é pois dada por

$$y = 1,7782 d_{0,5h} (1-x)^{3/4} \quad (11)$$

Testada a expressão (11) em dados reais da série para a espécie Fichte permitiu Preußner concluir, que apenas no intervalo entre  $x = 0,60$  e  $x = 0,75$ , as diferenças entre os dados reais e da função (11) mantiveram erros inferiores a 1%, indicando assim que no segmento final nova modificação no expoente deverá ser feita.

Usando-se o mesmo raciocínio Preußner obteve as expressões para a parte básica e para o ponteiro do fuste, daí resultando as seguintes expressões e respectivos intervalos com menos de 1% de diferença entre as séries reais e as funções matemáticas resultantes, conforme está apresentado no Quadro 1.

$$y = \begin{cases} a_{11} \cdot d_{0,5h} \frac{1}{10\sqrt{1+bx}} & 0 \leq x \leq 0,25 \quad (12) \\ a_{21} \cdot d_{0,5h} \sqrt{1-x} & 0,25 \leq x \leq 0,60 \quad (13) \\ a_{31} \cdot d_{0,5h} \sqrt[4]{1-x} & 0,60 \leq x \leq 0,75 \quad (14) \\ a_{41} \cdot d_{0,5h} \sqrt[6]{1-x} & 0,75 \leq x \leq 1,00 \quad (15) \end{cases} \text{ para}$$

onde:

$$a_{11} = 1,8106$$

$$a_{21} = 1,4142$$

$$a_{31} = 1,7782$$

$$a_{41} = 1,9960$$

$$b = 195,5$$

Com relativa vantagem sobre os demais métodos a solução para a variável "x" em função de y pode ser facilmente obtida.

$$x = \begin{cases} 1 - \frac{a_{12}}{4} \frac{1}{d_{0,5h}^{10}} \frac{1}{b} & 1,225 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,811 \quad (16) \\ 1 - a_{22} \left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^2 & 0,894 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 1,225 \quad (17) \\ 1 - a_{32} \sqrt[3]{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^4} & 0,629 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,894 \quad (18) \\ 1 - a_{42} \sqrt[5]{\left(\frac{y}{d_{0,5h}}\right)^6} & 0 \leq \frac{y}{d_{0,5h}} \leq 0,629 \quad (19) \end{cases} \text{ para}$$

As constantes resultaram de

$$a_{12} = \frac{a_{11}^{10}}{b} = 1,9368 \quad a_{32} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a_{31}^4}} = 0,4643$$

$$a_{22} = \frac{1}{a_{21}^2} = 0,5000 \quad a_{42} = \frac{1}{5\sqrt[5]{a_{41}^6}} = 0,4363$$

Com as resultantes equações (16) a (19) é possível para um dado diâmetro "y" se obter sua posição relativa "x" no fuste. Observe que para a escolha própria da equação a ser usada deve-se antes calcular o valor de  $y/d_{0,5h}$  para o dado diâmetro escolhido "y".

#### • A curva de forma em função do diâmetro à altura do peito - DAP

Do ponto de vista prático, as curvas de forma devem ser apresentadas em função do diâmetro à altura do peito - DAP.

É importante salientar que a convenção das funções para o  $d_{1,30}$  será efetivada na dependência da altura da árvore. Se a árvore tiver uma altura maior que 5,20 m a conversão dar-se-á no primeiro segmento, usando-se a equação (12). Para árvores menores que 5,20 m a conversão dar-se-á no segundo segmento, usando-se a equação (13).

O comprimento relativo para o diâmetro  $d_{1,30}$  é dado por  $x = 1,3/h$  e, portanto,

$$d_{1,3} = a_{11} \cdot d_{0,5h} \frac{1}{10\sqrt{1+b\frac{1,3}{h}}} \quad (20)$$

Consequentemente,

$$d_{0,5h} = \frac{1}{a_{11}} \cdot d_{1,30} \sqrt[10]{1+b\frac{1,30}{h}} \quad (21)$$

Uma vez conhecidos os diâmetro e a altura de uma determinada árvore  $d_{1,30}$  e  $h$ , então a equação (21) pode ser considerada como uma constante K, ou seja

$$k = d_{1,30} \sqrt[10]{1+b\frac{1,30 \text{ m}}{h}} \quad (22)$$

É prudente lembrar que a altura da árvore deverá ser obrigatoriamente usada em metros.

