



ELLIEZER DE ALMEIDA MELO

**DESENVOLVIMENTO DE MODELOS PARA
CRESCIMENTO FLORESTAL E AFILAMENTO
DE FUSTE**

LAVRAS – MG

2014

ELLIEZER DE ALMEIDA MELO

**DESENVOLVIMENTO DE MODELOS PARA CRESCIMENTO
FLORESTAL E AFILAMENTO DE FUSTE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Manejo Florestal, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Natalino Calegario

Coorientador

Dr. Adriano Ribeiro de Mendonça

LAVRAS – MG

2013

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

Melo, Elliezer de Almeida.

Desenvolvimento de modelos para crescimento florestal e
afilamento de fuste / Elliezer de Almeida Melo. – Lavras : UFLA,
2014.

122 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.
Orientador: Natalino Calegario.
Bibliografia.

1. Eucalipto - Afilamento de fuste. 2. Eucalipto - Dendrometria
- Modelos estocásticos. 3. Covariáveis. 4. Equações diferenciais. I.
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 634.9285

ELLIEZER DE ALMEIDA MELO

**DESENVOLVIMENTO DE MODELOS PARA CRESCIMENTO
FLORESTAL E AFILAMENTO DE FUSTE**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, área de concentração em Manejo Florestal, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 26 de setembro de 2013.

Dr. Helio Garcia Leite UFV

Dr. Paulo Fernando Trugilho UFLA

Dr. Natalino Calegario
Orientador

**LAVRAS – MG
2013**

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado condições de lutar e alcançar os objetivos pretendidos. Pelo amor incondicional, por estar comigo nos momentos de lutas, incertezas e alegrias. Obrigado por esta conquista.

Aos meus pais, Edson de Melo e Ivalmira Lúcia de Almeida Melo, minha irmã Juliana, meus grandes incentivadores, e por seu amor incondicional. Aos meus familiares e amigos pelo incentivo e, principalmente, pela amizade.

Ao professor, orientador e amigo Natalino Calegario, pela oportunidade, pelos ensinamentos e conselhos, durante o tempo que permaneci em Lavras.

Ao professor, co-orientador e amigo, Adriano Ribeiro de Mendonça, pelos ensinamentos, conselhos e, principalmente, pela amizade desde a época de UEG.

À UFLA, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, aos professores do Departamento de Ciências Florestais, do Departamento de Ciências Exatas e da UEG (Ipameri) pela contribuição em minha formação profissional.

Aos funcionários, em especial à Chica, Teresinha e Juliano, pela disponibilidade de sempre poder ajudar.

À empresa Copebrás/Anglo American por tornar possível a coleta de dados e, por conseqüência a realização deste trabalho.

À CAPES pelo auxílio da bolsa de estudos.

Aos meus amigos de república e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal. Em especial, Ernani (Possato), André (Peludo), Fábio (Zebra), Anderson (Baleta), Marcel (Thú), Celso Pedro (Verme), Ygoor (Medonho), Thiago (Thí), Rômulo (Montes Claros), Isaac Júnior (lógica fuzzy), Joyce, Sabrina, Geisi, Mirian e Renata. Obrigado pelos ensinamentos e, principalmente, pela amizade.

Às famílias Cavazza e Habib. Obrigado pelo apoio, pelo incentivo e, principalmente, pela amizade. Em especial ao Mário, Karla, Renato, Cristina, e Vó Cotinha. Ao amigo Glauco, obrigado pelos ensinamentos e amizade sincera companheiro.

À Bruna, pelo incentivo, amizade, companheirismo e pelos momentos de conversas sobre as fases de um mestrando, as incertezas. Obrigado pela compreensão e pelo apoio.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, o meu muito OBRIGADO.

RESUMO GERAL

O presente estudo foi desenvolvido a partir de variáveis dendrométricas coletadas em parcelas temporárias e permanentes para realização de inventário florestal na empresa Copebrás, localizada na região sudeste do estado de Goiás. Objetivou-se modelar o crescimento e a produção das florestas de eucalipto a partir de modelos tradicionais e rebuscados, juntamente com a utilização da técnica de inclusão de covariáveis para obtenção de modelos capazes de representar a realidade do povoamento florestal. O estudo foi dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo objetivou-se realizar um levantamento de revisão de literatura com o intuito de embasamento para desenvolvimento do segundo, terceiro e quarto capítulos. O segundo capítulo constituiu-se na avaliação de dois modelos lineares e dois não lineares para modelagem da relação hipsométrica e quatro modelos não lineares para estimativa da altura média das árvores dominantes e codominante e classificação de sítio. De acordo com as análises estatísticas, os modelos logísticos de quatro e três parâmetros mostraram-se superiores em relação aos demais, sendo, portanto, empregados para a estimativa de alturas e classificação de sítio, respectivamente. Para o terceiro capítulo objetivou-se a aplicação da técnica de equações diferenciais para modelagem do crescimento e da produção em área basal, e do modelo logístico de três parâmetros para modelagem do volume, ambas fazendo comparação ao modelo tradicional de Clutter. O modelo de Clutter mostrou-se inferior em relação aos demais. Além disso, verificou-se a ineficiência dos modelos que obtiveram as melhores estatísticas em projetar a área basal e o volume após 7 anos. Objetivou-se no quarto capítulo desenvolver e avaliar modelos de afilamento não lineares, baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste. Os modelos de afilamento desenvolvidos foram comparados com os modelos de Schöepfer modificado, logístico de três e quatro parâmetros. De acordo com as análises estatísticas, os modelos de afilamento apresentaram características estatísticas inferiores ao modelo de Schöepfer modificado e semelhantes aos modelos tradicionais logísticos.

Palavras-chave: Eucalipto. Modelos estocásticos. Equações diferenciais. Afilamento. Covariáveis.

GENERAL ABSTRACT

The present study was developed from dendrometric variables collected in temporary and permanent plots to perform a forest inventory in Copebrás company, which is located in the southeastern region of Goiás state, Brazil. The objective was to model the growth and yield of Eucalyptus using traditional and complex models, simultaneously with the use of the covariates technique for obtaining models that can represent the reality of the forest stand. The study was divided into four chapters. The first chapter aimed to conduct a literature review over the topics covered in this work, in order to get a better theoretical background for the development of the second, third and fourth chapters. The second chapter consisted in the evaluation of two linear and two nonlinear hypsometric models and four nonlinear models to estimate the mean height of dominant and codominant trees and site index. According to statistical analysis, the four and three parameters logistic models proved to be superior over the others and are therefore used to estimate heights and site index, respectively. The third chapter, intended to apply the technique of differential equations for modeling growth and yield in terms of basal area, and the three-parameter logistic model for modeling volume, both were compared to the traditional model of Clutter. The Clutter model proved to be inferior to the others. Moreover, it was verified the inefficiency of the models that had the best statistics to project basal area and volume after 7 years. The goal of the fourth chapter was to develop and evaluate nonlinear taper models based on the rate of change of the radius along the stem. The taper models were compared to the modified Schoepfer model and to the three-and four parameters logistic model. According to the statistical analysis, the taper models showed statistical characteristics lower than the modified Schö epfer model and similar to the traditional logistics models.

Key Words: Eucalyptus. Stochastic models. Differential equations. Taper. Covariates.

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

- Figura 1 (a) Gráfico de resíduo para o modelo logístico clássico de quatro parâmetros; (b) Relação entre altura total estimada (m) e altura total observada (m) para o modelo logístico clássico de quatro parâmetros 48
- Figura 2 (a) Gráfico de resíduo para o modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis; (b) Relação entre altura total estimada (m) e altura total observada (m) para o modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis; (c) Histograma de classes de resíduos (%) para o modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis 52
- Figura 3 Distribuição da altura média das árvores dominantes e codominantes em função do tempo 53
- Figura 4 Curvas de índice de sítio para clones de eucalipto na empresa Anglo American, Catalão/Ouvidor – GO 59

CAPÍTULO 3

- Figura 1 (a) Gráfico de resíduo para o modelo com inclusão de covariáveis utilizado na estimativa da produtividade em área basal – Modelo (I); Gráfico de resíduo para o modelo com inclusão de covariáveis utilizado na estimativa da produtividade em área basal – Modelo (II) 83
- Figura 2 Comportamento do crescimento volumétrico em função da idade .. 86

Figura 3	(a) Gráfico de resíduo para o modelo de Clutter utilizado na estimativa da produtividade em volume – Modelo (16); (b) Gráfico de resíduo para o modelo logístico com inclusão de covariáveis utilizado na estimativa da produtividade em volume – Modelo (18).....	88
----------	--	----

CAPÍTULO 4

Figura 1	Perfil da árvore média por classe diamétrica.....	100
Figura 2	Exemplo da variação da taxa do afilamento em função da altura comercial	102
Figura 3	(a) Gráfico de resíduo para o modelo polinomial de 4° grau; (b) Altura estimada (m) <i>versus</i> altura observada (m) para o modelo polinomial de 4° grau	110
Figura 4	Gráficos de resíduo para os modelos I (a), II (b) e III (c)	113
Figura 5	(a) Gráfico de resíduo do modelo I, (b) gráfico da altura estimada (m) <i>versus</i> altura observada (m) do modelo I, (c) gráfico de resíduo do modelo III, (d) gráfico da altura estimada (m) <i>versus</i> altura observada (m) do modelo III.....	117

