

Flavio Felipe Kirchner¹
Afonso Figueiredo Filho²
José Roberto Soares Scolloro³
Sebastião do Amaral Machado⁴
Edson Aparecido Mitishita⁵

SUMMARY

This paper presents a methodology to obtain cubic spline functions as a way of representing stem profiles of individual trees.

The volumes of 12 trees were obtained by the integration of the spline functions and compared with the volumes calculated by the Smalian formula. The average differences were always below 0,3%, compared to the total volumes, so as to the commercial ones, for veneer, sawtimber and for pulp.

1. INTRODUÇÃO

Freqüentemente em Inventários Florestais utilizam-se equações volumétricas como forma de reportar o volume inteiro de árvores.

Recentemente no Brasil, o emprego de funções de forma tem aumentado em decorrência da necessidade de melhor qualificar a produção volumétrica oriunda, principalmente, das florestas implantadas.

Essas funções apresentam muitas vantagens em relação às equações de volume tradicionais, mais especificamente no que se refere aos volumes parciais, nas estimativas de diâmetro do topo de toras, ou ainda para estimar o comprimento de toras até um diâmetro mínimo para um determinado uso comercial.

No entanto, quando aplicadas para estimativas por unidade de área, alguns erros podem estar inseridos, uma vez que essas funções são ajustadas para um número pequeno de árvores em relação ao total envolvido em um Inventário Florestal.

Estes erros podem ser causados por inúmeros fatores que podem influenciar na forma das árvores como: copa, idade, localização da árvore na floresta, densidade, sítio, etc.

A influência de tais fatores tem tornado difícil encontrar-se uma função matemática capaz de descrever o perfil inteiro do tronco de árvores. Por conseguinte, pesquisadores americanos e principalmente alemães, têm enviado esforços no sentido de solucionar o problema, chegando a funções matemáticas que possam melhor representar a forma, gerando estimativas precisas de diâmetros a diferentes

alturas e volumes parciais ao longo do tronco.

Neste aspecto, esses pesquisadores têm buscado expressar o perfil do tronco, não com uma única função matemática, mas com equações que representem pedaços do tronco e que ligadas umas às outras, possam reportar todo o perfil do tronco.

MAX e BURKHART¹¹ foram os primeiros a adotar tal procedimento. Eles utilizaram a técnica de regressão segmentada, ou seja, cada parte do tronco foi representada por uma função polinomial. Nessa técnica, a curva de cada segmento é gerada pelo método dos mínimos quadrados e os pontos de ligação entre cada segmento são necessariamente sem ruptura ou harmonizados.

LIU¹⁰ utilizou funções spline cúbicas para representar o perfil do tronco. As curvas neste caso são geradas por aproximação numérica que garante a passagem da curva por todos os pontos utilizados.

Acrescenta esse autor que dependendo da amplitude dos dados, cada segmento pode ser representado por uma função linear quadrática ou cúbica e o referido método assegura a harmonização (smoothing) dos pontos de junção.

A diferença entre a regressão segmentada de MAX e BURKHART¹¹ e a spline cúbica de LIU¹⁰, é que a primeira é estimada por procedimento estatístico, enquanto que a segunda é uma interpolação numérica e extrapolação.

EUBANK⁶ afirma que splines tem sido utilizadas para representar curvas em diferentes áreas de conhecimentos, tais como: agricultura, geodésia, economia, meteorologia, geofísica, astrofísica, entre outras.

Esse uso diversificado de splines, deve-se em

1 Eng^o Florestal, Ph.D., Professor Adjunto do Curso de Engenharia Florestal da UFPR.

2 Eng^o Florestal, M.Sc., Professor Adjunto do Curso de Engenharia Florestal da UFPR.

3 Eng^o Florestal, M.Sc., Estudante de Doutorado da UFPR, Professor Adjunto do Departamento de Ciências Florestal da ESAL.

4 Eng^o Florestal, M.Sc., Ph.D., Professor Titular do Curso de Engenharia Florestal da UFPR. Pesquisador do CNPq.

5 Eng^o Cartógrafo, M.Sc., da AERODATA S.A. Engenharia de Aerolevantamentos e Professor Assistente do Curso de Engenharia Cartográfica da UFPR.

parte, à sua flexibilidade em expressar curvas que caracterizam a ocorrência de fenômenos complexos.

