

# Desempenho de modelos de relações hipsométricas: estudo em três tipos de floresta

## Performance of height-diameter relationship models: analysis in three forest types

João Luis Ferreira Batista  
Hilton Thadeu Zarate do Couto  
Marcelo Marquesini

---

**RESUMO:** A presença de observações extremas (“outliers”) num conjunto de dados pode ter uma influência diferenciada no desempenho de diferentes modelos ajustados por regressão linear e não-linear. Este ponto é particularmente crítico no caso de modelos de relação hipsométrica, onde o objetivo central é obter estimativas da altura de árvores individuais. Neste trabalho o desempenho de dezoito modelos de relação hipsométrica é analisado em três situações diferentes. Dentre os modelos estudados, cinco modelos são intrinsecamente não lineares, exigindo regressão não-linear para ajustá-los. As situações de estudo foram: relação altura-diâmetro para árvores de uma floresta plantada de *Eucalyptus grandis*, com idade aproximada de 6 anos; relação altura-diâmetro de árvores de *Tabebuia cassinoides* (caixeta) de 22 caixetais da região da Mata Atlântica no Estado de São Paulo; e relação altura comercial-diâmetro de árvores de várias espécies nativas provenientes de uma floresta tropical equatorial do Estado do Maranhão. Para análise do desempenho dos modelos, utilizou-se uma técnica de reamostragem dos dados originais sendo possível determinar o viés, a precisão e a exatidão de cada modelo nas três situações de estudo. Modelos que envolvem transformação da altura como variável resposta sempre produziram viés, com grande prejuízo no desempenho geral do modelo, indicando que a correção do viés é fundamental para a utilização de tais modelos. Os modelos não-lineares, que possuem melhor fundamentação biológica para sua forma funcional, apresentaram desempenho superior aos modelos lineares e foram menos sensíveis às particularidades da amostra utilizada para o ajuste. A comparação entre os modelos não-lineares revelou que eles possuem comportamento muito semelhante entre si nos três tipos de floresta estudados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Relação diâmetro-altura, Modelo hipsométrico, Estimação da altura, Viés de estimativa

**ABSTRACT:** Outliers in data sets can have variable influence on the performance of different models fitted by linear and non-linear regression. This aspect is particularly important for height-diameter models used to predict the height of individual trees. In this paper, the performance of 18 height-diameter models is analyzed in three forest types. Among the eighteen studied models, five models are non-linear models and were fitted by non-linear regression. The three forest types studied were a six year old planted forest of *Eucalyptus grandis* in São Paulo State, height-diameter of *Tabebuia cassinoides* from 22 swamp forest in the Atlantic Forest

region of São Paulo State, and commercial height-diameter relationship of trees from a tropical forest of State of Maranhão. It was used a resampling technique for estimating the bias, precision and accuracy of the models. Height-diameter models that transform the height for fitting by linear regression showed strong biases, assuring the need of bias correction for height prediction. Non-linear models, that have biologically fundamented form, showed better performance than the linear models and were less affected by outliers. In all forest type studied, non-linear models did not differ much in performance among themselves.

**KEYWORDS:** Height-diameter relationship, Hipsometric models, Height estimation, Estimation bias

## INTRODUÇÃO

A relação hipsométrica é um instrumento essencial na prática tradicional do inventário florestal. Já em 1957, Ker e Smith descreveram uma técnica de mensuração que ainda hoje é a regra na maioria dos inventários em florestas plantadas no Brasil. A técnica consiste em medir o diâmetro de todas as árvores na parcela de inventário, mas selecionar algumas poucas árvores, em geral de 5 a 10, para a mensuração da altura. Utilizando os dados das árvores em que diâmetro e altura foram medidos, constroíse uma curva altura-diâmetro (relação hipsométrica) com a qual se estima as alturas das demais árvores, das quais apenas o diâmetro foi medido. Esta técnica resulta numa sensível redução do custo de inventário, dado o elevado custo relativo da mensuração da altura comparada à do diâmetro.

Como o objetivo da relação hipsométrica é o de obter a altura de árvores individuais, dois aspectos fundamentais devem ser considerados na sua construção. O primeiro é a definição do sistema de amostragem das árvores para medição de altura e do modo de agrupamento destas árvores para o ajuste da curva altura-diâmetro, isto é, como o conjunto de dados de ajuste é montado. Vários trabalhos têm tratado deste aspecto (Ker e Smith, 1957; Arabatzis e Burkhart, 1992; Hökkä, 1997; Fang e Bailey, 1998).

Outro aspecto é qual o melhor modelo a ser utilizado. A comparação do desempenho de diversos modelos é uma praxe na pesquisa e na prática de inventário florestal. Curtis (1967) com-

parou vários modelos de relação hipsométrica e apresentou as características desejáveis destes modelos citando o trabalho de Meyer, realizado em 1936. Ainda hoje, em situações onde técnicas quantitativas estão sendo introduzidas no manejo florestal, o estudo da relação altura-diâmetro continua sendo uma pesquisa importante, como mostra o trabalho de Fang e Bailey (1998).

A razão da atualidade do estudo da relação hipsométrica é o grande número de variáveis que a influenciam, dificultando a construção de modelos genéricos com base em métodos empíricos como a regressão linear e não-linear. Dentre as diversas variáveis que afetam a relação altura-diâmetro destacam-se: sítio (Hökkä, 1997; Fang e Bailey, 1998), idade (Curtis, 1967; Omule e MacDonald, 1991), variação genética (Knowe e Foster, 1998), tratos silviculturais (Zhang et al., 1997) e sistema de amostragem (Arabatzis e Burkhart, 1992).

Um aspecto pouco considerado é como os modelos respondem às particularidades da amostra utilizada no ajuste, isto é, como a amostra de ajuste (árvores com diâmetro e altura medidos) influencia o desempenho dos modelos quando estes estimam a altura das árvores que tiveram apenas o diâmetro medido. Observações extremas ("outliers") podem influenciar mais o desempenho de um modelo do que de outro, dependendo da localização destas observações no plano altura-diâmetro. A proporção das árvores nas diferentes classes de diâmetro na amostra de ajuste também pode influenciar o

ajuste de modo diferenciado entre os modelos. Se uma classe de diâmetro é super-representada, ela condicionará o comportamento do modelo em maior ou menor grau dependendo da estrutura funcional do modelo. Em geral, espera-se que modelos que possuam justificativas biológicas para a sua estrutura funcional sejam menos influenciados por tais particularidades da amostra de ajuste. Tais influências de observações extremas e da composição da amostra sobre o ajuste de modelos são sempre abordadas nos textos tradicionais que tratam de regressão linear, como por exemplo Seber (1977), Draper e Smith (1981) e Neter et al. (1990).