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 2

Tabela 1	Modelos lineares e não lineares para a estimativa da altura total de árvores de <i>Eucalyptus</i> sp.	40
Tabela 2	Modelos ajustados para estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes e classificação da capacidade produtiva.....	42
Tabela 3	Frequências de diâmetro e altura das árvores-amostra presentes nas unidades amostrais	45
Tabela 4	Estatísticas descritivas relacionadas às variáveis do povoamento....	45
Tabela 5	Estatísticas de ajuste dos modelos de relação hipsométrica e seus respectivos parâmetros estimados	46
Tabela 6	Critério de informação de Akaike (<i>AIC</i>), critério de informação Bayesiano (<i>BIC</i>), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança (<i>lnmv</i>), para os modelos hipsométricos ajustados .	47
Tabela 7	Estatísticas de ajuste do modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis.....	50
Tabela 8	Estatísticas de comparação entre o modelo logístico original com quatro parâmetros e o modelo logístico com adição de covariáveis.....	51
Tabela 9	Estatísticas de ajuste dos modelos para classificação da capacidade produtiva e seus respectivos parâmetros estimados.....	54
Tabela 10	Critério de informação de Akaike (<i>AIC</i>), critério de informação Bayesiano (<i>BIC</i>), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança (<i>lnmv</i>), para os modelos de sítio ajustados	55
Tabela 11	Limite das classes de sítio para o modelo logístico.....	58

CAPÍTULO 3

Tabela 1	Frequências de diâmetro e altura das árvores-amostra presentes nas unidades amostrais e estatísticas descritivas do povoamento	78
Tabela 2	Caracterização das árvores cubadas para o ajuste do modelo volumétrico de árvores individuais	82
Tabela 3	Estatísticas de ajuste do modelo volumétrico e seus respectivos parâmetros estimados	80
Tabela 4	Parâmetros estimados dos modelos I, II e de Clutter para estimativa da área basal	81
Tabela 5	Análise estatística comparativa de ajuste dos modelos originais e com inclusão de covariável para estimativa da área basal.....	82
Tabela 6	Consistência verificada para o modelo I	85
Tabela 7	Consistência verificada para o modelo II	85
Tabela 8	Estatísticas de ajuste dos modelos de Clutter e logístico e seus respectivos parâmetros estimados	87
Tabela 9	Estatísticas de comparação entre o modelo logístico original, o modelo logístico completo e o modelo de Clutter.....	88
Tabela 10	Valores de produção referentes à integral do modelo de crescimento e do modelo de produção	90
Tabela 11	Valores de volume, incremento médio anual e incremento corrente anual para as diferentes classes de sítio.....	91

CAPITULO 4

Tabela 1	Caracterização das árvores cubadas para o ajuste de modelos de perfil	107
Tabela 2	Parâmetros e estatísticas de ajuste dos modelos de afilamento	108

Tabela 3	Critério de informação de Akaike (<i>AIC</i>), critério de informação Bayesiano (<i>BIC</i>), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança (<i>lnmv</i>), para os modelos de afileamento ajustados	109
Tabela 4	Parâmetros e estatística de ajuste para os modelos de afileamento baseado na taxa de variação	111
Tabela 5	Critério de informação de Akaike (<i>AIC</i>), critério de informação Bayesiano (<i>BIC</i>), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança (<i>lnmv</i>), para os modelos de afileamento baseado na variação da taxa	112
Tabela 6	Parâmetros e estatísticas de ajuste para os modelos de afileamento desenvolvidos	115

SUMÁRIO

	CAPÍTULO 1 Introdução Geral	16
1	INTRODUÇÃO	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO	19
2.1	Abordagem do gênero <i>Eucalyptus</i>	19
2.2	Hipsometria	20
2.3	Classificação da capacidade produtiva	22
2.4	Volumetria	23
2.5	Estudos de afilamento	24
2.6	Modelos de crescimento e produção	27
2.7	Equações diferenciais	28
	REFERÊNCIAS	31
	CAPÍTULO 2 Uso de modelo não linear para modelagem da relação hipsométrica e do crescimento das árvores dominantes e codominantes	35
1	INTRODUÇÃO	37
2	MATERIAL E MÉTODOS	39
2.1	Caracterização da área de estudo e coleta dos dados	39
2.2	Avaliação de modelos hipsométricos e modelos para classificação de sítio	39
2.2.1	Relação hipsométrica	40
2.2.2	Classificação da capacidade produtiva	41
2.3	Avaliação da qualidade de ajuste dos modelos	42
2.3.1	Erro padrão residual e percentual	43
2.3.2	Critério de informação de Akaike (<i>AIC</i>) (SAKAMOTO; ISHIGURO; KITAGAWA, 1986)	43
2.3.3	Critério de informação Bayesiano (<i>BIC</i>) (SCHWARZ, 1978)	43
2.3.4	Teste da razão da máxima verossimilhança (<i>TRMV</i>)	44
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
3.1	Análise exploratória dos dados	45
3.2	Análise dos modelos hipsométricos	46
3.3	Distribuição das \overline{HDC} no tempo e análise dos modelos para estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes	53
3.4	Estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes e construção de curvas de índice de sítio	55
4	CONCLUSÕES	60
	REFERÊNCIAS	61
	CAPÍTULO 3 Modelagem do crescimento e da produção em área basal fundamentada no uso de equações diferenciais	62

1	INTRODUÇÃO	64
2	MATERIAL E MÉTODOS	66
2.1	Caracterização da área de estudo e coleta dos dados	66
2.2	Modelagem da relação hipsométrica	67
2.3	Classificação de sítio	67
2.4	Estimativa do volume de árvores individuais	68
2.5	Modelagem do crescimento e produção em área basal	69
2.6	Modelagem do crescimento e produção em volume	71
2.7	Avaliação da qualidade de ajuste dos modelos	75
2.7.1	Erro padrão residual e percentual	75
2.7.2	Crítério de informação de Akaike (AIC) (SAKAMOTO; ISHIGURO; KITAGAWA, 1986)	76
2.7.3	Crítério de informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978).....	76
2.7.4	Teste da razão da máxima verossimilhança (TRMV)	76
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	78
3.1	Análise exploratória dos dados.....	78
3.2	Análise do modelo volumétrico de árvores individuais.....	80
3.3	Análise dos modelos I, II e de Clutter para estimativa do crescimento e produção em área basal	80
3.4	Aplicação do procedimento de consistência para estimativa do crescimento e da produção em área basal	84
3.4.1	Modelo I – Projecção do crescimento de 2,8 para 4,8 anos e de 3,8 para 4,8 anos	84
3.4.2	Modelo II – Projecção do crescimento de 2,8 para 4,8 anos e de 3,8 para 4,8 anos	85
3.5	Comportamento do crescimento volumétrico e análise dos modelos de Clutter e logístico para estimativa do crescimento e produção em volume	85
3.6	Aplicação do procedimento de compatibilidade para estimativa do crescimento e da produção volumétrica	89
3.7	Aplicação da técnica equações diferenciais para modelagem da área basal e projecção da produção volumétrica	90
4	CONCLUSÃO	93
	REFERÊNCIAS	94
	CAPÍTULO 4 Proposta de uma metodologia de modelagem do afilamento baseado na taxa de variação do raio	95
1	INTRODUÇÃO	97
2	MATERIAL E MÉTODOS	99
2.1	Caracterização da área de estudo e coleta dos dados.....	99
2.2	Ajuste de modelos de afilamento para estimativa da altura comercial	100

2.3	Desenvolvimento do modelo de afilamento baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste.....	101
2.4	Avaliação da qualidade de ajuste dos modelos	104
2.4.1	Erro padrão residual e percentual	105
2.4.2	Critério de informação de Akaike (AIC) (SAKAMOTO; ISHIGURO; KITAGAWA, 1986)	105
2.4.3	Critério de informação Bayesiano (BIC) (Schwarz, 1978).....	106
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	107
3.1	Análise exploratória dos dados.....	107
3.2	Análise dos modelos de afilamento para estimativa da altura comercial	107
3.3	Análise dos modelos de afilamento baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste	111
4	CONCLUSÃO.....	119
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	120
	REFERÊNCIAS	121

CAPÍTULO 1 Introdução Geral

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a associação de produtores de florestas plantadas (ABRAF), o setor florestal brasileiro contribui de forma significativa na geração de produtos, tributos, empregos e bem estar. Ressalta-se, ainda, a importância estratégica do setor, no que diz respeito ao fornecimento de matéria-prima e produtos para exportação, além de contribuir, de maneira direta, na conservação e preservação dos recursos naturais (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PRODUTORES DE FLORESTAS PLANTADAS - ABRAF, 2012).

No Brasil, em 2011, a área total de florestas plantadas de Eucalipto e Pinus atingiu mais de 6,5 milhões de hectares. Deste total, 74,8% representam o plantio de Eucalipto e 25,2% o de Pinus. A maior parte dos plantios está concentrada nas regiões sul e sudeste do país, com 73,8% da área total. Com relação a plantios de espécies não convencionais como Acácia, Teca, Araucária, Seringueira, dentre outras, estima-se que, em 2011, a área ocupada pelas mesmas representou 6,0% da área total de plantios florestais, totalizando 489,28 mil hectares (ABRAF, 2012).

Ainda segundo os autores, a maioria dos produtos primários e secundários é destinada à exportação, com exceção da lenha, do carvão vegetal e dos painéis de madeira, cujo consumo está concentrado no mercado interno. Estima-se que as exportações brasileiras de produtos de florestas plantadas contribuem com 3,1% do total, o qual obteve um crescimento de 5,3% em relação a 2010. Estes dados ressaltam a importância do setor florestal brasileiro no cenário nacional e internacional.

Com o aumento das áreas de florestas plantadas, impulsionado pelos incentivos governamentais e políticas de conservação de florestas naturais,

aliado às características de rápido crescimento destes monocultivos e aos programas de melhoramento genético já existentes há décadas, torna-se clara a vantagem de substituição de madeiras proveniente de floresta nativa por madeiras de reflorestamento.