Na área de mensuração florestal, splines tem sido usadas com maior frequência na modelagem da forma das árvores. Entretanto, DEVAN e BURKHART⁵ em 1982 empregaram-nas para obter curvas de sítio assim como BORDERS, BAILEY e WARE² em 1984.

Estes últimos, procurando estabelecer curvas de índice de sítio para *Pinus taeda*, verificaram que o padrão de desenvolvimento da altura dominante média até 15 anos de idade era anamórfico. A partir desta idade, apresentava tendência ao poliformismo. Em decorrência, selecionaram equações adequadas para representar essas duas tendências das curvas, procedendo a junção (smoothing) entre duas equações através do uso da função spline.

LIU⁸ enfatiza que os procedimentos numéricos tradicionais na análise de tronco, com frequência falham na estimativa do comportamento do crescimento em altura. Por isso, ele utilizou spline cúbica natural para estudar o incremento em altura.

Posteriormente em 1979, LIU⁹, utilizou essa mesma técnica para traçar perfis nas várias idades, em dados de análise de tronco completa.

Com a finalidade de representar a forma de troncos de árvores, uma série de trabalhos empregando funções splines tem sido desenvolvidos.

LIU¹⁰ utilizou 26 árvores de *Liriodendron tulipifera* L. e para cada árvore foram medidos os raios em 14 posições ao longo do tronco. Utilizou a spline cúbica natural para retratar os perfis dos troncos obtendo estimativas acuradas, tanto para o volume total como para volumes parciais, com erros médios em torno de 1,5%.

HRADETZKY⁷ discutiu diferentes maneiras de ajustes de funções spline como forma de representar a forma dos troncos. Enfatizou esse autor, as possibilidades de ajustes dessas funções por interpolação ou por regressão através do uso dos mínimos quadrados.

SABOROWSKI et al¹² utilizaram spline cúbica para expressar o perfil de árvores e tentaram a redução do número de pontos a serem medidos ao longo do tronco como forma de obter um número mínimo de medições que torne viável a aplicação dessa técnica em árvores em pé.

SMALTSCIHNSKI¹³ também utilizou a interpolação spline cúbica para expressar a forma do tronco de árvores. Ele estabeleceu que para ter-se uma boa representatividade de todo o perfil, seriam necessárias medições em 6 pontos ao longo do tronco. Escolheu o DAP, o $d_{0,1h}$ e a altura total como pontos básicos e procedeu testes a fim de identificar as demais posições realizando várias combinações. A melhor delas foi aquela em que usou as medições a

0,2h; 0,5h e 0,74h, com erros inferiores a 1,5% no volume e 3% na estimativa dos diâmetros.

Em decorrência da importância desta técnica, este trabalho tem como objetivo apresentar metodologia de ajuste de uma função de interpolação spline como forma de expressar o perfil do tronco e sua eficiência na estimativa de volumes de árvores.

2. TEORIA DE FUNÇÕES SPLINE CÚBICAS

A definição de dicionário para spline é: "uma tira flexível para desenhar curvas".

Em projetos de engenharia, construtores de navios e muitos outros geralmente usam splines, uma régua elástica que pode ser dobrada, sendo que passa por um dado conjunto de pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, m$, muito semelhante a uma curva francesa, e que traça uma curva suavizada entre os pontos especificados.

Matematicamente, splines são definidas como sendo polinômios segmentados de grau "n" cujos valores da função e suas primeiras "n-1" derivadas contínuas passam nos pontos onde se juntam. As abscissas destes pontos de junção são chamadas de "nós" e estes polinômios segmentados são escolhidos para minimizar a curvatura quadrática média mínima.

A aproximação por spline é uma interpolação através de uma classe de funções de coordenadas, as quais podem ser descritas como um conjunto de polinômios cúbicos segmentados com junções suavizadas (FIGURA 1).