A estabilidade dos modelos de relação hipsométrica é, portanto, crítica para a qualidade das estimativas de altura. O termo "estabilidade" deve ser entendido como a qualidade de um modelo produzir estimativas confiáveis, isto é, sem viés e com variância pequena, ao ser aplicado a um conjunto de dados que não é idêntico ao utilizado para ajustá-lo, mas provém da mesma população. O objetivo deste trabalho foi analisar a estabilidade de 18 modelos de relação hipsométrica quando utilizados em três situações florestais diferentes. Espera-se que os modelos mais estáveis sejam aqueles que possuem justificativas biológicas para a sua forma funcional.

## METODOLOGIA

Para analisar se o comportamento dos modelos é coerente e não apresenta tendências erráticas em função do tipo de dados utilizados, foram analisados dados de diâmetro e altura de árvores em três situações florestais distintas. Inicialmente, os modelos foram ajustados aos dados de cada tipo de floresta e a curva ajustada foi comparada com a tendência observada nos dados. A tendência dos dados foi representada por uma curva ajustada por uma técnica não paramétrica de suavização de gráficos de dispersão chamada LOWESS - "*locally weighted regression scatter-plot smoothing*" (Chambers et al., 1983).

Para analisar a estabilidade dos modelos, utilizaram-se simulações para se gerar ajustes repetidos para cada modelo. Em cada tipo de floresta, os dados originais foram amostrados aleatoriamente para se criar amostras de ajuste e amostras para a predição das alturas, onde os modelos ajustados eram aplicados. O termo predição é utilizado para designar a altura obtida através de um modelo ajustado onde a árvore em questão não participou do seu ajuste. Todos os critérios de estabilidade foram baseados na diferença entre a altura observada e altura predita pelos modelos.

### *Tipos de Florestas*

Os três tipos de floresta estudados foram:  
 ✓ *E. grandis*: Refere-se a dados de 31 parcelas permanentes locadas em seis talhões de floresta plantadas de *Eucalyptus grandis* de primeira rotação com espaçamento de plantio de 2x3 m e com idade aproximada de 6 anos. Os dados são provenientes de uma única propriedade no Município de Anhembi, na região central do Estado de São Paulo, e do mesmo ano de inventário.

✓ Caixetal: São dados de cubagem de árvores de caixeta (*Tabebuia cassinoides*) obtidos em 22 caixetais localizados ao longo do litoral do Estado de São Paulo. Caixetais são comunidades arbóreas com um forte predomínio da caixeta que ocorrem na Região da Mata Atlântica em locais que permanecem alagados a maior parte do ano, sendo considerada uma vegetação pioneira com influência fluvial (Veloso e Góes-Filho, 1982). A caixeta é uma árvore de porte médio que pode atingir até 80 cm de DAP e tem, em geral, copa pequena de forma simpodial, apresentando grande vigor tanto nas brotações de cepa após o corte, quanto nas brotações de raiz.

**Tabela 1.** Resumo dos dados de diâmetro (DAP) e altura para os três tipos de floresta. No caso da floresta nativa, a altura utilizada é a altura comercial. Os dados de *E. grandis* e Floresta Nativa são provenientes de parcelas de inventário, enquanto que os dados de Caixetal foram obtidos na cubagem das árvores.

(Summary statistics for tree diameter (DBH) and height in the forest types. For the tropical natural forest (Floresta Nativa) merchantable height was used. In the tropical natural forest and in *E. grandis* plantations, Forest inventory plot data were used. In swamp forest (Caixetal), it were used data from individual tree cubic volume determination).

Floresta		DAP (cm)	Altura (m)
<i>E. grandis</i> (417 árvores)	Mínimo	4,14	7,00
	1º Quartil	13,69	22,00
	Mediana	17,83	25,00
	Média	17,33	24,55
	3º Quartil	21,65	28,00
	Máximo	33,42	36,00
	Coef. de Variação	29,73	20,18
Caixetal (319 árvores)	Mínimo	4,80	3,50
	1º Quartil	11,10	9,95
	Mediana	17,80	12,00
	Média	19,04	12,03
	3º Quartil	25,00	14,45
	Máximo	57,30	22,00
	Coef. de Variação	49,95	25,88
Floresta Nativa (2029 árvores)	Mínimo	13,37	1,00
	1º Quartil	16,87	5,00
	Mediana	20,69	7,00
	Média	25,57	7,59
	3º Quartil	28,97	9,00
	Máximo	201,20	22,00
	Coef. de Variação	56,03	40,42

✓ Floresta Nativa: Este caso se refere a uma floresta tropical equatorial no Município de Bom Jardim, Estado do Maranhão, onde foram medidos o DAP e a altura comercial das árvores em parcelas temporárias de inventário florestal. O inventário foi realizado com 17 parcelas de áreas de 2500 m<sup>2</sup> (8 parcelas) e de 5000 m<sup>2</sup> (9 parcelas). A altura comercial foi definida como a

altura até a primeira bifurcação do tronco. A formação florestal é do tipo floresta ombrófila densa que ocorre no planalto Setentrional Pará-Maranhão, com predomínio de solos do tipo Latossolo Amarelo com textura argilosa de baixa fertilidade (Batista, 1989).

A Tabela 1 apresenta um resumo dos dados de diâmetro e altura utilizados em cada tipo de floresta. Nota-se que a variabilidade dos dados aumenta no sentido da floresta plantada (*E. grandis*) para o caixetal e para a floresta nativa. O diâmetro se mostrou sempre mais variável que a altura nos três tipos de floresta. Em termos de distribuição, a comparação entre a média e mediana mostra que a altura é relativamente simétrica nos três tipos de floresta, enquanto que a assimetria da distribuição do diâmetro cresce com a sua variabilidade.

### Modelos estudados

A literatura florestal apresenta uma grande quantidade de modelos de relação hipsométrica com as mais variadas formas. Alguns trabalhos procuraram organizar os principais modelos de uma forma mais prática, como por exemplo Curtis (1967), Finger (1992) e Fang e Bailey (1998). Dentre os inúmeros modelos existentes, foram selecionados 18 para análise neste estudo, os quais são apresentados na Tabela 2. Na apresentação dos modelos, utilizou-se a notação sugerida por Vanclay.

Os primeiros três modelos são polinômios do 1º, 2º e 3º grau, respectivamente. Os modelos polinomiais possuem pouco ou nenhum significado biológico quando aplicado a curvas de crescimento, mas são utilizados em função da facilidade do seu ajuste. O modelo linear simples (polinômio do 1º grau) apresenta ajustes razoáveis da curva altura-diâmetro somente em situações muito particulares, enquanto que os polinômios de 2º e 3º graus são mais flexíveis. Entretanto, a representação da curvatura da relação altura-diâmetro nestes modelos é bastan-

te artificial, pois a extrapolação para regiões ligeiramente fora da amplitude da amostra de ajuste pode resultar em grandes erros na estimativa da altura.