Neste contexto, é interessante utilizar métodos de aproveitamento destes recursos de maneira mais eficaz, reduzindo os desperdícios, para suprir a alta demanda por produtos madeireiros. Este melhor aproveitamento está ligado ao uso de materiais genéticos apropriados para determinado local, manejo adequado da floresta e escolha de técnicas de modelagem e modelos estatísticos capazes de estimar com alta precisão as variáveis de interesse. Assim, a obtenção de estimativas acuradas é uma importante ferramenta, pois serve de subsídio para maior controle do manejador, auxiliando-o na tomada de decisões e na maior eficiência do planejamento da produção florestal.

Os avanços tecnológicos proporcionaram uma evolução no uso de modelos florestais. O grande avanço está na utilização de modelos complexos para estimativa de variáveis do povoamento. Além do uso de modelos não lineares, outras técnicas envolvendo a manipulação destes modelos foram desenvolvidas. A adição de covariáveis aos modelos e estudos de crescimento e produção a partir do uso de equações diferenciais são ferramentas aprimoradas que servem de subsídio na obtenção de estimativas com alto grau de precisão.

Nesse contexto, partindo-se da necessidade de desenvolver modelos estatísticos capazes de representar a realidade do povoamento, estimar com precisão o estoque de madeira, realizar a projeção do crescimento e da produção e estimar as variáveis de afilamento, o presente estudo foi realizado com os objetivos:

- a) Modelagem da relação hipsométrica e classificação da capacidade produtiva;

- b) Projeção do crescimento em área basal fundamentada em equações diferenciais; e
- c) Desenvolver e avaliar modelos de afilamento não lineares, baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Abordagem do gênero *Eucalyptus*

O gênero *Eucalyptus* pertence à família *Myrtaceae*. Originário da Austrália e da Indonésia, o eucalipto é hoje uma das principais fontes de matéria-prima para produção de papel e celulose e geração de energia. Além disso, é, também, fonte de matéria-prima para produção de óleos essenciais, postes de eletricidade, mourões de cerca, madeira sólida para fabricação de móveis, pisos, revestimentos e outras aplicações na construção civil. Mais recentemente, o setor privado demonstrou interesse pelo uso de florestas de eucalipto para fixação de carbono, visando diminuir a concentração de dióxido de carbono (CO₂) na atmosfera (ALFENAS et al., 2004).

De acordo com os autores, a propagação de mudas de eucalipto por estaquia inicializou no Brasil no final da década de 70. Os fatores relevantes que culminaram no desenvolvimento da clonagem foram a incidência de doenças, principalmente o cancro e a heterogeneidade dos plantios florestais. Esses autores ressaltam que, sem o desenvolvimento da técnica de clonagem, as regiões quentes e úmidas seriam afetadas pelo avanço da eucaliptocultura, pois são regiões favoráveis à incidência de doenças. Além disso, os autores garantem que a técnica foi a grande responsável por desencadear o desenvolvimento do setor florestal no país, permitindo formar plantios homogêneos, resistentes a doenças e de alta produtividade.

A expansão dos plantios comerciais de eucalipto no Brasil se deve às condições edafoclimáticas favoráveis, política de investimento em pesquisas, melhoramento genético, qualificação da mão de obra empregada na atividade, e otimização do manejo florestal, conferindo maiores valores de produtividade por

hectare – alcançando um incremento médio anual (*IMA*) de $40 \text{ m}^3 \text{ ha}^{-1} \text{ ano}$, além de proporcionar a redução do ciclo de rotação.

No Brasil, as florestas plantadas de eucalipto cobrem, aproximadamente, 4,9 milhões de hectares, sendo, Minas Gerais o estado detentor da maior área plantada, chegando a 28,8% da área total (ABRAF, 2012).

2.2 Hipsometria

A medição da altura de árvores em povoamentos florestais é uma prática importante, pois faz-se essencial para estimativa volumétrica e classificação da capacidade produtiva, além de descrever a estrutura vertical do povoamento (TEMESGEN; GADOW, 2004).

A relação hipsométrica é utilizada em inventários florestais para determinar a altura de árvores. Baseia-se na medição de diâmetros a 1,30 m de altura (*DAP*), e a altura total (H_t) de algumas árvores presentes nas unidades amostrais. O conjunto dos dados de alturas das árvores medidas juntamente com os respectivos diâmetros é possível estabelecer uma relação de regressão - utilizada para estimar as alturas das demais árvores das parcelas em função dos diâmetros (CAMPOS; LEITE, 2009; MACHADO et al., 1994).

O conhecimento e aplicação da relação hipsométrica possui grande utilidade, pois permite a redução do tempo e dos custos na coleta de informações biométricas, além de fornecer estimativas confiáveis de altura e volume individual de árvores em povoamentos florestais, sendo o volume fundamental na fase de planejamento da produção para qualquer empresa florestal (MACHADO et al., 1994; MENDONÇA et al., 2011).

No entanto, a relação hipsométrica é influenciada pela idade, capacidade produtiva, densidade, posição sociológica, tamanho da copa, e pela espécie. No caso de inventários sucessivos, sugere-se também, que a relação

hipsométrica seja realizada a cada ano, principalmente em povoamentos jovens, onde é verificado o maior incremento corrente anual em altura. Quanto maior a uniformidade do povoamento, maior será a correlação diâmetro-altura, portanto, maior o sucesso de utilização da relação hipsométrica.

Bartoszeck et al. (2004a) e Prodan et al. (1997) comentam que uma única relação hipsométrica, ajustada para todo o povoamento, resultaria em alta variabilidade em torno da linha de regressão da altura sobre o diâmetro, e, conseqüentemente, um maior erro de estimativa. Para solucionar este problema, é usual em inventários florestais ajustar modelos independentes para cada parcela ou, então, para cada grupo homogêneo de parcelas, respeitando as características do povoamento (BARTOSZECK et al., 2004a).

De acordo com Curtis (1967 citado por TEMESGEN; GADOW, 2004), para evitar a criação de relação hipsométrica individual para cada povoamento, tratando de modo particular cada característica em questão, é usual fazer o uso de funções generalizadas para estimativa da relação hipsométrica, usando variáveis do povoamento.

Vários estudos foram feitos com objetivo de avaliar a relação hipsométrica em várias espécies, entre eles, Caldeira et al. (2003), com *Araucaria angustifolia*; Machado et al. (1994), com *Pinus elliotti*; e Donadoni et al. (2010), com *Pinus caribaea* var. *hondurensis* e *Pinus tecunumanii*, entre outros.

Na maioria destes trabalhos considera-se somente a relação diâmetro-altura. Nos dias correntes, é usual adicionar aos modelos variáveis do povoamento que explicam a relação hipsométrica, como a espécie ou material genético, idade, qualidade do local, densidade, área basal, diâmetro quadrático e altura dominante e codominante. Entre os trabalhos que seguem essa tendência tem-se: Bartoszeck et al. (2004a, 2004b), Machado et al. (1994), Mendonça et al. (2011), Temesgen e Gadow (2004) e Tomé, Ribeiro e Faias (2007).

2.3 Classificação da capacidade produtiva

Os conceitos iniciais de sítio foram primeiramente desenvolvidos e aplicados na Alemanha, no século XIX. Ao longo dos anos, vários métodos de classificação foram discutidos, mas, de um modo geral, o índice de sítio tem sido definido pela altura média das árvores dominantes e codominantes, relacionadas a uma idade índice (MACHADO, 1978). Pesquisadores recomendam o uso da idade de referência (idade-índice) próxima à idade de rotação do povoamento florestal.

O conceito de altura dominante é definido pela altura média das 100 árvores de maior *DAP* por hectare (ASSMANN, 1970). Segundo Schneider e Schneider (2008), a altura dominante e codominante é o elemento dendrométrico mais adequado para a determinação da qualidade do sítio florestal, sendo ela pouco influenciada pela densidade do povoamento. Além disso, o crescimento em altura está fortemente correlacionado com o crescimento potencial do volume - sendo maior quanto melhor a qualidade do sítio.

De acordo com Spurr (1952), a qualidade do sítio é a soma total dos fatores edáficos, biológicos e climáticos que afetam as plantas. Para este autor, o sítio não é um fator nem todos os fatores, mas a soma dos fatores efetivos entre os quais um ou mais são dominantes.

O crescimento e a produção de um povoamento florestal, além de depender da idade, do grau de utilização do potencial produtivo e de tratamentos silviculturais, dependem, também, da capacidade produtiva do local. A classificação da capacidade produtiva é importante quando se deseja identificar o potencial produtivo e, também, fornecer uma estimativa de referência para diagnosticar e prescrever o manejo do solo. Assim, a classificação de sítio é uma ferramenta de grande valia para o manejador avaliar o crescimento e,

consequentemente, interpretar melhor a prognose da produção (CAMPOS; LEITE, 2009).

Essa relação entre a altura dominante e codominante e a idade, vem sendo utilizado há muito tempo para estudos de classificação da qualidade do local e para compor modelos de crescimento e produção. Dentre os vários trabalhos pode-se citar: Amateis e Burkhart (1985), Corral Rivas et al. (2004), Diéguez-Aranda, Burkhart e Rodríguez-Soalleiro (2005), Kitikidou, Petrou e Milios (2012), Machado et al. (1997), Mendonça et al. (2011) e Tonini, Schneider e Finger (2006).

2.4 Volumetria

Conhecer o volume das árvores é, na maioria das vezes, o principal objetivo dos levantamentos florestais, no que se refere a povoamentos com fins comerciais. A quantificação do volume das parcelas faz-se importante quando se deseja estabelecer estudos de crescimento e produção, pois fornece informações pertinentes para o planejamento da atividade florestal.