Por conseqüência, facilita-se a obtenção do diâmetro  $d_{0,5h}$  em função de  $d_{1,30}$

$$d_{0,5h} = \frac{1}{a_{11}} \cdot k \quad (23)$$

Por substituição de (23) em (12) até (15) obtém-se:

$$y = \begin{cases} K \frac{1}{10\sqrt{1+bx}} \\ a_{23} \cdot K \sqrt{1-x} \\ a_{33} \cdot K \sqrt[4]{(1-x)^3} \\ a_{43} \cdot K \sqrt[6]{(1-x)^5} \end{cases} \text{ para } \begin{cases} 0 \leq x \leq 0,25 & (24) \\ 0,25 \leq x \leq 0,60 & (25) \\ 0,60 \leq x \leq 0,75 & (26) \\ 0,75 \leq x \leq 1,0 & (27) \end{cases}$$

$$a_{24} = \frac{1}{a_{23}^2} = 1,6390 \quad a_{34} = \frac{1}{\sqrt[3]{a_{33}^4}} = 1,0243$$

$$a_{44} = \frac{1}{\sqrt[5]{a_{43}^6}} = 0,8897$$

Onde

$$a_{23} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0,7811 \quad a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = 1,1024$$

$$a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 0,9821 \quad K = \frac{1,30 \text{ m}}{10\sqrt{1+b} \cdot \frac{1}{h}}$$

Para obtenção de alturas para um dado diâmetro, as equações de (24) a (27) podem igualmente ser resolvidas facilmente.

$$x = \begin{cases} \left[ \frac{1}{\left(\frac{y}{k}\right)^{10}} - 1 \right] \cdot \frac{1}{b} & 0,6764 \leq \frac{y}{k} \leq 1,0 & (28) \\ 1 - a_{24} \left(\frac{y}{k}\right)^2 & 0,4940 \leq \frac{y}{k} \leq 0,6764 & (29) \\ 1 - a_{34} \sqrt[3]{\left(\frac{y}{k}\right)^4} & 0,3473 \leq \frac{y}{k} \leq 0,4940 & (30) \\ 1 - a_{44} \sqrt[5]{\left(\frac{y}{k}\right)^6} & 0 \leq \frac{y}{k} \leq 0,3473 & (31) \end{cases}$$

onde

## APLICAÇÃO DA CURVA DE FORMA DE PREUBNER

A aplicação da curva de forma para fins de sortimento, permite a partir de um comprimento especificado no fuste conhecer aí o diâmetro, ou para um dado diâmetro conhecer o comprimento no fuste onde este está localizado. Naturalmente que as medidas do DAP e da altura da árvore devem ser conhecidas.

É necessário aqui observar que a solução matemática das funções mantém os mesmos coeficientes para qualquer espécie florestal. Estes apenas mudarão, se os intervalos de validade de cada uma das equações forem alterados. Fica, portanto, apenas a potência de cada uma das equações passível de variação para ser ajustada às variações de forma do fuste, conforme antes apresentado.

Péllico Neto (1979) apresentou a série média de quocientes de forma para a *Araucaria angustifolia*, obtida inicialmente em função do diâmetro base tomado a 1/10 da altura dos fustes, para 2465 árvores medidas em inventários florestais realizados em todo o sul do

TABELA 2. Série relativa contínua de forma da *Araucaria angustifolia* - Dados originais e estimados pelas funções.

X	Quocientes de forma A <sub>x</sub>	Quocientes Estimados B <sub>x</sub>	Erro %
0,00	1,847	1,805	-2,27%
0,05	1,359	1,357	-0,15%
0,15	1,196	1,199	0,25%
0,25	1,132	1,129	-0,26%
0,35	1,079	1,082	0,28%
0,45	1,027	1,029	0,19%
0,50	1,000	1,000	0,00%
0,55	0,970	0,969	-0,10%
0,65	0,904	0,899	-0,55%
0,75	0,803	0,799	-0,50%
0,85	0,578	0,573	0,29%
0,95	0,280	0,280	0,00%
1,00	0,000	0,000	0,00%

Brasil. Visando manter as mesmas condições desenvolvidas por Preußner, essa curva de forma foi reestruturada, tal que os quocientes de forma fossem obtidos em função do diâmetro tomado na metade do fuste,  $d_{0,5h}$ . O resultado da série relativa contínua de forma está apresentada na Tabela 2.