Os modelos 4 a 8, embora sejam frequentemente apresentados na literatura como modelos distintos, são na prática variantes de dois modelos hiperbólicos básicos. Se o erro estatístico dos modelos for eliminado e os modelos forem matematicamente manipulados, encontra-se como forma funcional básica destes modelos as seguintes expressões hiperbólicas:

$$y = \frac{x^2}{a + bx^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{x^2}{a + bx + cx^2}$$

Estas duas expressões, por sua vez, são derivadas de um dos mais antigos modelos de crescimento proposto por Hossfeld em 1822 (Prodan, 1968; Zeide, 1993) que tem a forma:

$$y = \frac{x^n}{a + bx^n}$$

Vários dos modelos de crescimento florestais mais acurados são derivados deste modelo (Zeide, 1993), que tem propriedades muito desejáveis para um modelo de crescimento, quais sejam: passa pela origem, tem ponto de inflexão e assíntota.

**Tabela 2.** Forma de ajuste e forma funcional dos modelos de relação hipsométrica estudados. (Fitting and functional form of height-diameter models).

Modelo		Forma de Ajuste	Forma Funcional
<i>Modelos Lineares</i>			
Polinômios	1	$h = b_0 + b_1 d + e$	-
	2	$h = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 + e$	-
	3	$h = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 + b_3 d^3 + e$	-
Hiperbólicos	4	$h = b_0 + b_1 (1/d^2) + e$	$h = [(b_0 d^2 + b_1)/(d^2)]$
	5	$1/\hat{0}h = b_0 + b_1 (1/d^2) + e$	$h = [1/((d^2)/(b_0 d^2 + b_1))]^2$
	6	$1/h = b_0 + b_1 (1/d) + b_2 (1/d^2) + e$	$h = [(d^2)/(b_0 + b_1 d + b_2 d^2)]$
	7	$d^2/h = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 + e$	$h = [(d^2)/(b_0 + b_1 d + b_2 d^2)]$
	8	$d/\hat{0}h = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 + e$	$h = [(d^2)/((b_0 + b_1 d + b_2 d^2)^2)]$
Potência	9	$\ln(h) = b_0 + b_1 \ln(d) + e$	$h = b_0 d^{b_1}$
	10	$\ln(1/h) = b_0 + b_1 \ln(d) + b_2 \ln^2(d) + e$	$h = [1/(b_0 d)] d^{[b_1 + b_2 \ln(d)]}$
	11	$\ln(h) = b_0 + b_1 \ln(d/(1+d)) + e$	$h = b_0 \{[d/(1+d)]\}^{b_1}$
Exponencial	12	$\ln(h) = b_0 + b_1 (1/d) + e$	$h = b_0 \exp(b_1 d^{-1})$
Semilogarítmico	13	$h = b_0 + b_1 \ln(d) + e$	$h = b_0 + b_1 \ln(d)$ $\hat{U} \quad d = \exp([(h - b_0)/(b_1)])$
	Chapman-Richards	14	$h = b_0 [1 - \exp(-b_1 d)]^{b_2} + e$
Weibull	15	$h = b_0 [1 - \exp(-b_1 d^{b_2})] + e$	-
Monomolecular	16	$h = b_0 [1 - b_1 \exp(-b_2 d)] + e$	-
Gompertz	17	$h = b_0 \exp[-b_1 \exp(-b_2 d)] + e$	-
Logístico	18	$h = b_0 / [1 + b_1 \exp(-b_2 d)] + e$	-

*h* - altura total das árvores individuais (metros);

*d* - diâmetro à altura do peito (DAP em centímetros);

*b*<sub>0</sub>, *b*<sub>1</sub>, *b*<sub>2</sub> - parâmetros a serem estimados por quadrados mínimos, *b*'<sub>0</sub> = exp(*b*<sub>0</sub>);

*e* - erro estatístico com distribuição Normal, média zero e variância constante;

*ln* - logaritmo neperiano

Os modelos de potência têm forte apelo biológico. O modelo 9 é a própria expressão alométrica de uso generalizado nas ciências biológicas para modelar a relação entre as dimensões de um mesmo indivíduo. Seu uso como curva altura-diâmetro também se apoia na teoria da similaridade elástica, que expressa o diâmetro mínimo necessário para sustentar uma árvore sem ruptura em função de uma potência da altura (O'Brien et al., 1995). Além do uso como relação hipsométrica, a expressão alométrica também se faz presente em outros modelos florestais como por exemplo a equação volumétrica de Schumacher-Hall (Prodan, 1968).

O modelo 10 é também um modelo de potência que permite interpretação biológica, sendo chamado de fórmula de Backman no estudo de curvas de crescimento (Prodan, 1968). No estudo da relação altura-diâmetro, no entanto, a justificativa do seu uso tem sido a de adicionar a possibilidade de uma relação curvilínea entre altura e diâmetro quanto ambas sofrem a transformação logarítmica (Curtis, 1967). Já o modelo 11 é uma outra variação do modelo de potência que, embora de uso não muito generalizado, foi proposto como modelo adequado para curva altura-diâmetro (Curtis, 1967; Finger, 1992).

O modelo 12 é bastante utilizado na modelagem da altura em função da idade para a construção de curvas de índice de sítio. Tendo sido originalmente proposto por Schumacher em 1939 para modelar o crescimento da altura (Clutter et al., 1983), este modelo é um caso particular do modelo exponencial geral

$$y = ae^{-bx^{-c}}$$

onde o parâmetro  $c = 1$ . Segundo Zeide (1993), este modelo geral foi proposto independentemente por Korf, também em 1939, para modelar o crescimento em altura de árvores na Tchecoslováquia, mas tem-se mostrado muito eficiente para modelar o crescimento em diâme-

tro quando muitas árvores de espécies e locais diferentes são agrupadas e o crescimento médio é modelado em função da idade.

O modelo 13, aqui designado por “semilogarítmico”, não é de uso muito comum nos estudos de relação hipsométrica. Entretanto, ele foi indicado por Curtis (1967) como um modelo a ser estudado, pois é de ajuste fácil e não apresenta estimativas irreais para a altura de grandes árvores, tendo como única desvantagem poder apresentar estimativas negativas para altura de árvores muito pequenas.