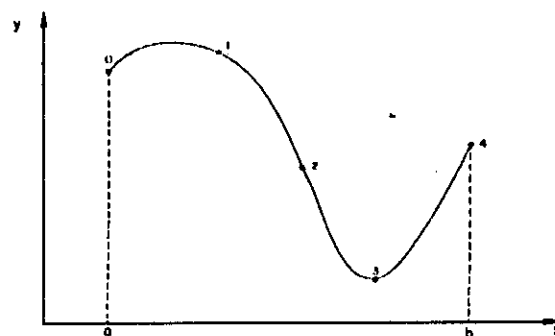


FIGURA 1: Exemplo de splines cúbicas

Em vez de aproximar uma dada função $f(x)$ sobre um intervalo (a, b) por um único polinômio, é possível dividir (a, b) em "n" sub-intervalos (a, x_1) , (x_1, x_2) , ..., (x_{n-1}, b) e aproximar $f(x)$ por um polinômio diferente em cada sub-intervalo (LIU¹⁰).

Fazendo $y = f(x)$ ser a equação para a curva a qual é definida pela spline e sob certas hipóteses (de

acordo com a teoria da elasticidade), $f(x)$ pode ser aproximadamente descrita como sendo a obtenção de diferentes polinômios de terceiro grau (polinômios cúbicos) de tal maneira que $f(x)$ e suas duas primeiras derivadas são contínuas em qualquer ponto. A terceira derivada, contudo, pode conter descontinuidades nos pontos x_i . Essa função é chamada de função spline cúbica e os pontos x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$ são chamados de nós (DAHLQUIST e BJÖRCK⁴).

O conceito de função spline pode ser generalizada da seguinte maneira:

- fazendo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ser a subdivisão do intervalo (a, b) .

A função spline de grau "n" com nós nos pontos x_i , $i = 0, 1, \dots, m$ é uma função S com as seguintes propriedades:

a) em cada sub-intervalo (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, m-1$, $S(x)$ é um polinômio de grau "n".

b) $S(x)$ e suas primeiras $(n-1)$ derivadas são contínuas em (a, b) .

Supondo que se deseja interpolar $(m + 1)$ pontos (nós) n_0, \dots, n_m para tal curva ($n_i = (x_i, y_i)$). Cada um dos "m" segmentos y_0, \dots, y_{m-1} é um polinômio cúbico determinado por quatro parâmetros. Portanto, tem-se $4m$ parâmetros a serem determinados na função polinomial cúbica:

$$y_i = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Em cada um dos $(m - 1)$ nós interiores n_1, \dots, n_{m-1} (onde dois segmentos se encontram), tem-se quatro condições (BARTELS et al¹):

$$y_{i-1}(1) = y_i, y'_{i-1}(1) = y'_i(0)$$

$$y_{i-1}(0) = y_i, y''_{i-1}(1) = y''_i(0)$$

Além disto, exige-se também que:

$$y_0(0) = y_0$$

$$y_{m-1}(1) = y_m$$

resultando um total de $4m-2$ condições de onde determinar-se-á os $4m$ parâmetros. Contudo, é necessário mais duas condições para dar solução única para a função spline.

Isto pode ser escolhido de várias maneiras e uma delas é simplesmente exigir que as segundas derivadas nos pontos extremos sejam iguais a zero. Com isto, tem-se uma linha reta fora do intervalo e estas condições auxiliares produzem a

SPLINE CÚBICA NATURAL.

2.1. DESENVOLVIMENTO DA TEORIA

Tomando o que foi anteriormente exposto, em termos práticos a FIGURA 2 ilustra a situação a ser descrita, contendo três segmentos (m) definidos por $(m + 1)$ pontos com dois nós interiores (1 e 2).

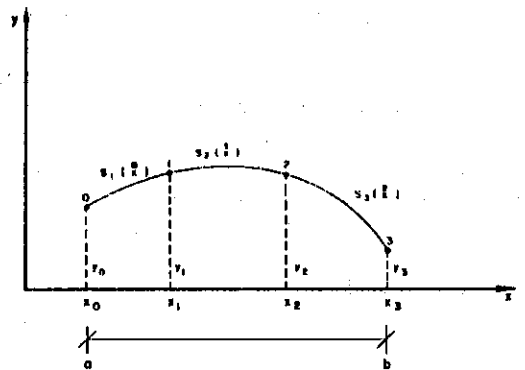


FIGURA 2: Exemplo de aplicação prática de função spline cúbica natural

Utilizando-se a fórmula $4m - 2$, tem-se: $4m - 2 = 4(3) - 2 = 10$ equações, mais duas definidas pelas derivadas segunda nos pontos extremos, o que totaliza 12 equações a 12 incógnitas.