Igualmente, como apresentado no desenvolvimento das funções para os quatro segmentos em que o fuste foi seccionado, resultou em:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,805393 \frac{1}{(1 + 195,5x)^{0,12}} \quad 0,0 < x \leq 0,25 \quad (32) \\ 2^{\circ} \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,23114 (1-x)^{0,3} \quad 0,25 < x \leq 0,65 \quad (33) \\ 3^{\circ} \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,29749 (1-x)^{0,35} \quad 0,65 < x \leq 0,75 \quad (34) \\ 4^{\circ} \frac{y}{d_{0,5h}} = 1,96663 (1-x)^{0,85} \quad 0,75 < x \leq 1,0 \quad (35) \end{array} \right.$$

Os resultados obtidos pelas funções (32) a (35) foram comparados com os originais e calculado o erro percentual em cada ponto de referência, onde foram tomados os quocientes de forma. Tal avaliação está apresentada na Tabela 2.

Como pode ser observado em todos os pontos de referência o erro percentual foi mantido inferior a 1%, exceto no colo da árvore, porém não gerador de qualquer comprometimento nos estimadores relevantes do fuste.

A representação gráfica do ajuste e dos quocientes originais estão apresentados na Figura 3.

As demais transformações operativas para obtenção de alturas num dado diâmetro e tomadas em função do DAP estão sumarizadas a seguir:

$$X = \begin{cases} 0,70299 \frac{1}{(y/d_{0,5h})^{8,33}} - \frac{1}{195,5} & 1,129 \leq y/d_{0,5h} \leq 1,805 \quad (36) \\ 1 - 0,5000 (y/d_{0,5h})^{3,333} & \text{para } 0,898 \leq y/d_{0,5h} \leq 1,129 \quad (37) \\ 1 - 0,4752 (y/d_{0,5h})^{2,857} & 0,799 \leq y/d_{0,5h} \leq 0,898 \quad (38) \\ 1 - 0,3533 (y/d_{0,5h})^{1,5385} & 0 \leq y/d_{0,5h} \leq 0,799 \quad (39) \end{cases}$$

Para se ter essas equações em função do diâmetro à altura do peito - DAP, usa-se determinar  $K$  nas seguintes condições.

$$K = d_{1,3}^{8,33} \sqrt{1 + 195,5 \frac{1,3 \text{ m}}{h}} \left( \frac{1,3}{h} \leq 0,25 \right) \quad (40)$$

OU

$$K = d_{1,3} \cdot (1-x)^{0,3} \left( \frac{1,3}{h} > 0,25 \right) \quad (41)$$

Assim, para se obter o diâmetro a qualquer altura do fuste, em função do DAP, por substituição de  $K$  nas equações de (32) a (35), tem-se:

$$y = \begin{cases} k \frac{1}{8,33 \sqrt{1 + 195,5x}} & 0,0 \leq x \leq 0,25 \quad (42) \\ 0,6819 K (1-x)^{0,3} & \text{para } 0,25 \leq x \leq 0,65 \quad (43) \end{cases}$$

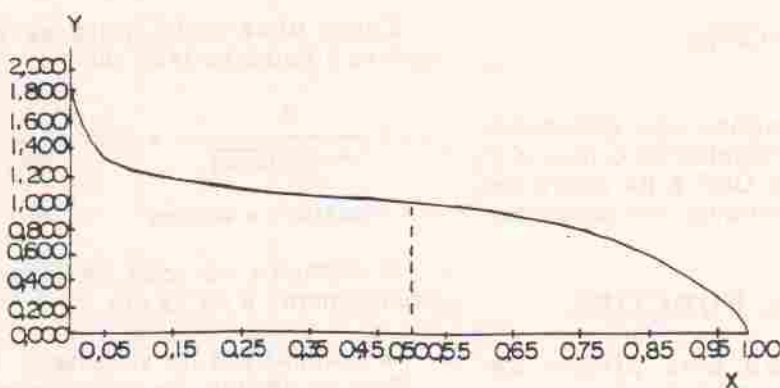


FIGURA 3. Curvas de forma para árvores nativas de *Araucaria angustifolia*.

$$y = \begin{cases} 0,7186 K \cdot (1-x)^{0,35} & \left\{ \begin{array}{l} 0,65 \leq x \leq 0,75 \\ 0,75 \leq x \leq 1,00 \end{array} \right. \quad (44) \\ 1,0892 K \cdot (1-x)^{0,65} & \quad (45) \end{cases}$$