Segundo Prodan et al. (1997), a forma do fuste de árvores é característica de cada espécie, sendo influenciada pelo sítio, densidade de plantio, disponibilidade de água e fatores intrínsecos da espécie. Apesar da forma do fuste variar de espécie para espécie, ela é geometricamente descrita como um neiloide na base, um parabolóide no meio e um conóide na extremidade final do fuste (HUSCH; MILLER; BEERS, 1983).

Visando contornar os fatores que afetam a forma, o cálculo do volume de uma árvore é obtido pela aplicação de métodos que se aproximam do volume real. A cubagem rigorosa é um método direto, difundido na prática de inventários florestais para estimativa do volume individual de árvores a partir da soma de volumes das seções definidas ao longo do fuste. Dentre os métodos

mais usuais pode-se destacar o absoluto. O método absoluto é composto pelos métodos de Smalian, Huber e Newton, sendo que, o primeiro é mais usual em razão de sua facilidade e agilidade na coleta de informações.

Com as informações de cubagem é possível estimar o volume de árvores a partir do ajuste de modelos volumétricos. Segundo Campos e Leite (2009), o emprego de modelos volumétricos para quantificação da produção de povoamentos florestais, proporciona maior precisão nas estimativas. Mencionam, ainda, que as estimativas podem ser mais precisas quando utilizados, individualmente, para determinada espécie, densidade, idade e regime de corte.

Para contornar o processo de ajuste de um modelo para cada estrato do povoamento, é possível o ajuste de apenas um modelo, incluindo as variáveis no processo de modelagem, pelo uso de técnicas mais avançadas de ajuste (CARVALHO, 2010).

2.5 Estudos de afilamento

De acordo com Kozak (2004), ao contrário das equações de volume, que apenas estimam volume total ou volume comercial do fuste, as equações de afilamento fornecem estimativas de diâmetro em qualquer ponto ao longo do fuste; volume total do fuste; volume comercial e altura comercial para qualquer diâmetro; e volume de sessão individual de qualquer comprimento, em qualquer altura.

No Brasil, estudos de afilamento no fuste de árvores baseiam-se em equações que permitem estimar o diâmetro e/ou a altura ao longo do tronco, como em Horle et al. (2010), Leite et al. (2006, 2011), Mendonça et al. (2007), Pires e Calegario (2007) e Souza et al. (2008). A grande maioria dos modelos utilizados é linear, principalmente, os polinomiais. Os modelos não lineares

raramente são utilizados para o ajuste de funções de afilamento. Uma das justificativas de não utilização desses modelos refere-se à dificuldade de ajuste e convergência. Porém, com a evolução tecnológica atual de *softwares* e *hardwares*, esses ajustes são obtidos com maior facilidade (PIRES; CALEGARIO, 2007).

Leite et al. (2011), avaliando três modelos de afilamento, Demaerschalk (1972), Garay (1979) e Ormerod (1973), visando descrever o perfil do cerne e do fuste de árvores de *Tectona grandis* L.f., observaram que o segundo modelo foi eficiente para estimar o afilamento do fuste com e sem casca e o afilamento do cerne. Para garantir maior consistência na estimação dos diâmetros, foram incluídas duas variáveis binárias no modelo, conferindo maior confiabilidade nas estimativas. Leite et al. (2006) escolheram o modelo de Garay para estimar o perfil do fuste de *Virola surinamensis*, obtendo estimativas precisas e livre de viés.

Souza et al. (2008), ao avaliar diferentes modelos de afilamento para descrever o fuste de *Pinus taeda* e estimar o diâmetro, a altura e o volume ao longo do fuste, concluíram que o polinômio de 5º grau apresentou estimativas satisfatórias. Neste estudo, o polinômio descreveu a altura e volume comercial sem tendências e resíduos com pequena variação. Na determinação do diâmetro e volume das bitolas percebeu-se uma leve tendência e uma pequena amplitude dos resíduos.

No trabalho realizado por Pires e Calegario (2007), tendo como objetivo o ajuste de modelos lineares e não lineares para a descrição do perfil de árvores, o melhor modelo encontrado para representar o perfil foi o modelo não linear logístico modificado, por apresentar características desejáveis como a parcimônia (evita o excesso de parâmetros), interpretação dos parâmetros e extrapolação do modelo (podendo ser utilizado para outro conjunto de dados).

Apesar dos modelos não lineares possuírem características favoráveis, os modelos lineares tiveram vantagem em relação à precisão das estimativas, principalmente o modelo proposto por esses autores. Algumas considerações feitas, ao comparar o modelo logístico com o modelo polinomial, é que o modelo linear possui maior correlação entre os parâmetros, o que poderá causar tendências na estimativa, em função da alta multicolineariedade. Outra observação diz respeito à inclusão de outras variáveis (cone e base), as quais proporcionaram melhor ajuste do modelo aos dados. A dificuldade, porém, está na obtenção dessas variáveis em nível de campo.

Nesse mesmo sentido, Horle et al. (2010), ao comparar o uso do modelo linear modificado (polinômio) com o modelo não linear modificado (logístico), pela adição do efeito de classe de diâmetro, chegaram à conclusão de que o modelo que representou de forma satisfatória o perfil de *Pinus oocarpa* foi o modelo não linear modificado, obtendo as melhores medidas de precisão.

Modelos de expoente-variável têm sido utilizados com sucesso, pois descrevem de forma precisa o afilamento do fuste. Dentre os vários trabalhos que utilizam esta técnica, podem-se destacar os de Fonweban et al. (2011), Kozak (2004) e Yang et al. (2009), dentre outros. As principais vantagens de modelos de expoente-variável referem-se à sua flexibilidade, possibilitando modificações nos modelos, adequando-os às condições locais e à espécie estudada, além de apresentarem menor multicolineariedade (KOZAK, 2004).

Kozak (2004) comparou modelos de afilamento tradicionais, desenvolvidos em 1988 e 1994, com modelos de expoente-variável de 2001 e 2002, em 38 grupos de espécies. Concluiu, então, que os modelos de expoente-variável forneceram as melhores estimativas de altura comercial e foram os mais consistentes em relação aos modelos de afilamento tradicionais.

Utilizando a técnica de expoente-variável, Fonweban et al. (2011) estimaram funções de afilamento para descrever o fuste *Pinus sylvestris* L. e

Picea sitchensis (Bong.) Carr. Segundo esses autores, os modelos que deram os melhores resultados, baseado no ajuste, validação, simplicidade e comportamento do modelo, foram recomendados para descrever o fuste destas espécies.

2.6 Modelos de crescimento e produção

É interesse do profissional ligado ao manejo de florestas quantificar e prognosticar, com confiabilidade, o estoque de suas florestas. A quantificação do crescimento e da produção é de fundamental importância no planejamento florestal, pois fornece informações que subsidiam a tomada de decisões relacionadas ao manejo, as quais são baseadas em informações sobre condições de recursos florestais atuais e futuros.

Existem tipos de modelos capazes de prever o crescimento e a produção, como os modelos de árvores individuais, distribuição diamétrica e os modelos em nível de povoamento. Os modelos em nível de povoamento são os mais usuais no planejamento de empresas florestais. Dentre os modelos em nível de povoamento, o modelo de Clutter (1963) é o mais difundido no meio florestal (GORGENS et al., 2007).

Tratando-se de modelos em nível de povoamento, vários trabalhos podem ser mencionados, como em Resende et al. (2004), onde encontraram resultados interessantes ao realizar a prognose do crescimento e produção em um povoamento de Eucalipto. Neste trabalho foi possível estimar e avaliar a idade de corte do povoamento, utilizando-se de critérios técnicos e econômicos.

Gorgens et al. (2007), comparando os modelos de Clutter (1963) e Piennar e Shiver (1986), visando obter maior flexibilidade na simulação de desbastes, concluíram que o modelo de Piennar e Shiver apresentou características semelhantes ao modelo de Clutter, não diferenciando tendências

de crescimento, evidenciando o uso do modelo de Clutter, sem maiores prejuízos, na simulação de desbastes.

Oliveira et al. (2009), propondo um procedimento para modelagem do crescimento e produção, concluíram que o modelo proposto por estrato foi mais eficiente do que o modelo de Clutter. Deste modo, é possível obter estimativas confiáveis de crescimento e produção em clones que possuam menos de três medições.

Zhao, Borders e Wilson (2004), desenvolvendo modelos de crescimento em área basal e modelos de mortalidade para seis grupos de espécies, concluíram que os modelos apresentaram propriedades estatísticas e comportamentais desejáveis, o que poderá ser utilizado para atualizar o inventário florestal em curto prazo.

Nesse mesmo sentido, Calegario et al. (2005), modelando o crescimento em área basal, através da teoria dos modelos lineares mistos em multiníveis, constataram um ganho de precisão em relação a outros modelos analisados, quando expressou o crescimento em área basal de árvores individuais.

Subedi e Sharma (2011) trabalharam com modelos de crescimento de árvores individuais independentes da distância em plantações de pinheiros. Nesse trabalho, os autores utilizaram a teoria dos modelos não lineares de efeito misto, para modelar o crescimento em área basal, e obtiveram melhoras significativas ao incluir coeficientes de efeito aleatório.

2.7 Equações diferenciais

Segundo Zill (2003), uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial. Pode, também, ser definida como qualquer relação entre uma função e as suas derivadas.

Existem dois tipos de equações diferenciais: as equações diferenciais ordinárias e as equações de derivadas parciais. Nas equações diferenciais ordinárias, a função y que aparece na equação é uma função de uma variável x . A forma geral da equação é $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. A ordem da equação é a ordem da derivada de ordem superior que apareça na equação. Já as equações de derivadas parciais, a função u é uma função de várias variáveis, $u(x, z, t, \dots)$ e a equação é uma relação entre u , as variáveis independentes x, z, t, \dots e as derivadas parciais de u .