Assim os passos a serem seguidos são:

Primeiro Passo: construir os polinômios cúbicos para cada um dos pontos, dentro de cada segmento (m).

$$S_1 \quad a_{01} + a_{11}x_0 + a_{21}x_0^2 + a_{31}x_0^3 - y_0 = 0 \text{ (eq. 1) ponto } 0 \text{ (} x_0, x_1)$$

$$a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{31}x_1^3 - y_1 = 0 \text{ (eq. 2) ponto } 1$$

$$S_2 \quad a_{02} + a_{12}x_1 + a_{22}x_1^2 + a_{32}x_1^3 - y_1 = 0 \text{ (eq. 3) ponto } 1 \text{ (} x_1, x_2)$$

$$a_{02} + a_{12}x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{32}x_2^3 - y_2 = 0 \text{ (eq. 4) ponto } 2$$

$$S_3 \quad a_{03} + a_{13}x_2 + a_{23}x_2^2 + a_{33}x_2^3 - y_2 = 0 \text{ (eq. 5) ponto } 2 \text{ (} x_2, x_3)$$

$$a_{03} + a_{13}x_3 + a_{23}x_3^2 + a_{33}x_3^3 - y_3 = 0 \text{ (eq. 6) ponto } 3$$

Assim, tem-se doze parâmetros a serem determinados e somente seis equações.

Segundo Passo: impor a condição que as derivadas primeiras e segunda sejam iguais a zero nos pontos intermediários. Com isto impõe-se a continuidade da função no intervalo (a, b) .

a) Derivada primeira no ponto 1 ((2) = (3) = 0)

$$a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{31}x_1^3 - y_1 = 0$$
$$a_{02} + a_{12}x_1 + a_{22}x_1^2 + a_{32}x_1^3 - y_1 = 0$$

$$a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{31}x_1^3 - y_1 - a_{02} - a_{12}x_1 - a_{22}x_1^2 - a_{32}x_1^3 + y_1 = 0$$

derivando-se a função acima tem-se:

$$a_{11} + 2a_{21}x_1 + 3a_{31}x_1^2 - a_{12} - 2a_{22}x_1 - 3a_{32}x_1^2 = 0 \text{ (eq.7)}$$

b) Derivada primeira no ponto 2 ((4) = (5) = 0)

$$a_{02} + a_{12}x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{32}x_2^3 - y_2 = 0$$
$$a_{03} + a_{13}x_2 + a_{23}x_2^2 + a_{33}x_2^3 - y_2 = 0$$

$$a_{02} + a_{12}x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{32}x_2^3 - y_2 - a_{03} - a_{13}x_2 - a_{23}x_2^2 - a_{33}x_2^3 + y_2 = 0$$

derivando a função acima tem-se:

$$a_{12} + 2a_{22}x_2 + 3a_{32}x_2^2 - a_{13} - 2a_{23}x_2 - 3a_{33}x_2^2 = 0 \text{ (eq. 8)}$$

c) Derivada segunda da eq. 7.

$$2a_{21} + 6a_{31}x_1 - 2a_{22} - 6a_{32}x_1 = 0 \text{ (eq. 9)}$$

d) Derivada segunda da eq.8.

$$2a_{22} + 6a_{32}x_2 - 2a_{23} - 6a_{33}x_2 = 0 \text{ (eq. 10)}$$

Com isto tem-se mais 4 equações o que parcialmente totalizam dez equações.

Terceiro Passo: impor condições de fechamento nos pontos extremos, isto é, dos pontos 0 e 3.

a) Derivada segunda no ponto 0, da eq 1.

$$2a_{21} + 6a_{31}x_0 = 0 \text{ (eq. 11)}$$

b) Derivada segunda no ponto 3, da eq. 6.

$$2a_{23} + 6a_{33}x_3 = 0 \text{ (eq. 12)}$$

Com um total de 12 equações e doze incógnitas, tem-se a solução única.

Para resolver o sistema de equações por inversão de matrizes, tem-se que este sistema forma uma matriz esparsa, contendo zeros inclusive na diagonal.

Aplicando-se $Ax = B$ diretamente, não se tem solução pelo método de eliminação de Gauss, assim usa-se o seguinte artifício:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B \text{ onde:}$$

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

dependendo apenas da matriz quadrada $(A^T \cdot A)^{-1}$ não ser singular.