As constantes foram obtidas pela introdução do DAP nas funções e, assim, tem-se

$$a_{23} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1,23114}{1,80554} = 0,6819$$

$$a_{33} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1,29749}{1,80554} = 0,7186$$

$$a_{43} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{1,96663}{1,80554} = 1,0892$$

Finalmente, para se obter a altura do fuste dado um diâmetro qualquer, com as funções ajustadas para DAP, tem-se:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{(y/k)^{6,33}} \cdot \frac{1}{195,5} & \left\{ \begin{array}{l} 0,625 \leq y/k \leq 1,00 \\ 0,498 \leq y/k \leq 0,625 \\ 0,443 \leq y/k \leq 0,498 \\ 0,00 \leq y/k \leq 0,443 \end{array} \right. \quad (46) \\ 1 - 3,5827(y/k)^{3,333} & \quad (47) \\ 1 - 2,5705(y/k)^{2,857} & \quad (48) \\ 1 - 0,8768(y/k)^{1,5385} & \quad (49) \end{cases} \text{ para}$$

As constantes foram obtidas pela introdução do DAP nas funções como se segue

$$a_{24} = \frac{1}{(a_{23})^{3,333}} = 3,5827$$

$$a_{34} = \frac{1}{(a_{33})^{2,857}} = 2,5705$$

$$a_{44} = \frac{1}{(a_{43})^{1,5385}} = 0,8768$$

Observe que essas funções são aplicáveis somente quando se tem previamente o valor K e este depende do valor do DAP e da altura de cada árvore, para que a variável Y/K possa ser introduzida nas equações.

## APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES

Suponha seja tomada uma árvore de *Araucaria angustifolia*, cujo diâmetro à altura do peito:  $d_{1,3} = 55,4$  cm e uma altura  $h = 32,0$  m.

Primeiramente calcula-se o valor de K. Como  $1,3/32 = 0,04 < 0,25$  então aplicando a fórmula 40 tem-se

$$K = 55,4 \cdot \frac{8,33}{\sqrt{1 + 195,5(0,04)}} = 71,94 \text{ cm}$$

### • Estimativas no fuste

Suponha que se queira saber, qual o comprimento da tora para um diâmetro de 15 cm do topo?

$$y = 15 \text{ cm}, \quad \frac{y}{K} = \frac{15 \text{ cm}}{71,94 \text{ cm}} = 0,2085$$

Como se pode observar, esta posição relativa para o diâmetro encontra-se na função (49). Portanto

$$x = 1 - 0,8768 (y/K)^{1,5385}$$

$$x = 1 - 0,8768(0,2085)^{1,5385} = 0,9214$$

O comprimento do fuste naquele diâmetro de 15 cm de topo é pois obtido como segue

$$l = x \cdot h = 0,9214 (32,0) =$$

$$l = 29,48 \text{ m}$$

Se ao contrário, o limite de uso da madeira for estipulado para a primeira tora um comprimento 3,40 m para uso em serraria, qual será o diâmetro no topo desta tora, cujos dados da árvore continuam os mesmos apresentados anteriormente?

$$l = 3,40 \text{ m}$$

e

$$x = 3,40 \text{ m}/32 \text{ m} = 0,106$$

Como observado, para se ter o diâmetro usa-se a equação (42), ou

$$y = k \frac{1}{8,33 \sqrt{1 + 195,5 x}} = 71,94 \frac{1}{8,33 \sqrt{1 + 195,5(0,106)}}$$

$$y = 71,94 \cdot (0,691) = 49,72 \text{ cm}$$

O diâmetro no topo da tora de 3,40 m de comprimento é 49,72 cm.