Resolver uma equação diferencial ordinária é, portanto, encontrar a função y . Essas equações aparecem, frequentemente, como modelos matemáticos para descrever e prever fenômenos naturais. Nesses modelos matemáticos, a taxa de variação de alguma grandeza, em função de uma única variável (ou as taxas de variação de várias ordens), obedece à alguma lei hipotetizada ou verificada experimentalmente, que é expressa apenas em termos da variável ou da grandeza. Quando estes modelos (equações diferenciais) são resolvidos, obtém-se a função da grandeza em relação a esta variável, o que permite prever o valor da grandeza em valores específicos da variável e, assim, entender melhor o fenômeno natural.

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são da forma $f(x, y, y') = 0$, mas geralmente por meio de simples manipulação algébrica conseguem-se reescrever na forma de uma ou mais equações.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

A equação pode ser, também, escrita na forma diferencial.

$$f(x, y) dx - dy = 0 \quad (2)$$

Existem alguns tipos de equações ordinárias de primeira ordem que podem ser resolvidas, analiticamente, usando o teorema fundamental do cálculo integral.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (3)$$

$$y(x) = \int f(x) dx + c \quad (4)$$

O caso mais simples em que a taxa de variação de uma grandeza em relação a uma variável dependente da própria grandeza é o caso do crescimento exponencial. Por exemplo, suponha que $p(t)$ representa o número de bactérias em uma placa de petri no minuto t . Assuma que a placa possui uma quantidade suficiente de açúcar, de modo que não falta comida para as bactérias. Espera-se que, nessas condições, cada bactéria se dividirá em duas a cada 20 minutos. Se nenhuma bactéria morre (não há predadores ou influências externas danosas), então, a taxa de variação de p é igual a $\frac{1}{20}p = 0,05p$ por minuto. O desejo de modelar o crescimento da população de bactérias na placa de petri é um exemplo de aplicação da técnica de equações diferenciais.

REFERÊNCIAS

- ALFENAS, A. C. et al. **Clonagem e doenças do eucalipto**. Viçosa, MG: UFV, 2004. 442 p.
- AMATEIS, R. L.; BURKHART, H. E. Site index curves for Loblolly Pine plantations on cutover site-prepared lands. **Southern Journal of Applied Forestry**, Washington, v. 9, p. 166-169, 1985.
- ASSMANN, E. **The principles of forest yield study**. New York: Pergamon, 1970. 506 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PRODUTORES DE FLORESTAS PLANTADAS. **Anuário estatístico da ABRAF**: ano base 2011. Brasília, 2012. 145 p.
- BARTOSZECK, A. C. D. P. E. S. et al. Dinâmica da relação hipsométrica em função da idade, do sítio e da densidade inicial de povoamentos de bracatinga da Região Metropolitana de Curitiba, PR. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 28, n. 4, p. 517-533, jul./ago. 2004a.
- BARTOSZECK, A. C. D. P. E. S. et al. Modelagem da relação hipsométrica para bracatingais da região metropolitana de Curitiba PR. **Floresta**, Curitiba, v. 32, n. 2, p. 189-204, 2004b.
- CALDEIRA, M. V. W. et al. Relação hipsométrica para araucária angustifolia (BERT.) O. Ktze na região oeste do Estado do Paraná. **Revista Acadêmica: Ciências Agrárias e Ambientais**, Curitiba, v. 1, n. 2, p. 79-88, 2003.
- CALEGARIO, N. et al. Estimativa do crescimento de povoamentos de Eucalyptus baseada em modelos lineares em multiníveis de efeito misto. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 29, n. 2, p. 251-261, mar./abr. 2005.
- CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: perguntas e respostas**. 3. ed. Viçosa, MG: UFV, 2009. 548 p.
- CARVALHO, S. P. C. E. **Uma nova metodologia de avaliação do crescimento e da produção de Eucalyptus sp clonal para fins energéticos**. 2010. 103 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

CLUTTER, J. L. Compatible growth and yield for loblolly pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 9, n. 3, p. 354-371, 1963.

CORRAL RIVAS, J. J. et al. Compatible height and site index models for five pine species in El Salto, Durango, Mexico. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 201, n. 2/3, p. 145-160, 2004.

DIÉGUEZ-ARANDA, U.; BURKHART, H. E.; RODRÍGUEZ-SOALLEIRO, R. Modeling dominant height growth of radiata pine (*Pinus radiata* D. Don) plantations in north-western Spain. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 215, n. 1/3, p. 271-284, 2005.

DONADONI, A. X. et al. Relação hipsométrica para *Pinus caribaea* var. *hondurensis* e *Pinus tecunumanii* em povoamento homogêneo no Estado de Rondônia. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 40, n. 12, p. 2499-2504, dez. 2010.

FONWEBAN, J. et al. Taper functions for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain. **Forestry**, Oxford, v. 84, n. 1, p. 49-60, Jan. 2011.

GORGENS, E. B. et al. Tendência de crescimento de povoamento de Eucalipto após aplicação de desbaste. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 31, n. 5, p. 879-885, set./out. 2007.

HORLE, D. C. et al. Modelagem não linear do perfil longitudinal de fustes de *Pinus oocarpa*. **Cerne**, Lavras, v. 16, n. 2, p. 177-184, abr./jun. 2010.

HUSCH, B.; MILLER, C. L.; BEERS, T. E. **Forest mensuration**. 3rd ed. New York: Ronald Press, 1983. 402 p.

KITIKIDOU, K.; PETROU, P.; MILIOS, E. Dominant height growth and site index curves for Calabrian pine (*Pinus brutia* Ten.) in central Cyprus. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, New York, v. 16, n. 2, p. 1323-1329, 2012.

KOZAK, A. My last words on taper equations. **The Forestry Chronicle**, Ottawa, v. 80, n. 4, p. 507-515, 2004. Disponível em: <<http://pubs.cif-ifc.org/doi/abs/10.5558/tfc80507-4>>. Acesso em: 10 jul. 2012.

LEITE, H. et al. Models of heartwood of *Tectona grandis* Lf. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, v. 39, n. 89, p. 53-59, 2011.

LEITE, H. G. et al. Função de afilamento para *Virola surinamensis* (Roll.) Warb. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 30, n. 1, p. 99-106, jan./fev. 2006.

MACHADO, S. D. A. **Studies in growth and yield estimation for *Pinus taeda* L. plantations in the State of Paraná**. 1978. 170 p. Thesis (Doctor of Philosophy) - University of Washinthon, Seattle, 1978.

MACHADO, S. D. A. et al. Análise do comportamento da relação hipsométrica com respeito à idade para plantações de *Pinus elliotti* no estado do Paraná. **Cerne**, Lavras, v. 1, n. 1, p. 5-12, 1994.

MACHADO, S. D. A. et al. Classificação de sítio para Bracatingais na região metropolitana de Curitiba. **Boletim de Pesquisa Florestal**, Colombo, n. 35, p. 1-17, 1997.

MENDONÇA, A. R. D. et al. Avaliação de funções de afilamento visando a otimização de fustes de *Eucalyptus* sp. para multiprodutos. **Cerne**, Lavras, v. 13, n. 1, p. 71-82, jan./mar. 2007.

MENDONÇA, A. R. D. et al. Modelos hipsométricos e de crescimento em altura das árvores dominantes e codominantes para *Pinus caribaea* var . *hondurensis*. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, v. 39, n. 90, p. 151-160, 2011.

OLIVEIRA, M. L. R. D. et al. Modelagem e prognose em povoamentos não desbastados de clones de Eucalipto. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 33, n. 5, p. 841-852, set./out. 2009.

PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não-lineares para a descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 31, n. 5, p. 845-852, set./out. 2007.

PRODAN, M. et al. **Mensura forestal**. San José: IICA, 1997. 586 p.

RESENDE, R. R. et al. Emprego de um modelo de crescimento e produção para determinação da rotação em povoamentos de Eucalipto. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 28, n. 2, p. 219-225, mar./abr. 2004.

SCHNEIDER, P. R.; SCHNEIDER, P. S. P. **Introdução ao manejo florestal**. 2. ed. Santa Maria: FACOS-UFSM, 2008. 566 p.

SOUZA, C. A. M. D. et al. Modelos de afilamento para o sortimento do fuste de *Pinus taeda* L. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 38, n. 9, p. 2506-2511, 2008.

SPURR, S. H. **Forest inventory**. New York: Ronald Press, 1952. 476 p.

SUBEDI, N.; SHARMA, M. Individual-tree diameter growth models for black spruce and jack pine plantations in northern Ontario. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 261, n. 11, p. 2140-2148, 2011.

TEMESGEN, H.; GADOW, K. Generalized height-diameter models-an application for major tree species in complex stands of interior British Columbia. **European Journal of Forest Research**, Georgetown, v. 123, n. 1, p. 45-51, 2004.

TOMÉ, M.; RIBEIRO, F.; FAIAS, S. Relação hipsométrica geral para *Eucalyptus globulus* Labill. em Portugal. **Silva Lusitana**, Oeiras, v. 15, n. 1, p. 41-55, 2007.

TONINI, H.; SCHNEIDER, P. R.; FINGER, C. A. G. Curvas de índice de sítio para povoamentos clonais de *Eucalyptus saligna* Smith para a depressão central e serra do sudeste, Rio Grande do Sul. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 16, n. 1, p. 27-43, 2006.