Desta forma, para os três segmentos tem-se as seguintes equações contínuas no intervalo (a, b):

$$a_{01} + a_{11}x^2 + a_{21}x^{02} + a_{31}x^{03} = y = S_1(x^0) \text{ para } x_0 \leq x^0 \leq x_1 \text{ (eq. 13)}$$

$$a_{02} + a_{12}x^1 + a_{22}x^{12} + a_{32}x^{13} = y = S_2(x^1) \text{ para } x_1 \leq x^1 \leq x_2 \text{ (eq. 14)}$$

$$a_{03} + a_{13}x^2 + a_{23}x^{22} + a_{33}x^{23} = y = S_3(x^2) \text{ para } x_2 \leq x^2 \leq x_3 \text{ (eq. 15)}$$

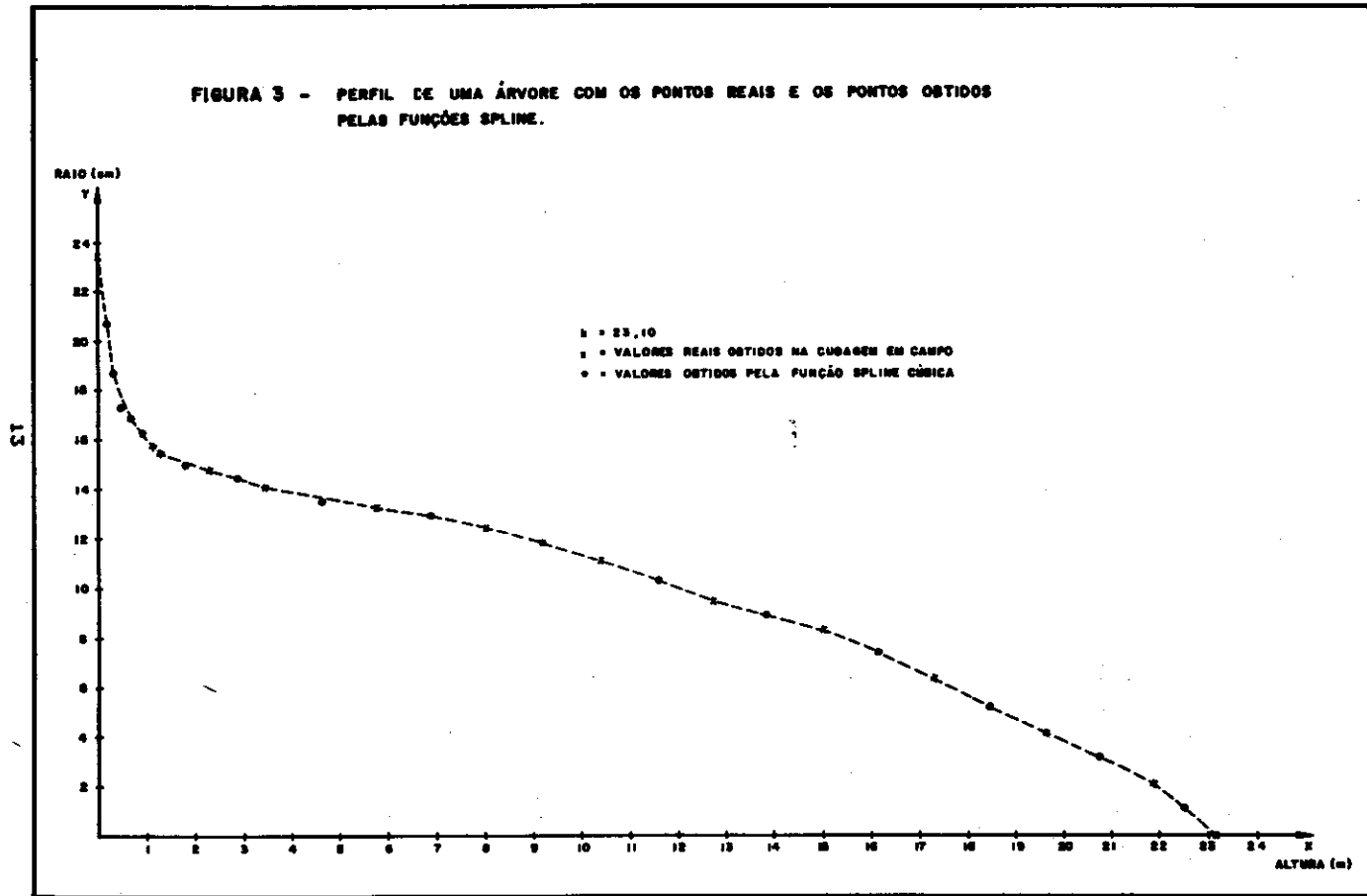
3. APLICAÇÃO DO MÉTODO

A fim de melhor expor a aplicação do método, utilizou-se neste trabalho, doze árvores de *Pinus elliottii* com 23 anos de idade e com variação diamétrica de 23cm a 38,7cm.