Os modelos 14 a 18 são modelos não-lineares e foram ajustados na sua forma funcional por meio de regressão não-linear. O modelo Chapman-Richards (modelo 14) é provavelmente o modelo mais utilizado para modelar o crescimento de árvores e florestas sob o argumento de uma grande flexibilidade para se ajustar a vários conjuntos de dados (Zeide, 1993).

O modelo 15 foi originalmente proposto como função de probabilidade para descrever distribuições estatísticas por Weibull (1951), mas vem sendo utilizado para modelar o crescimento de plantas. Apesar de sua forma parecer bastante semelhante aos demais modelos não-lineares de crescimento, o modo de incorporar os componentes do crescimento vegetal difere dos demais (Zeide, 1993). O modelo monomolecular (modelo 16) é conhecido na agricultura como “lei dos rendimentos decrescentes” e, por não ter inflexão, é bastante limitado para modelar o crescimento vegetal (Zeide, 1993). O modelo Logístico (modelo 18) foi originalmente proposto para modelar o crescimento de populações humanas, mas devido às suas limitações o modelo de Gompertz (modelo 17) foi sugerido como substituto (Kingsland, 1985). Ambos os modelos se tornaram populares no estudo do crescimento de plantas (Zeide, 1993).

A grande maioria dos modelos utilizados para analisar a relação altura-diâmetro em árvores são modelos originalmente propostos para o estudo

do crescimento. Entretanto, biologicamente a altura não é uma função do diâmetro, pois ambos crescem simultaneamente com a idade.

**Estudo da estabilidade dos modelos**

Os modelos 1 a 13 foram ajustados por regressão linear, enquanto os modelos 14 a 18 foram ajustados por mínimos quadrados não-lineares. Nenhuma estatística proveniente do ajuste foi utilizada para comparar os modelos, pois os critérios de estabilidade foram derivados exclusivamente das alturas preditas pelos modelos na escala original, isto é, realizando as devidas transformações quando a variável resposta no modelo ajustado era uma transformação da altura.

Para analisar a estabilidade dos modelos utilizou-se uma técnica de reamostragem que consistiu em subdividir os dados de cada tipo de floresta em dois grupos, simulando uma amostra de ajuste e uma amostra onde os modelos ajustados fossem aplicados. O processo de subdivisão foi repetido várias vezes, conforme a seguinte metodologia para cada um dos modelos nos três tipos de floresta:

1. Os dados foram subdivididos aleatoriamente em dois conjuntos de dados de tamanho aproximadamente igual: conjuntos A e B. O conjunto A sempre teve uma árvore a menos que o conjunto B, pois em todos tipos de floresta o número de árvores foi ímpar.
2. Os modelos foram ajustados a ambos os conjuntos de dados.
3. As árvores do conjunto A tiveram suas alturas preditas utilizando o modelo ajustado no conjunto B, e vice-versa (validação cruzada).
4. Os passos 1 a 3 foram repetidos 500 vezes (500 simulações).
5. O erro na estimativa de cada árvore foi computado em todas (500) simulações:

$$e_{ij} = h_i - \hat{h}_{ij}$$

onde:

$e_{ij}$  é o erro da árvore  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) na simulação  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ );

$h_i$  é altura observada para árvore  $i$ ;

$\hat{h}_{ij}$  é a altura predita para árvore  $i$  na simulação  $j$ .

6. Para cada árvore se obteve:

1. o erro médio:

$$\bar{e}_i = \frac{\sum_{j=1}^m e_{ij}}{m}$$

2. a variância dos erros:

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^m (e_{ij} - \bar{e}_i)^2}{m(m-1)}$$

3. o quadrado médio dos erros:

$$QM_i = \bar{e}_i^2 + v_i$$

7. A partir dos valores por árvore, foram obtidos os valores médios gerais dentre as árvores:

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{e}_i}{n} \quad \bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} \quad \sqrt{QM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n QM_i}{n}}$$

8. Em cada simulação se obteve um coeficiente de determinação generalizado:

$$R_j^{2*} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (h_i - \hat{h}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_{ij}^2}{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}$$

9. A partir dos valores de cada simulação, foi obtido um valor médio geral dentre as simulações:

$$R_g^2 = \frac{\sum_{j=1}^m R_j^{2*}}{m}$$

Assim os critérios de estabilidade dos modelos quanto à predição da altura das árvores são quatro: o erro médio é uma medida de viés, a variância média é uma medida de precisão, a raiz do quadrado médio é uma combinação do erro médio e da variância, sendo uma medida de exatidão. Estes critérios, seguem proposta de

Arabatzis e Burkhart, 1992. O coeficiente de determinação generalizado médio entre as si-

mulações ( $R_g^2$ ) é uma medida da qualidade dos ajustes, isto é, da aderência dos modelos.

## RESULTADOS

### Comportamento dos modelos

As Figuras 1 a 3 apresentam os gráficos com os dados originais, a curva de tendência dos dados, ajustado pelo método LOWESS, e as curvas ajustadas para cada modelo de relação hipsométrica. Os modelos polinomiais mostraram-se inadequados nos três tipos de floresta, confirmando a artificialidade do uso de tais modelos para representar a curva altura-diâmetro. Enquanto o polinômio de 1° é incapaz de captar a curvatura natural da relação altura-diâmetros, os modelos de 2° e 3° representam uma curvatura inexistente. A ineficiência dos polinômios de 2° e 3° se acentua com a heterogeneidade da floresta, produzindo uma curva completamente inapropriada no caso da relação diâmetro-altura comercial na floresta nativa.