YANG, Y. et al. Nonlinear mixed-effects modeling of variable-exponent taper equations for lodgepole pine in Alberta, Canada. **European Journal of Forest Research**, Georgetown, v. 128, n. 4, p. 415-429, 2009.

ZHAO, D.; BORDERS, B.; WILSON, M. Individual-tree diameter growth and mortality models for bottomland mixed-species hardwood stands in the lower Mississippi alluvial valley. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 199, n. 2/3, p. 307-322, 2004.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Thomson, 2003. 492 p.

CAPÍTULO 2 Uso de modelo não linear para modelagem da relação hipsométrica e do crescimento das árvores dominantes e codominantes

RESUMO

Este trabalho buscou avaliar modelos lineares e não lineares clássicos e generalizados com adição de covariáveis, para modelagem da relação hipsométrica e do crescimento em altura das árvores dominantes e codominantes de clones de eucalipto. Foram ajustados dois modelos lineares e dois não lineares para estimativa da relação hipsométrica e quatro modelos não lineares para classificação de sítio. Com relação à hipsometria, para o modelo que propiciou as melhores estatísticas, utilizou-se a técnica de inclusão de covariáveis para o ajuste, visando obter melhor precisão das estimativas. A seleção e a qualidade de ajuste dos modelos se deram com base no erro padrão percentual $[S_{yx} \ %]$, critério de informação de Akaike AIC , critério de informação Bayesiano BIC e no teste de razão da máxima verossimilhança $TRMV$, além do gráfico de resíduos. Para a manipulação, ajuste e processamento dos dados foi utilizado o *software* R. De acordo com as análises estatísticas dos modelos, para a relação hipsométrica, o logístico com quatro parâmetros mostrou-se superior em relação aos outros modelos ajustados. Com a adição de covariáveis, o modelo logístico obteve uma melhor precisão em comparação ao modelo clássico. Para a estimativa do crescimento em altura das árvores dominantes e codominantes, o modelo logístico com três parâmetros obteve as melhores estatísticas de precisão, sendo, então, utilizado para a construção das curvas de índice de sítio.

Palavras-chave: Eucalipto. Modelos determinísticos. Modelos generalizados. Covariáveis.

ABSTRACT

This work aimed to evaluate linear and nonlinear, classical and generalized models with the addition of covariates for modeling the hypsometric relation and height growth of dominant and codominant trees of eucalyptus clones. Two linear models and two nonlinear models were fitted to estimate the hypsometric relationship and four nonlinear models for classifying site. Regarding the hypsometry, it was used the technique of inclusion of covariates in the model that provided the best statistics in order to obtain more precise estimates. The selection and quality of the fittings was based on the standard error $[S_{yx} \ %]$, Akaike information criterion AIC , Bayesian information criterion BIC test the maximum likelihood $TRMV$, in addition to the graphical analysis of the residuals. For handling, fitting and processing the data it was used the R software. According to the statistical analysis of the models, for the hypsometric relation the four parameters logistic model was proved to be superior when compared to the other adjusted models. When covariates were added, the logistic model obtained better accuracy compared to the classical model. In relation to the estimates of height growth in dominant and codominant trees, the three parameters logistic model obtained the best statistical precision, and therefore it was used for the construction of site index curves.

Key Words: Eucalyptus. Deterministic models. Generalized models. Covariates.

1 INTRODUÇÃO

Conhecer a produtividade de um povoamento florestal é um requisito ao qual o manejador deve se atentar em toda parte do ciclo do povoamento, pois possibilita maior controle do planejamento, culminando em decisões eficazes e sólidas do empreendimento florestal. O uso de modelos determinísticos, para obtenção de informações do povoamento florestal, é uma técnica válida, pois se utilizada de maneira adequada, fornece estimativas de grande confiabilidade de variáveis de difícil obtenção no inventário florestal.

Com os avanços tecnológicos, nesse caso, o aprimoramento de computadores e desenvolvimento de *hardwares* e *softwares* cada vez mais modernos, proporcionou uma evolução no uso de modelos florestais. O grande avanço ocorreu no processo de estimar uma variável do povoamento a partir de modelos não lineares. A aplicação destes modelos apresenta uma leve dificuldade, pois é necessário conhecer os valores dos parâmetros iniciais para o processo de convergência, o que os torna complexos para a maioria dos profissionais.

Se não bastasse o uso de modelos não lineares, outras técnicas envolvendo a manipulação destes modelos foram desenvolvidas. A adição de variáveis do povoamento que explicam a variabilidade do que se deseja conhecer é um aprimoramento da modelagem. Essa técnica - também chamada de modelagem com adição de covariáveis - é utilizada com o intuito de produzir estimativas com alto grau de precisão.

Juntamente com as técnicas de modelagem, faz-se necessário que o profissional saiba onde utilizá-las. Daí vem à necessidade de conhecer as variáveis que afetam o crescimento e a produção florestal. Quando se deseja quantificar o volume de árvores individuais é necessário o conhecimento da altura total da árvore H_t , associada ao diâmetro a $\cong 1,30$ metros de altura

DAP . Nesse contexto, pensando em economia e redução de erros no processo de obtenção dessas informações, aproximadamente 20% dos indivíduos em cada unidade amostral é mensurada a H_t . O contrário é realizado com o *DAP* , ou seja, em todas as unidades amostrais são mensurados 100% dos *DAPs* , pois se trata de um procedimento de fácil obtenção e pequena possibilidade de erros. Considerando o custo e as dificuldades encontradas na medição da H_t , tem-se a necessidade de utilizar as técnicas de modelagem para estimativa dessa variável. Além do *DAP* , outras variáveis podem ser inseridas no modelo, pois explicam a variabilidade da H_t , como a idade, a capacidade produtiva do local, entre outras.

O índice de sítio, também, é uma variável utilizada em estudos de crescimento e produção. Este corresponde à altura média das árvores dominantes e codominantes em uma idade de referência \overline{HDC}_{ref} . A altura dominante e codominante são as variáveis mais utilizadas para classificação da capacidade produtiva, para determinada espécie ou clone e para um determinado produto.

Objetivou-se neste estudo avaliar modelos lineares e não lineares clássicos e generalizados com adição de covariáveis, para modelagem da relação hipsométrica e do crescimento em altura das árvores dominantes e codominantes de povoamentos de clones de eucalipto.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Caracterização da área de estudo e coleta dos dados

Os dados para a realização do estudo foram provenientes de um plantio clonal de eucalipto, pertencente à empresa Copebrás, de propriedade do grupo Anglo American, localizada no município de Catalão e Ouvidor, região sudeste do estado de Goiás, Brasil. O clima da região enquadra-se no tipo Aw, que, de acordo com a classificação climática de Köppen, apresenta dois períodos distintos: um chuvoso e outro seco. Com temperatura média anual atingindo 22°C e precipitação média anual com valores entre 1200 e 1800 mm.

A área total utilizada para o estudo foi de, aproximadamente, 1000 hectares. O método de amostragem foi a casual simples (ACS). As unidades amostrais possuem formato retangular de área variável com, aproximadamente, 450 m². Para o estudo da relação hipsométrica e construção de curvas de índice de sítio, foram utilizados dados de 35 parcelas temporárias e 55 parcelas permanentes medidas em 2010 e 2012, distribuídas em diferentes idades e locais. Considerando os dados coletados, *DAP* e *H_t*, procedeu-se à divisão das árvores em classes diamétrica e de altura, além de uma análise descritiva relacionada às variáveis do povoamento.

2.2 Avaliação de modelos hipsométricos e modelos para classificação de sítio

Foram avaliados modelos lineares e não lineares para o ajuste da relação hipsométrica, e para a estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes \overline{HDC} , apenas modelos não lineares. Para a manipulação dos dados, ajuste dos modelos e análises estatísticas foi utilizado o *software* R.

2.2.1 Relação hipsométrica

Para o ajuste da relação hipsométrica, foram utilizados os modelos lineares de curtis e o parabólico, e os modelos não lineares logístico de três e quatro parâmetros, conforme tabela 3.

Tabela 1 Modelos lineares e não lineares para a estimativa da altura total de árvores de *Eucalyptus* sp

Modelos Lineares	
Modelo	Função Hipsométrica
Curtis	$Ln H_{t_i} = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{DAP_i} + \varepsilon_i$
Parabólico	$H_{t_i} = \beta_0 + \beta_1 DAP_i + \beta_2 DAP_i^2 + \varepsilon_i$
Modelos Não Lineares	
Logístico 3 Parâmetros	$H_{t_i} = \frac{\beta_0}{1 + \exp\left[\frac{\beta_1 - DAP_i}{\beta_2}\right]} + \varepsilon_i$
Logístico 4 Parâmetros	$H_{t_i} = \beta_0 + \frac{\beta_1 - \beta_0}{1 + \exp\left[\frac{\beta_2 - DAP_i}{\beta_3}\right]} + \varepsilon_i$

Em que: H_{t_i} = altura total da *i-ésima* árvore (m); DAP_i = diâmetro a aproximadamente 1,30 m de altura (cm) da *i-ésima* árvore presente em cada unidade amostral; Ln = logaritmo neperiano; exp = base do logaritmo neperiano; β_s = parâmetros a serem estimados; ε_i = erro aleatório.

Os modelos não lineares devem ser utilizados para estimativas de variáveis de difícil obtenção no meio florestal, pois retratam o comportamento biológico de crescimento, sendo, seus parâmetros, interpretáveis. O modelo logístico de três parâmetros é composto pela assíntota horizontal, ponto de inflexão e ponto de escala. A assíntota refere-se ao crescimento médio máximo β_0 , dado pelo eixo Y. O ponto de inflexão expressa a taxa média de máximo

crescimento β_1 , dado pelo eixo X. O parâmetro de escala β_2 representa a distância do eixo X entre o ponto de inflexão e, aproximadamente, 73% do máximo crescimento médio (PINHEIRO; BATES, 2000).