### • Estimativas de volume

Para o cálculo de volumes pode-se usar a integração das funções, que, no presente caso, não é complicada. Em se tratando de uma função relativa, portanto a integração poderá



ser efetuada no intervalo de variação da variável relativa  $x$  ou efetuada no intervalo de variação da variável relativa  $x$  ou  $0 \leq x \leq 1$ . Como as funções na variável  $Y$  resulta em diâmetro, então a integração para ser obtida em volume, será necessário multiplicá-la por  $\pi/4$  para se ter a área do círculo, pela  $h$  para se obter o volume do sólido e tomá-la para  $y^2$ , pois para o cálculo da área, o diâmetro é tomado ao quadrado. Então

$$V = \frac{\pi}{4} h \int_0^1 y^2 dx \quad (50)$$

Então tomando-se as funções para  $Y$  entre (42) e (45) tem-se que

$$V = \frac{\pi}{4} h \left[ \int_0^{0,25} \frac{K^2}{4,16\sqrt{1+bx}} dx + \int_{0,25}^{0,65} a_{23}K^2(1-x)^{0,6} dx + \int_{0,65}^{0,75} a_{23}K^2(1-x)^{0,7} dx + \int_{0,75}^{1,0} a_{43}K^2(1-x)^{1,30} dx \right] \quad (51)$$

A integração não é complexa para se resolver, ou seja

$$V = \frac{\pi}{4} h K^2 \left[ \frac{1}{b} \cdot 1,32(1+bx)^{0,78} \Big|_0^{0,25} + \left. - \frac{a^2}{23} \frac{1}{1,6} (1-x)^{1,6} \right|_{0,25}^{0,65} + \left. \frac{a^2}{33} \frac{1}{1,7} (1-x)^{1,7} \right|_{0,60}^{0,75} + \left. \frac{a^2}{43} \frac{1}{2,30} (1-x)^{2,30} \right|_{0,75}^{1,00} \right]$$

Usando-se os dados da mesma árvore anteriormente mencionada com  $K$  em metros tem-se

$$V = \frac{\pi}{4} (0,32) (0,7194)^2 \left[ \frac{1}{195,5} (1,32)(1+195,5x)^{0,78} \Big|_0^{0,25} + (0,6819)^2 \cdot (0,625)(1-x)^{1,6} \Big|_{0,25}^{0,65} + (0,7186)^2 (0,588) (1-x)^{1,7} \Big|_{0,65}^{0,75} - (1,0892)^2 (0,435) (1-x)^{2,30} \Big|_{0,75}^{1,00} \right]$$

$$V = \frac{\pi}{4} (32) (0,517) [0,1314 + 0,1292 + 0,0222 + 0,0213]$$

$$V = \frac{\pi}{4} (32) (0,517) (0,3041) = 3,951 \text{ m}^3$$

A árvore de araucaria selecionada tem 3,956 m<sup>3</sup> de volume com casca.

Observe que após a integração estar concluída, pode-se efetivar o cálculo do volume total de qualquer árvore pela equação resultante, ou seja

$$V = \frac{\pi}{4} K^2 \cdot h^2 \cdot (0,3041) \quad (52)$$

onde o fator 0,3041 é equivalente ao fator de forma natural de Hohenadl médio tomado na referência d0,5h.

Se volumes parciais forem especificados, o procedimento do cálculo integral será o mesmo que o apresentado anteriormente, apenas que a integração será efetivada no intervalo definido para a variável  $x$  ou  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

Assim,

$$V_{x_1x_2} = \frac{\pi}{4} h \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad (53)$$

Suponha que na mesma árvore anteriormente escolhida se deseja saber o volume da tora entre os diâmetros de base e de topo 44,96 cm  $\geq d_i \geq 37,26$  cm.

Para esses diâmetros procura-se os respectivos valores das alturas  $h_1$  e  $h_2$  no fuste, ou seja

$$K = 71,94 \text{ cm}$$

$$\frac{y_2}{K} = \frac{44,96}{71,94} = 0,625$$

$$\frac{y_1}{K} = \frac{37,26}{71,94} = 0,5180$$

Estes dois valores são exatamente intervalos encontrados na equação (47) e portanto

$$x_1 = 1 - 3,5827(0,518)^{3,33} = 0,60$$

$$x_2 = 1 - 3,5827(0,625)^{3,333} = 0,25$$

ou,  $0,25 \leq x \leq 0,60$  e portanto o resultado desta integração é dado apenas pelo 2º segmento, ou seja, o volume desta tora é obtido como segue

$$V_{x_1x_2} = \frac{\pi}{4} h \int_{0,25}^{0,60} a_{23}^2 k^2 (1-x)^{0,6} dx$$

$$V_{x_1x_2} = 0,785398(32) K^2 \int_{0,25}^{0,60} a_{23}^2 (1-x)^{0,6} dx$$

$$V_{x_1, x_2} = 25,13274 (0,7194)^2 \left[ (0,6819)^2 \frac{1}{1,6} (1-x) 1,6 \right] \begin{matrix} 0,60 \\ 0,25 \end{matrix}$$