Em cada árvore foram medidos diâmetros em vinte e dois pontos ao longo do tronco, como segue: 0,0m; 0,4m; 0,7m; 1,3m; 0,10.h; 0,15.h; 0,20.h; ...; 0,95.h, sendo h = altura total.

O perfil de uma árvore com os pontos reais e os pontos obtidos pelas funções spline constam na FIGURA 3, indicando a excelente performance dessa técnica em expressar a forma das árvores.

Procurando também demonstrar a eficiência das funções spline na estimativa volumétrica, os resultados obtidos foram comparados com volumes reais calculados pelo método de Smalian.



Esses volumes foram computados para a árvore inteira e para volumes comerciais otimizados conforme ilustra a FIGURA 4. Destinou-se o volume máximo produzido para laminação, daí para serraria, celulose e finalmente para resíduos, perdendo-se 10cm referente à base (toco).

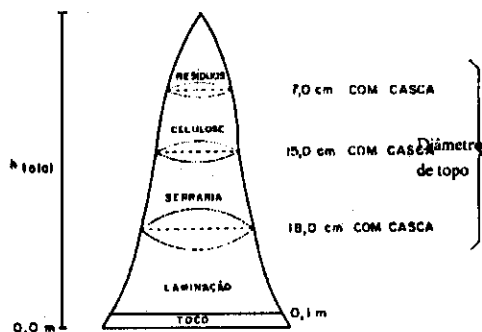


FIGURA 4: Representação esquemática de divisão do tronco em partes destinadas a diferentes usos comerciais.

A TABELA 1 a seguir, sintetiza os resultados obtidos pelas funções spline e por Smalian, referentes às 12 árvores que englobam as classes sociológicas dominadas, médias e dominantes.

Contém ainda, o percentual de diferença entre Smalian e Spline para cada árvore sendo em média, respectivamente, -0,054% para o volume total; -0,013% para o volume que poderia destinar-se para laminação; -0,205% para serraria e -0,285% para celulose. De acordo com CAILLIEZ³, na cubagem rigorosa, Smalian tende a subestimar o volume total real em torno de 1%. Isto pode explicar o diferencial dos volumes obtidos por Spline e Smalian.

Nota-se também que à medida que volumes menores são considerados (aproveitamento para celulose por exemplo) os valores percentuais das diferenças tendem a aumentar. Contudo para uma análise definitiva, dever-se-ia comparar spline com volumes reais obtidos por xilômetro.

4. CONCLUSÕES

O procedimento apresentado demonstrou ser eficiente na descrição do perfil do tronco e nos volumes obtidos por integração, sejam eles parciais ou totais.

O método de ajuste leva a resultados bastante precisos, uma vez que a interpolação obriga a passagem da curva através de todos os pontos que dão origem às funções, ou seja, é um processo determinístico.

5. RESUMO

Uma metodologia para obtenção de funções spline cúbicas foi apresentada como forma de retratar o perfil de troncos de árvores.

Os volumes obtidos pela integração das funções spline em doze árvores foram comparados com volumes calculados por Smalian com diferenças médias abaixo de 0,3%, sejam para o volume total ou para volumes comerciais (laminação, serraria e celulose).