O modelo logístico de quatro parâmetros é composto pela assíntota horizontal superior e inferior, ponto de inflexão e ponto de escala. A assíntota horizontal superior e inferior β_0 e β_1 expressa a taxa média de máximo e mínimo crescimento, respectivamente, dado pelo eixo Y. O parâmetro β_2 representa o ponto de inflexão, dado pelo eixo X. O parâmetro de escala β_3 representa a distância do eixo X, aproximadamente, 75% da distância entre o parâmetro β_0 e β_1 (PINHEIRO; BATES, 2000).

Além da utilização de modelos não lineares, para produção de estimativas mais precisas, o uso de técnicas avançadas de modelagem deve ser uma prática corrente no meio florestal. Tal fato é justificado pela ineficiência de apenas uma variável explicar o que se deseja estimar. Nesse caso, para estimativa do crescimento em altura total de árvores individuais, os parâmetros do melhor modelo encontrado serão decompostos para inclusão de variáveis do povoamento que influenciam no crescimento. A idade, a capacidade produtiva do local S e a área basal G foram as covariáveis inseridas no modelo.

2.2.2 Classificação da capacidade produtiva

Para classificação da capacidade produtiva, foram testados quatro modelos não lineares e, posteriormente, avaliadas as suas estatísticas. O uso de modelos não lineares, para a classificação da capacidade produtiva, justifica-se pela capacidade de interpretação de seus parâmetros e pelo comportamento não linear da relação \overline{HDC} e idade. Os modelos ajustados foram o modelo de

Schumacher, Chapman e Richards, Bailey e Clutter e o logístico com três parâmetros, apresentados na tabela 2.

Tabela 2 Modelos ajustados para estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes e classificação da capacidade produtiva

Modelos Não Lineares	
Modelo	Função \overline{HDC}
Schumacher	$\overline{HDC}_i = \beta_0 \exp\left(-\beta_1 \frac{1}{I_i}\right) + \varepsilon_i$
Chapman e Richards	$\overline{HDC}_i = \beta_0 [1 - \exp -\beta_1 I_i]^{-\beta_2} + \varepsilon_i$
Bailey e Clutter 3 Parâmetros	$\overline{HDC}_i = \beta_0 [1 - \exp -\beta_1 I_i^{\beta_2}] + \varepsilon_i$
Logístico 3 Parâmetros	$\overline{HDC}_i = \frac{\beta_0}{1 + \exp\left[\frac{\beta_1 - I_i}{\beta_2}\right]} + \varepsilon_i$

Em que: \overline{HDC}_i = altura média das árvores dominantes e codominantes da *i-ésima* unidade amostral (m); I_i = idade da *i-ésima* unidade amostral (anos); \exp = base do logaritmo neperiano; β_s = parâmetros a serem estimados; ε_i = erro aleatório.

2.3 Avaliação da qualidade de ajuste dos modelos

Para avaliação dos modelos, foram utilizadas a análise gráfica dos resíduos e a análise do histograma de classes de resíduos, para verificação das suposições básicas de análise de regressão, juntamente com algumas medidas de acurácia que servirão de subsídio na comparação dos modelos. Os modelos ajustados tiveram sua precisão avaliada, por meio do erro padrão residual S_{yx} e percentual $[S_{yx} \ %]$, critério de informação de Akaike AIC , Bayesiano BIC , e pelo teste da razão da máxima verossimilhança $TRMV$.

2.3.1 Erro padrão residual e percentual

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Y - \hat{Y}^2}{n - p}} \quad (1)$$

$$S_{yx} \% = \frac{S_{yx}}{\bar{Y}} 100 \quad (2)$$

Em que: S_{yx} = erro padrão residual (m); $S_{yx} \%$ = erro padrão relativo (%); Y = valor observado da variável dependente; \hat{Y} = valor estimado da variável dependente pelo modelo; n = número de observações; p = número de parâmetros do modelo.

2.3.2 Critério de informação de Akaike (AIC) (SAKAMOTO; ISHIGURO; KITAGAWA, 1986)

$$AIC = -2 \ln mv + 2p \quad (3)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano; p = número de parâmetros do modelo.

2.3.3 Critério de informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978)

$$BIC = -2 \ln mv + p \ln n \quad (4)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano; p = número de parâmetros do modelo; n = número de observações.

2.3.4 Teste da razão da máxima verossimilhança (*TRMV*)

$$TRMV = 2 \left[\ln mv_2 - \ln mv_1 \right] \quad (5)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano.

Em relação aos critérios, sabe-se que quanto menores os valores de *AIC* e *BIC* melhor o modelo ajustado, pois penaliza modelos com número excessivo de parâmetros, selecionando modelos mais parcimoniosos. O teste *TRMV* é uma ferramenta de comparação de modelos aninhados dado pela diferença entre os valores máximos da função de verossimilhança dos modelos. Esse valor é testado pela estatística χ^2 . Se o valor de *TRMV* for significativo ao nível de α de probabilidade, o modelo com maior valor de máxima verossimilhança apresenta maior precisão.

A partir da análise das estatísticas, procederá à ordenação das funções segundo o maior grau de precisão. O melhor modelo hipsométrico e de sítio será utilizado para estimativa da altura total e da \overline{HDC} na idade de referência, respectivamente.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Análise exploratória dos dados

Na tabela 3 e 4 são apresentadas as frequências de diâmetro e altura, e uma análise descritiva relacionada às variáveis do povoamento, respectivamente.

Tabela 3 Frequências de diâmetro e altura das árvores-amostra presentes nas unidades amostrais

Classe DAP	Classe de Altura Total						Total
	9,5	14,5	19,5	24,5	29,5	34,5	
5,5	15	6	--	--	--	--	21
8,5	6	32	30	--	--	--	68
11,5	7	72	77	68	4	--	228
14,5	--	32	106	300	122	2	562
17,5	--	3	22	299	478	40	842
20,5	--	--	--	35	190	64	289
23,5	--	--	--	1	69	29	99
26,5	--	--	--	--	21	12	33
29,5	--	--	--	--	1	2	3
Total	28	145	235	703	885	149	2145

Tabela 4 Estatísticas descritivas relacionadas às variáveis do povoamento

Variável do Povoamento	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	CV (%)
Idade (anos)	1,70	6,90	--	--	25,63
N (árvores/ha)	891	1612	1189	1191	7,15
S (m)	27,00	39,00	33,86	33,00	6,46
\overline{Dq} (cm)	10,16	18,53	15,50	15,72	8,95
G (m ² ha ⁻¹)	10,18	34,74	22,58	22,99	17,37

Em que: N = número de árvores por hectare; S = classificação da capacidade produtiva [Sítio (m)]; \overline{Dq} = diâmetro quadrático (cm); G = área basal por hectare.

3.2 Análise dos modelos hipsométricos

Após o ajuste dos modelos hipsométricos obtiveram-se as estatísticas que possibilitaram a ordenação das funções, conforme tabela 5.

Tabela 5 Estatísticas de ajuste dos modelos de relação hipsométrica e seus respectivos parâmetros estimados

Logístico 4 Parâmetros ($S_{yx} = 11,89\%$)				
Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_0	9,1166	1,159	7,869	< 0,0001
β_1	32,2504	0,385	83,653	< 0,0001
β_2	12,5550	0,347	36,207	< 0,0001
β_3	3,5418	0,259	13,664	< 0,0001
Logístico 3 Parâmetros ($S_{yx} = 11,94\%$)				
β_0	33,84713	0,436	77,691	< 0,0001
β_1	10,00832	0,142	70,643	< 0,0001
β_2	5,11851	0,203	25,227	< 0,0001
Parabólico ($S_{yx} = 12,03\%$)				
β_0	-4,243815	0,823	-5,154	< 0,0001
β_1	2,623149	0,099	26,362	< 0,0001
β_2	-0,046629	0,003	-15,613	< 0,0001
Curtis ($S_{yx} = 12,38\%$)				
β_0	3,81222	0,011	352,540	< 0,0001
β_1	-9,13920	0,160	-57,030	< 0,0001

De acordo com o teste “t”, nota-se que todos os parâmetros são significativos ($p < 0,05$). Considerando como critério de seleção as estatísticas $S_{yx} \%$, AIC , BIC , e $lnmv$, tabela 5 e 6, nota-se que os modelos não lineares obtiveram vantagem em relação aos modelos lineares. O modelo logístico com

quatro parâmetros obteve as melhores estatísticas de precisão, seguido pelo modelo logístico com três parâmetros, o modelo parabólico e o modelo de curtis, respectivamente. Na tabela 6 são apresentadas as estatísticas dos modelos ajustados.

Tabela 6 Critério de informação de Akaike (*AIC*), critério de informação Bayesiano (*BIC*), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança (*lnmv*), para os modelos hipsométricos ajustados

Modelo	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>lnmv</i>
Logístico 4 Parâmetros	10889,240	10917,590	-5439,619
Logístico 3 Parâmetros	10907,630	10930,310	-5449,813
Parabólico	10936,870	10959,560	-5464,436
Curtis	11452,730	11469,740	-5723,365

Com o intuito de verificar se as suposições da análise de regressão são atendidas, utiliza-se o gráfico de análise residual, representado pela figura 1 (a), e o gráfico representando a relação entre a altura total estimada e a altura total observada, conforme a figura 1 (b). Estas análises são demonstradas apenas para o modelo logístico com quatro parâmetros, por apresentar as melhores estatísticas de ajuste.