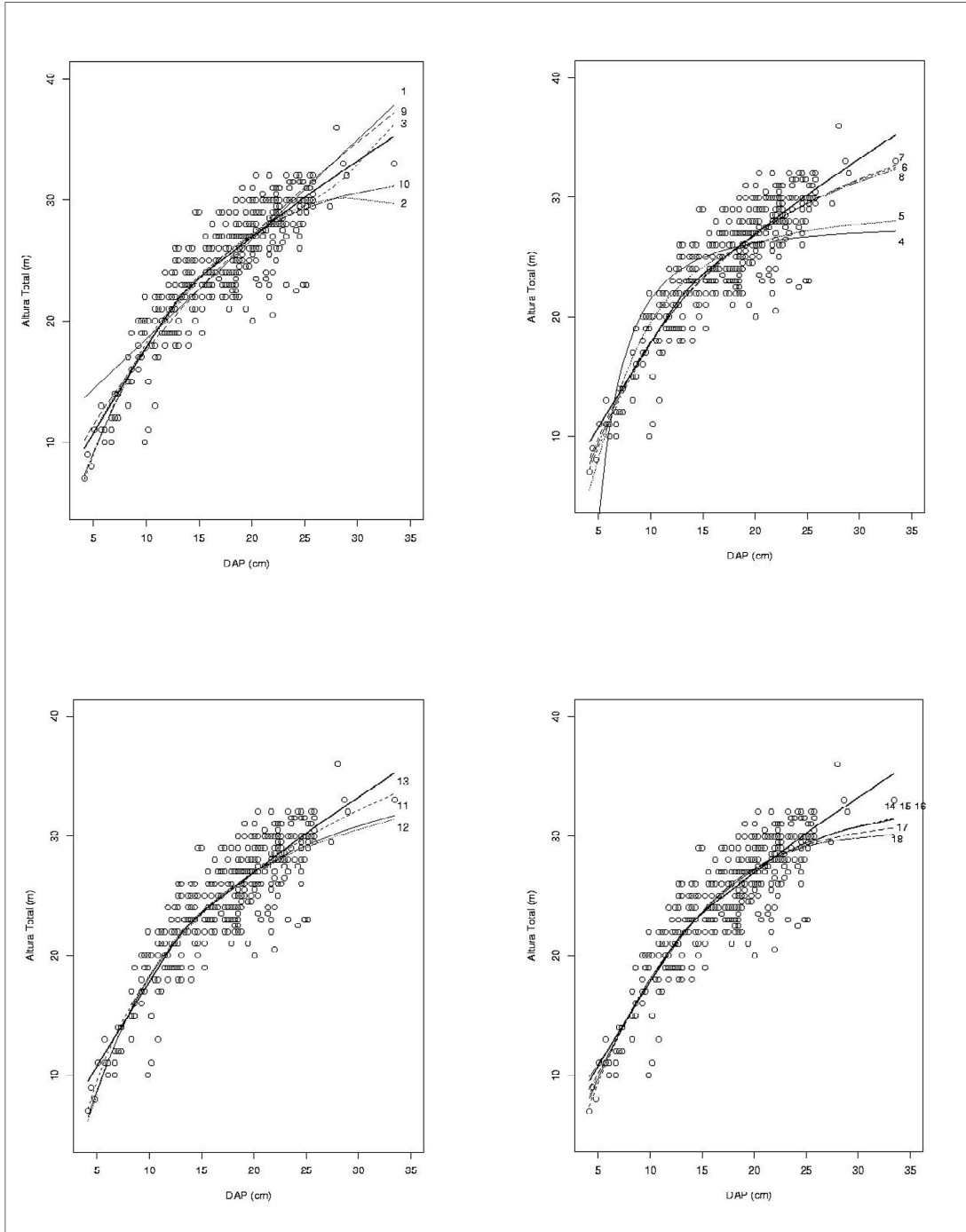
Dentre os modelos hiperbólicos, os modelos 4 e 5 apresentaram-se demasiadamente rígidos na sua curvatura e assíntota, gerando um padrão que difere marcadamente dos dados nos três tipos de floresta estudados. Já os modelos 6, 7 e 8 apresentaram um comportamento mais variável com o tipo de floresta. No caso da floresta plantada de *E. grandis*, estes modelos mostraram-se muito semelhantes entre si e bastante próximos à tendência dos dados. Com os dados de caixeta, houve maior distinção dos modelos entre si e destes com os dados, enquanto o modelo 6 mostrou uma assíntota prematura, os modelos 7 e 8 seguiram de modo semelhante a tendência observada nos dados. A maior distinção entre estes modelos foi observada no caso da floresta nativa. Enquanto os modelos 7 e 8 apresentam claramente uma assíntota o modelo 6 parece não tê-la atingido. O modelo 8 apresenta, neste caso, um padrão inapropriado com um ponto de máximo anterior à assíntota.

Um aspecto que merece ser destacado no ajuste dos modelos hiperbólicos é que embora os modelos 6 e 7 sejam idênticos em sua forma funcional, na prática o modelo 7 tem comportamento mais próximo ao modelo 8. A forma de ajuste do modelo, portanto, tem forte influência na estimativa dos parâmetros, sendo guiada pela forma da variável resposta no modelo que efetivamente é utilizado na regressão linear.

Entre os modelos de potência, os modelos 9 e 10 mostraram-se bastante distintos entre si. A forma funcional do modelo 9 o impede de gerar uma assíntota tão clara como no modelo 10, o que foi fundamental para o melhor ajuste deste no caso da floresta nativa. O modelo 11 mostrou-se praticamente idêntico ao modelo exponencial testado (modelo 12) nos três tipos de floresta, sendo ambos bastante semelhantes aos modelos não-lineares, embora apresentem uma curvatura menos acentuada que estes. Dentre todos os modelos ajustados por regressão linear, o modelo 13 foi o que se apresentou mais próximo à tendência observada nos dados da floresta de *E. grandis* e de caixeta. No caso da floresta nativa, no entanto, seu padrão se diferenciou bastante do observado.