6. LITERATURA CITADA

- 1 - BARTELS, R.H.; BEATTY, J.C. & BARSKY, B.A. An introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling. Morgan Kaufmann Publishers Inc. California. 1987, 476p.
- 2 - BORDERS, B.E.; BAILEY, R.L. & WARE, K.D. Slash pine site index from a polymorphic model by joining (spline) nonpolynomial segments with an algebraic difference method. Forest Science, vol. 30 nº 2, 1984. p. 411-423.
- 3 - CAILLIEZ, F. Forest volume estimation and yield prediction-volume estimation. FAO Forestry Paper 22/1. vol.1. Roma. 1980. 98p.
- 4 - DAHLQUIST, G. & BJÖRCK, A. Numerical Methods. Prentice-Hall, Inc. New Jersey. 1974. 573p.
- 5 - DEVAN, J.S. & BURKHART, H.E. Polimorphic site index equations for loblolly pine based on a segmented polynomial differential model. Forest Science, vol. 28. 1982. p. 544-555.
- 6 - EUBANK, R.L. Approximate regression models and splines. Commun.Statist. Theor.Meth., 13(4), 1984. 433-484.
- 7 - HRADETZKY, J. Spline Funktionen und ihre anwendung in der forstlichen forschung. F.W. Cbl., Heft 1, 1981, p. 45-49.
- 8 - LIU, C.J. On single tree height increment with spline approximation. Technical Report. Department of Forestry - University of Kentucky. 1979. 6p.
- 9 - ——. Stem profile analysis. Technical Report. Department of Forestry. University of Kentucky. 1979. 12p.

10 - —. Log volume estimation with spline approximation. Forest Sci. vol.26(3), 1980. p. 361-369.

A. Darstellung von Schaftformen durch Kubische Spline-interpolation und reduktion der stützstellenanzahl. Forstarchiv, Heft 4, 1981. p.127-130.

11 - MAX, T.A. & BURKHART, H.E. Segmented polynomial regression applied to taper equation. Forest Sci. vol.22. 1976. p. 283-289.

13 - SMALTSCHINSKI, Th. Individuelle baumschaftform und cubische Spline interpolation. Allgemeine Forst und Jagdzeitung, 155. 1983, p. 193-197.

12 - SABOROWSKI, J.; SLOBODA, B. & JUNGE,

TABELA 1: Volumes obtidos por Smalian e por Spline e diferenciais em porcentagem

Árvore Nº	d _{1,3} (Cm)	h _{total} (m)	Volume total sem casca (m ³)			Volume p/ laminação (m ³)			Volume p/ serraria (m ³)			Volume p/ celulose (m ³)		
			Smalian	Spline	D%	Smalian	Spline	D%	Smalian	Spline	D%	Smalian	Spline	D%
1	23,0	21,8	0,332	0,3331	-0,03	0,1547	0,1547	0,00	0,0688	0,0688	0,00	0,0999	0,0999	0,00
2	24,5	21,8	0,3983	0,3978	-0,13	0,2095	0,2093	-0,10	0,1086	0,1086	0,00	0,0707	0,0708	0,14
3	25,0	22,6	0,4459	0,4458	-0,02	0,2595	0,2584	-0,04	0,1117	0,1118	0,09	0,0665	0,0666	0,15
4	23,6	24,6	0,4650	0,4644	-0,13	0,2410	0,2405	-0,21	0,1542	0,1543	0,06	0,0604	0,0605	0,15
5	26,8	25,2	0,5331	0,5330	-0,02	0,3686	0,3688	0,08	0,0938	0,0937	-0,11	0,0600	0,0600	0,00
6	29,7	228	0,6157	0,6146	-0,18	0,5018	0,5013	-0,05	0,0537	0,0536	-0,19	0,0489	0,0487	-0,41
7	30,4	26,1	0,8017	0,8018	0,01	0,6918	0,6923	0,07	0,0569	0,0570	0,18	0,0394	0,0391	-0,76
8	22,0	28,0	1,0677	1,0672	-0,05	0,9741	0,9747	0,06	0,0367	0,0366	0,27	0,0394	0,0389	-1,27
9	34,5	27,2	1,1126	1,1110	-0,14	1,0196	1,0192	-0,04	0,0316	0,0310	-1,90	0,0437	0,0435	-0,46
10	36,7	27,0	1,2266	1,2261	-0,04	1,1392	1,1395	0,03	0,0345	0,0343	-0,59	0,0376	0,0378	0,53
11	36,5	26,7	1,1421	1,1408	-0,11	1,0510	1,0501	0,09	0,0294	0,0291	-1,02	0,0463	0,0461	-0,43
12	38,7	24,5	0,8531	0,8525	-0,07	0,7537	0,7533	-0,05	0,0466	0,0472	1,29	0,0377	0,0373	-1,06