$$= 13,0071 (0,1163)$$

$$V_{x_1, x_2} = 1,513 \text{ m}^3$$

Conclusivamente, para uma tora que tem diâmetro na base de 44,96 cm e no topo de 37,26 cm e com um comprimento de

$$l = h (x_2 - x_1) =$$

$$l = 32 (0,60 - 0,25)$$

$$l = 32 (0,35) = 11,2 \text{ m}$$

resultou em um volume com casca de 1,513 m<sup>3</sup>

Observe que se as funções fossem ajustadas também para diâmetros sem casca, então os volumes podem ser igualmente obtidos para madeira limpa. Igualmente uma série de outros quesitos podem ser formulados e respondidos apropriadamente. Cada caso deve ser equacionado utilizando-se as funções ajustadas de forma apropriada.

## CONCLUSÕES

O método de Preußner, pode-se afirmar, é fácil de se trabalhar operativamente, o que o torna grandemente atrativo pelos Engenheiros Florestais, principalmente para aqueles que não dispõem de um computador, para ajustarem funções mais complexas, como o polinômio do 5º grau e as funções Spline. As funções podem ser ajustadas por tentativas sucessivas;

O método é muito preciso e mantém esta precisão de  $\pm 1\%$  ao longo de todo o fuste;

Dado ser possível segmentar o fuste em 4 partes ou mais o método se universaliza para aplicações tanto para coníferas, como para árvores de floresta tropical e, para tanto, basta ajustar a última função até à posição relativa da variável  $x$  equivalente à altura comercial.

Dado a simplicidade operativa das funções matemáticas utilizadas, torna-se simples obter "x" em função de "y" ou  $x = f(y)$ , como  $Y = f(x)$ , fato complicador em outros métodos, como o do polinômio do 5º grau.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHLBERG, J.H. et al. *The theory of splines and their applications*. New York: Academic Press, 1967. 248p.
- ALHERR, E.E. Vereinfachung des Hohendischen Massen-ermilungsverfahrens durch Verwendung des "echten" form quotienten. *Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Aust. Bd. 10*, 1953. 44p.
- HOHENADL, W. *Der Aufbau der Baumschäfte*. Fw. Cbt. 1924.
- HÖJER, A.G. *Growth of Scots pine and Norway spruce*. Stockhoms; Editora, Bilaga till Lovén, F.A., om Vara barrskogar, Stockholm. Swed. 1903.
- LIU, C.J. Log Volume Estimation with Spline Approximation. *Forest Science*, Bethesda, v.26, n.3, p.361-369, 1980.
- MUNRO, D.D. *Methods for describing distribution of sound-wood of mature western hemlock trees*. Columbia. University of British Columbia, 1968. 188p. (Phd Thesis).
- OSUMI, Sh. Studies on the Stem Form of the Forest Trees (1). On the relative Stem Form. *Journal of the Japanese Forestry Society*, Tokyo, n.12, 1959.
- PÉLLICO NETTO, S. *Die Forstinventuren in Brasilien. Neue Entwicklungen und ihr Beitrag für eine geregelt Forstwirtschaft*. Mitteilungen aus dem Arbeitskreis für Forstliche biometrie, 1979. 232p. (Dissertação).
- PETERS, R. *Konstruktion eines Massentafelmodells dargestellt am Beispiel der Baumart Araucaia araucana (Mol.) C. Koch*. Forstwissenschaftlichen Fakultät der Albert Ludwig - Universität zu Freiburg i. Br. 1971. 95p. (dissertation).
- PREUß, K. Eine neue Schaftkurvengleichung un ihre Anwendung. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Universität Dresden*, Dresden, v.23, n.1, p.305-309, 1974.
- PRODAN, M. *Holzmeßlehre*. Sauerlanger's Verlag. Frankfurt am Main, 1965. 644p.
- REINSCH, C.H. Smoothing by Spline Functions. *Numerische Matematik*, Berlin, 10, n.3, p.177-183, 1967.
- SCHÖFER, W. Automatisierung des Massen, Sorten - und Wertberechnung Stehender Waldbestände. *Schriftenreihe Bad. - Wurtl. Forstl. Vers. Bd. 1966*.