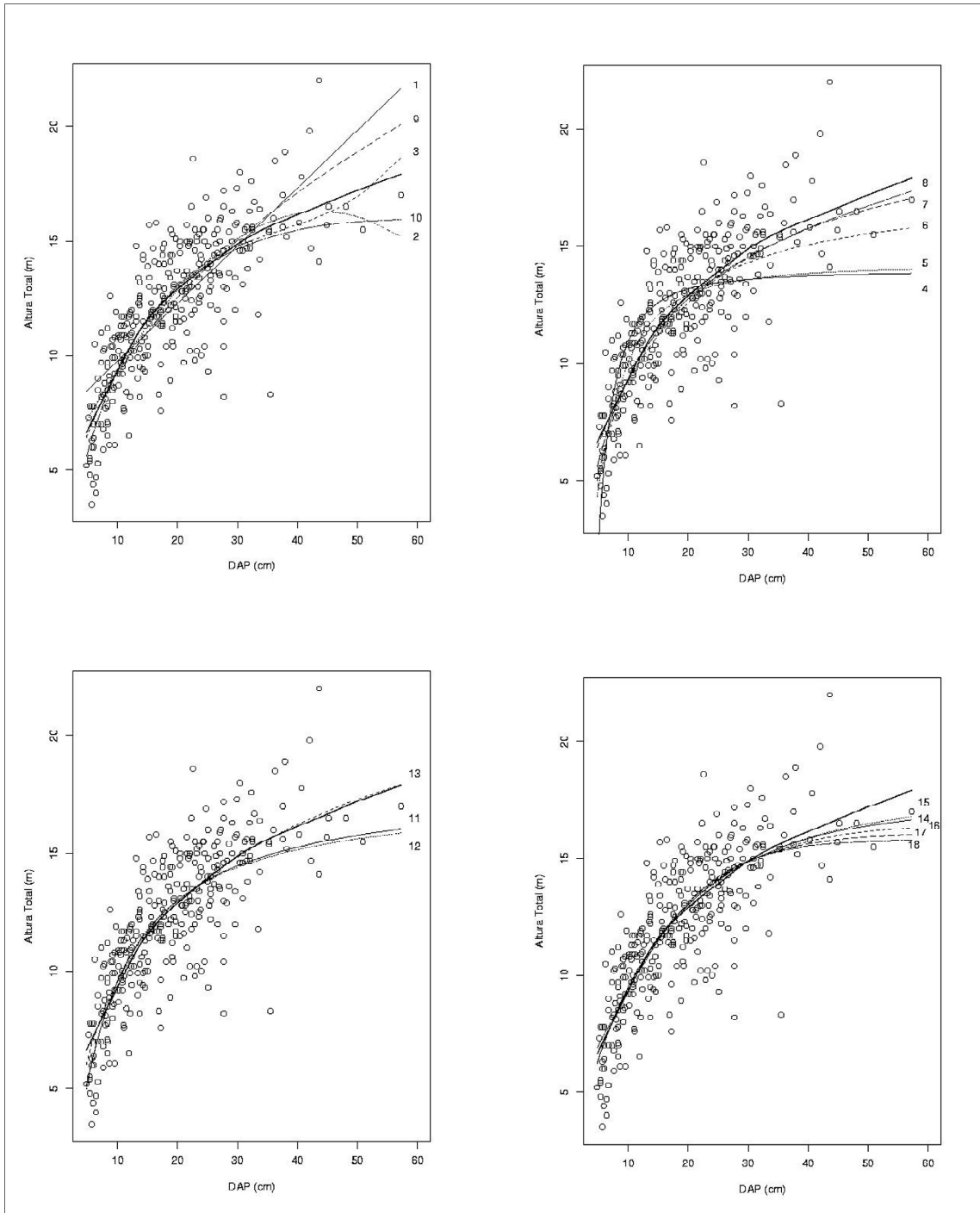
Os cinco modelos não-lineares estudados tiveram comportamento muito semelhantes entre si em todas florestas estudadas, diferindo apenas em termo do valor assintótico que procuraram alcançar, mas com curvaturas muito próximas. Os modelos 14, 15 e 16 foram praticamente idênticos na floresta de *E. grandis*. Este comportamento dos modelos não lineares indica que, apesar das diferenças em suas formas funcionais, o padrão da curva altura-diâmetro gerado é mais constante e independente das particularidades dos dados utilizados no ajuste.





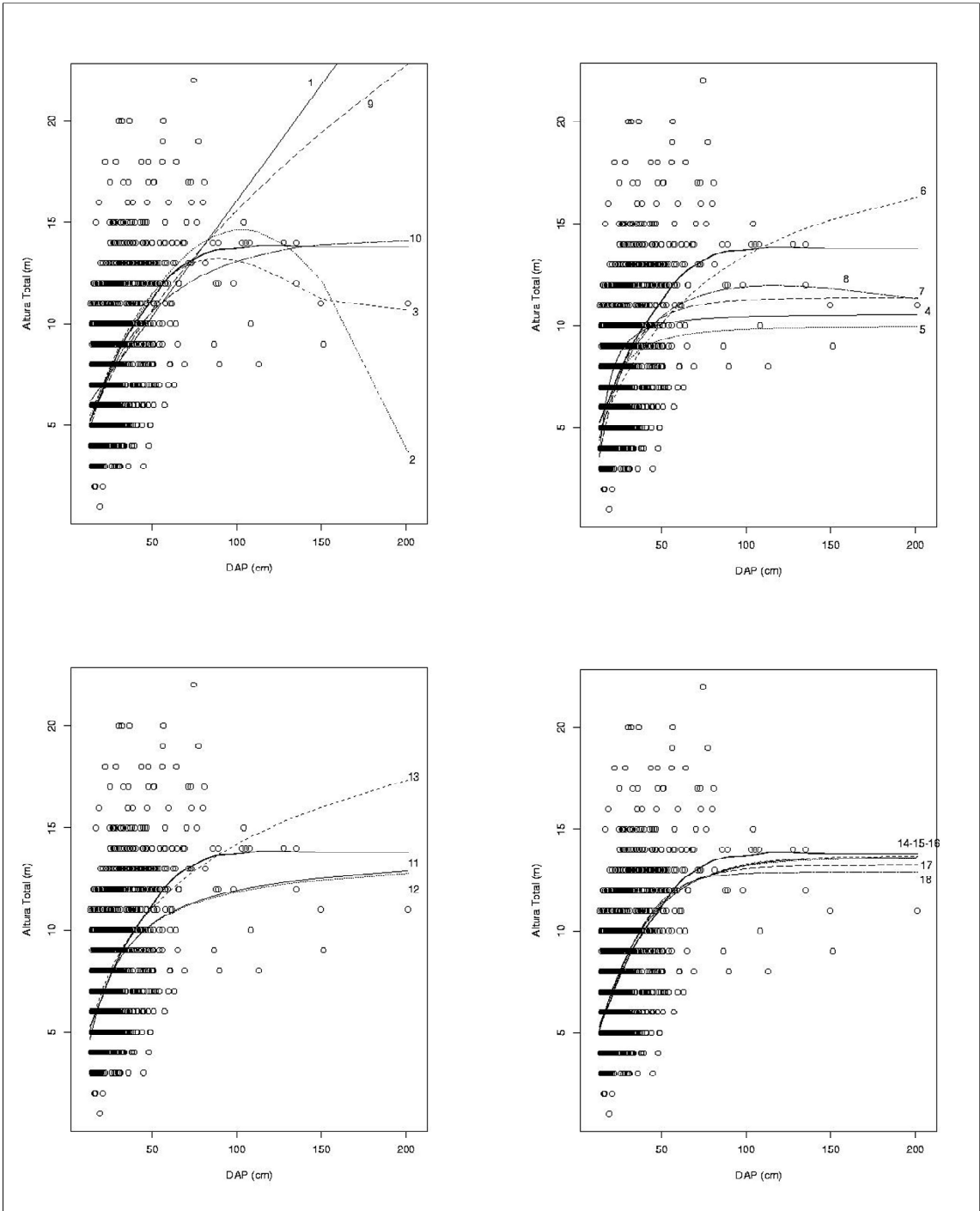
**Figura 1.** Ajuste dos modelos de relação hipsométrica para floresta plantada de *E. grandis*. Os números nos gráficos referem-se aos modelos e a linha mais cheia descreve a tendência dos dados segundo o método LOWESS.

(Height-diameter models fitting in *E. grandis* plantations. Numbers indicate the model as in table 2, solid line indicate data trend according to LOWESS smoothing method)



**Figura 2.** Ajuste dos modelos de relação hipsométrica para floresta de caxeta (caxetal). Os números nos gráficos referem-se aos modelos e a linha mais cheia descreve a tendência dos dados segundo o método LOWESS.

(Height-diameter models fitting in the swamp forest (Caxetal). Numbers indicate the model as in table 2, solid line indicate data trend according to LOWESS smoothing method)



**Figura 3.** Ajuste dos modelos de relação hipsométrica para floresta nativa. Os números nos gráficos referem-se aos modelos e a linha mais cheia descreve a tendência dos dados segundo o método LOWESS.

(Height-diameter models fitting in tropical natural forest (Floresta Nativa). Numbers indicate the model as in table 2, solid line indicate data trend according to LOWESS smoothing method)

Provavelmente, a fundamentação biológica para a forma funcional destes modelos é a chave para a constância no padrão de curva observado. Embora esta constância possa ser interpretada como falta de flexibilidade, ela é na verdade um aspecto vantajoso pois dentre os modelos estudados, os modelos não lineares foram os únicos que apresentaram bom ajuste nos três tipos de floresta, embora eles não tenham apresentado o melhor ajuste em cada tipo. A constância no padrão da curva altura-diâmetro destes modelos possibilita a generalização destes modelos para as mais variadas situações, além de maior segurança na sua extrapolação, pois o seu comportamento é bem estabelecido, biologicamente fundamentado e possui grande independência das particularidades dos dados utilizados no ajuste.

### **Estabilidade dos modelos**

A Tabela 3 apresenta os índices de desempenho dos modelos estudados. Em termos do coeficiente de determinação generalizado ( $R_g^2$ ), nota-se que o ajuste é melhor na floresta plantada de *E. grandis* e pior na floresta nativa, como esperado. O  $R_g^2$  entretanto, mostra-se enganoso no caso dos polinômios pois estes apresentam valores altos mas apresentaram ajuste inapropriado em todos os tipos de floresta.

Todos modelos que implicam na transformação da variável altura, para obtenção de uma forma que possa ser ajustada por regressão linear, apresentaram viés elevado, chegando a valores próximos de 1 m em alguns modelos na floresta nativa. Tais modelos necessitam que alguma forma de correção seja aplicada às estimativas de altura, para que a sua performance seja com-

parada aos demais modelos. A correção do viés deveria ser prática corrente em biometria florestal no caso dos modelos de transformação logarítmica, mas não tem sido discutida para outros modelos.

Os valores de viés foram relativamente baixos nas florestas de *E. grandis* e nos caixetais, mas atingiram valores muito elevados na floresta nativa, principalmente considerando que altura neste caso é a altura comercial e tem magnitude menor do que nos demais tipos de floresta estudados. A precisão (variância) dos modelos se mostrou relativamente independente do tipo de floresta e variou pouco entre os modelos em cada floresta.

A constância da qualidade do ajuste dos modelos não-lineares nos três tipos de floresta e a grande semelhança entre eles é enfatizada pela exatidão (quadrado médio dos erros) destes modelos. Apenas o modelo linear 13 se mostra capaz de competir com os modelos não-lineares em termos de qualidade de ajuste, tendo se mostrado superior a estes no caso da floresta nativa. Em todas as florestas, os modelos não-lineares se mostraram superiores aos modelos lineares (exceto o modelo 13), sendo que a superioridade é sutil na floresta de *E. grandis* e mais clara na floresta nativa. Por se tratar de floresta nativa e de altura comercial, os dados de floresta nativa representam a situação mais complexa para o ajuste de relação hipsométrica. A clara superioridade dos modelos não-lineares mostra que a fundamentação biológica da forma funcional dos modelos de relação hipsométrica é essencial para que os modelos possam apresentar estimativas adequadas de altura em situação complexa.

## **CONCLUSÕES**

A análise do desempenho dos modelos de relação hipsométrica nos três tipos de floresta indicam os seguintes pontos a serem considerados na construção de modelos para relação altura-diâmetro:

✓ A fundamentação biológica na forma funcional dos modelos não-lineares parecem justificar a superioridade destes modelos, em termos de estabilidade, contra os modelos lineares, no ajuste de diferentes dados de altura-diâmetro. Os

modelos não-lineares se mostram menos sensíveis às particularidades da amostra utilizada para o ajuste pois o padrão da curva altura-diâmetro é fortemente ditado pelas propriedades biológicas do modelo;

✓ A correção do viés é necessária não só nos modelos de transformação logarítmica, mas em qualquer modelo que envolve a transformação da variável altura. A presença de viés é forte diferencial do desempenho dos vários modelos lineares e, provavelmente, a correção deste tornaria mais semelhante o desempenho destes modelos;

✓ Diferentes fundamentações biológicas representadas pelos diferentes modelos não-lineares

podem produzir resultados praticamente idênticos em termos da relação altura-diâmetro;

✓ Atualmente, a existência de microcomputadores com grande capacidade de processamento de dados e disponibilidade de softwares estatísticos apropriados eliminam a necessidade de transformação de modelos para facilitar o seu ajuste. Modelos de fácil ajuste mas sem fundamentação biológica, como os polinômios, ou modelos cuja a forma funcional é transformada para permitir o ajuste por regressão linear podem apresentar ajuste totalmente inadequado para representar a curva altura-diâmetro, sendo muito susceptíveis às particularidades dos dados utilizados para o ajuste.

**Tabela 3.** Valores dos critérios de desempenho dos modelos estudados nos três tipos de floresta:  $\bar{e}$  - erro médio,  $\bar{v}$  - variância dos erros,  $\sqrt{QM}$  - raiz quadrada do quadrado médio,  $R_g^2$  - coeficiente de determinação generalizado.

(Performance criteria for fitted models in the three forest types:  $\bar{e}$  - mean error,  $\bar{v}$  - error variance,  $\sqrt{QM}$  - square root of mean square error,  $R_g^2$  - generalized determination coefficient)

Modelo	Floresta Nativa				Caixetal				Floresta de <i>E. grandis</i>			
	$\bar{e}$	$\bar{v}$	$\sqrt{QM}$	$R_g^2$	$\bar{e}$	$\bar{v}$	$\sqrt{QM}$	$R_g^2$	$\bar{e}$	$\bar{v}$	$\sqrt{QM}$	$R_g^2$
<i>Modelos Lineares</i>												
1	0,0000	0,0110	0,1049	0,2854	0,0000	0,0187	0,4741	0,5947	0,0000	0,0163	1,0129	0,7344
2	0,0000	0,0098	0,0990	0,3609	0,0000	0,0158	0,4742	0,6555	0,0000	0,0133	0,9743	0,7800
3	0,0000	0,0097	0,0987	0,3658	0,0000	0,0151	0,4701	0,6688	0,0000	0,0125	0,9676	0,7920
4	0,0000	0,0105	0,1026	0,3092	0,0000	0,0204	0,5467	0,5530	0,0000	0,0241	1,2865	0,6033
5	0,6302	0,0102	0,6383	0,2816	0,2822	0,0175	0,5966	0,6097	0,3387	0,0158	1,1485	0,7315
6	0,7843	0,0100	0,7907	0,2841	0,2960	0,0153	0,5659	0,6582	0,2211	0,0129	0,9913	0,7847
7	0,8031	0,0100	0,8094	0,2796	0,2692	0,0156	0,5423	0,6533	0,2369	0,0128	0,9954	0,7848
8	0,5752	0,0098	0,5836	0,3260	0,2199	0,0150	0,5187	0,6692	0,1797	0,0127	0,9839	0,7871
9	0,3810	0,0103	0,3943	0,3154	0,1377	0,0164	0,4878	0,6416	0,1017	0,0150	0,9995	0,7535
10	0,3853	0,0108	0,8823	0,3441	0,1400	0,0151	0,4891	0,6674	0,1127	0,0134	0,8301	0,7867
11	0,3924	0,0098	0,4048	0,3389	0,1443	0,0151	0,5030	0,6665	0,1201	0,0127	0,9834	0,7881
12	0,3931	0,0098	0,4054	0,3381	0,1463	0,0152	0,5061	0,6646	0,1260	0,0127	0,9904	0,7868
13	0,0000	0,0099	0,0995	0,3563	0,0000	0,0150	0,4675	0,6712	0,0000	0,0128	0,9681	0,7876
<i>Modelos Não Lineares</i>												
14	0,0011	0,0098	0,0989	0,3633	-0,0026	0,0151	0,4727	0,6704	-0,0030	0,0128	0,9724	0,7872
15	0,0018	0,0098	0,0989	0,3633	-0,0033	0,0150	0,4723	0,6710	-0,0052	0,0128	0,9721	0,7867
16	0,0000	0,0098	0,0989	0,3633	0,0000	0,0151	0,4747	0,6687	0,0000	0,0127	0,9727	0,7878
17	0,0000	0,0098	0,0989	0,3639	-0,0028	0,0154	0,4769	0,6638	-0,0036	0,0130	0,9762	0,7841
18	-0,0010	0,0098	0,0989	0,3636	-0,0055	0,0156	0,4787	0,6588	-0,0083	0,0133	0,9806	0,7791

## AUTORES

JOÃO LUIS FERREIRA BATISTA é Professor Doutor do Departamento de Ciências Florestais da ESALQ/USP. Caixa Postal 9 – 13400-970 – Piracicaba, SP – E-mail: parsival@esalq.usp.br

HILTON THADEU ZARATE DO COUTO é Professor Titular do Departamento de Ciências

Florestais da ESALQ/USP. Caixa Postal 9 – 13400-970 – Piracicaba, SP – E-mail: htzcouto@esalq.usp.br

MARCELO MARQUESINI é Mestre em Ciências Florestais pela ESALQ/USP e trabalha atualmente no Greenpeace.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARABATZIS, A.; BURKHART, H. An evaluation of sampling methods and model form for estimating height-diameter relationships in Loblolly pine plantations. **Forest science**, v.38, n.1, p.192-198, 1992.
- BATISTA, J. **A função Weibull como modelo para a distribuição de diâmetros de espécies arbóreas tropicais**. Piracicaba, 1989. 116p. Tese (Mestrado) - Escola superior de Agricultura Luiz de Queiroz. Universidade de São Paulo
- CHAMBERS, J.; CLEVELAND, W.; KLEINER, B.; TUKEY, P. **Graphical methods for data analysis**. Pacific Grove: Wadsworth / Cole, 1983.
- CLUTTER, J.; FORTSON, J.; PIENAAR, L.; BRISTER, G.; BAILEY, R. **Timber management: a quantitative approach**. New York: John Wiley, 1983.
- CURTIS, R. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir. **Forest science**, v.13, n.4, p.365-375, 1967.
- DRAPER, N.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. New York: John Wiley, 1981.
- FANG, Z.; BAILEY, R. Height-diameter models for tropical forests on Hainan Island in southern China. **Forest ecology and management**, v.110, p.315-327, 1998.
- FINGER, C. **Fundamentos de biometria florestal**. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria / CEPEF/FATEC, 1992. 269p.
- HÖKKÄ, H. Height-diameter curves with random intercepts and slopes for trees growing on drained peatlands. **Forest ecology and management**, v.97, p.63-72, 1997.
- KER, J.; SMITH, J. Sampling for height-diameter relationships. **Journal of forestry**, v.55, n.3, p.205-207, 1957.
- KINGSLAND, S. **Modeling nature**. Chicago: University of Chicago Press, 1985. 267p.
- KNOWE, S.; FOSTER, G. Height-age and height-diameter relationships for monocultures and mixtures of eastern cottonwood clones. **Forest ecology and management**, v.106, p.115-123, 1998.
- NETER, J.; WASSERMAN, W.; KUTNER, M. **Applied linear statistical models**. Homewood: Richard D.Irwin, 1990. 1181p.
- O'BRIEN, S.; HUBBELL, S.; SPIRO, P.; CONDIT, R.; FOSTER, R. Diameter, height, crown, and age relationships in eight neotropical tree species. **Ecology**, v.76, n.6, p.1926-1939, 1995.
- OMULE, S.; MACDONALD, R. Simultaneous curve fitting for repeated height-diameter measurements. **Canadian journal of forest research**, v.21, p.1418-1422, 1991.
- PRODAN, M. **Forest biometrics**. Oxford: Pergamon Press, 1968. 447p.
- SEBER, G. **Linear regression analysis**. New York: John Wiley, 1977.
- VANCLAY, J. **Modelling forest growth and yield: application to mixed tropical forests**. Wallingford: CAB International, 1994. 312p.
- VELOSO, H.; GÓES-FILHO, L. Fitogeografia brasileira: classificação, fisionômica-ecológica da vegetação neotropical. **Boletim técnico. Radam Brasil. Série Vegetação**, n.1, p.1-80, 1982.
- WEIBULL, W. A statistical distribution function of wide applicability. **Journal of applied mechanics**, n.18, p.293-297, 1951.
- ZEIDE, B. Analysis of growth equations. **Forest science**, v.30, n.3, p.594-616, 1993.
- ZHANG, S.; BURKHART, H.; AMATEIS, R. The influence of thinning on tree height and diameter relationships in Loblolly pine plantations. **Southern journal of applied forestry**, v.21, n.4, p.199-205, 1997.