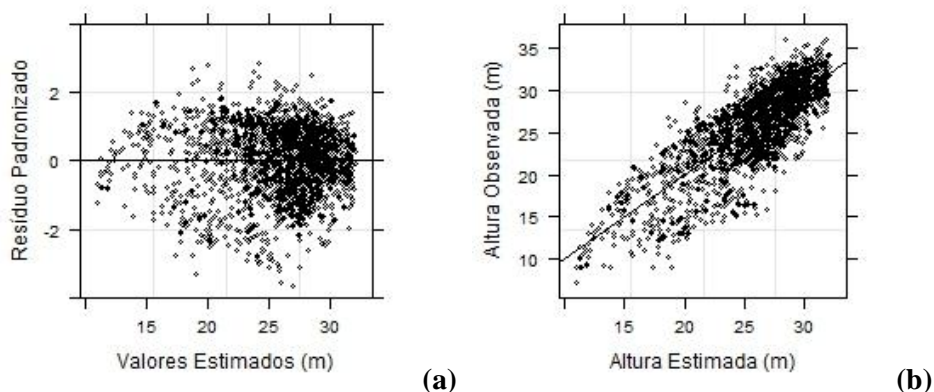


Figura 1 (a) Gráfico de resíduo para o modelo logístico clássico de quatro parâmetros; (b) Relação entre altura total estimada (m) e altura total observada (m) para o modelo logístico clássico de quatro parâmetros

Na figura 1 (a), observa-se uma boa distribuição dos resíduos para o modelo logístico clássico de quatro parâmetros. Nota-se que a pressuposição de independência dos resíduos foi atendida. O mesmo não pode ser afirmado para a pressuposição de homocedasticidade dos resíduos, ou seja, o erro apresenta uma leve não variância constante. Nesse caso, pelo fato do erro sofrer uma leve variação do ideal, pode-se a inferência não ser comprometida, ou seja, este modelo pode ser usado para a relação hipsométrica, sem medo de que as estimativas sejam tendenciosas. Tal situação pode ser resolvida com a inclusão de covariáveis.

Pode-se concluir, após análise da figura 1 (b), que, apesar dos valores estimados estarem um pouco distantes dos valores observados, o modelo clássico conseguiu representar a variação real da relação hipsométrica. Esta relação pode ser melhorada com a inclusão de covariáveis.

Com o objetivo de obtenção de melhor precisão nas estimativas da altura total, o modelo logístico de quatro parâmetros foi decomposto, adicionando ao

modelo variáveis que explicam a variabilidade da variável dependente. Com a inclusão de covariáveis, o modelo logístico de quatro parâmetros foi ajustado conforme estrutura apresentada pelo modelo (6).

$$H_{i_i} = \beta_0 + \frac{\beta_1 - \beta_0}{1 + \exp\left[\frac{\beta_2 - DAP_i}{\beta_3}\right]} + \varepsilon_i \quad (6)$$

Em que: $\beta_0 = \beta_{00} + \beta_{01}I + \beta_{02}S + \beta_{03}G$; $\beta_1 = \beta_{10} + \beta_{11}I + \beta_{12}S$; $\beta_2 = \beta_{20} + \beta_{21}I + \beta_{22}S + \beta_{23}G$; $\beta_3 = \beta_{30} + \beta_{31}I + \beta_{32}S + \beta_{33}G$; $I =$ idade do povoamento (anos); $S =$ índice de sítio (m); $G =$ área basal por hectare ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$).

A tabela 7 contém as estatísticas de ajuste do modelo logístico de quatro parâmetros com inclusão de covariáveis. Pode-se observar que todos os parâmetros foram significativos a um nível de 5% de significância, com exceção do intercepto, representado pelo parâmetro β_{10} . Tal insignificância do parâmetro β_{10} se deve ao fato da inclusão de pelo menos uma das variáveis, - idade, sítio e área basal - ao modelo. Nesse caso, esse fato deve ser desprezível quando se tratar da insignificância de algum intercepto, pois tais variáveis influenciam a relação altura-diâmetro.

Tabela 7 Estatísticas de ajuste do modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis

Logístico 4 Parâmetros com Adição de Covariáveis ($S_{yx} = 6,44\%$)					
Parâmetro	Covariante Associada	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_{00}	Intercepto	-71,64253	15,544	-4,609	< 0,001
β_{01}	Idade	11,65198	1,466	7,947	< 0,001
β_{02}	<i>S</i>	-1,25026	0,350	-3,572	< 0,001
β_{03}	<i>G</i>	2,00919	0,230	8,714	< 0,001
β_{10}	Intercepto	-4,01248	2,226	-1,802	0,072
β_{11}	Idade	1,70009	0,171	9,920	< 0,001
β_{12}	<i>S</i>	0,73627	0,061	11,965	< 0,001
β_{20}	Intercepto	-18,72199	3,944	-4,747	< 0,001
β_{21}	Idade	3,83527	0,359	10,666	< 0,001
β_{22}	<i>S</i>	-0,29152	0,098	-2,969	< 0,001
β_{23}	<i>G</i>	0,62048	0,063	9,838	< 0,001
β_{30}	Intercepto	6,44956	1,986	3,247	< 0,001
β_{31}	Idade	-1,24937	0,162	-7,716	< 0,001
β_{32}	<i>S</i>	0,32756	0,053	6,181	< 0,001
β_{33}	<i>G</i>	-0,28636	0,021	-13,843	< 0,001

A tabela 8 mostra as estatísticas de comparação entre o modelo logístico original de quatro parâmetros e o modelo com adição de covariáveis. Avaliando os resultados, observa-se que o parâmetro *TRMV* foi significativo, comprovando uma melhora do modelo com inclusão de covariáveis em relação ao modelo original. Tal fato é comprovado pela melhoria significativa em todos os parâmetros estatísticos avaliados.

Tabela 8 Estatísticas de comparação entre o modelo logístico original com quatro parâmetros e o modelo logístico com adição de covariáveis

Modelo	<i>G.L.</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>Lnmv</i>	<i>TRMV</i>	p-valor
Original	2141	10889,240	10917,590	-5439,62		
Covariáveis	2130	8286,576	8377,311	-4127,29	2624,66	< 0,0001

As figuras 2 (a), 2 (b) e 2 (c) mostram a análise residual, a relação altura total estimada *versus* altura total observada e as observações agrupadas em classes de resíduos, respectivamente, para o modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis.

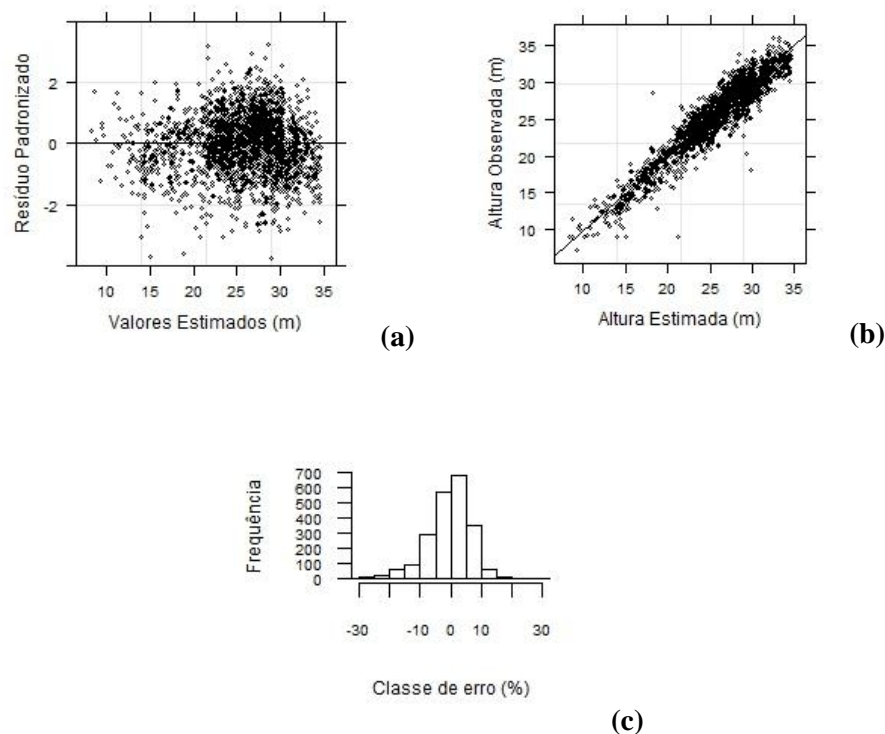


Figura 2 (a) Gráfico de resíduo para o modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis; (b) Relação entre altura total estimada (m) e altura total observada (m) para o modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis; (c) Histograma de classes de resíduos (%) para o modelo logístico de quatro parâmetros com adição de covariáveis

Nota-se que todas as pressuposições da análise de regressão foram atendidas, inclusive a pressuposição de homocedasticidade. A pressuposição de normalidade é verificada pelo histograma de classes de resíduos, figura 2 (c). Estas melhorias tanto na análise residual quanto na relação entre altura estimada e observada se deve à inclusão de covariáveis ao modelo.

Verifica-se, na figura 2 (b), uma melhoria significativa em comparação com a figura 1 (b). Nota-se uma boa qualidade de ajuste do modelo. Este fato é comprovado pela proximidade dos valores estimados em relação aos valores observados com a média. Estes resultados corroboram com todas as estatísticas analisadas, quando comparado com as estatísticas do modelo clássico. Resultados semelhantes foram encontrados nos trabalhos de Carvalho (2010), Guimarães et al. (2009) e Mendonça et al. (2011).

3.3 Distribuição das \overline{HDC} no tempo e análise dos modelos para estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes

Na figura 3 é apresentada a distribuição da altura média das árvores dominantes e codominantes em função do tempo.

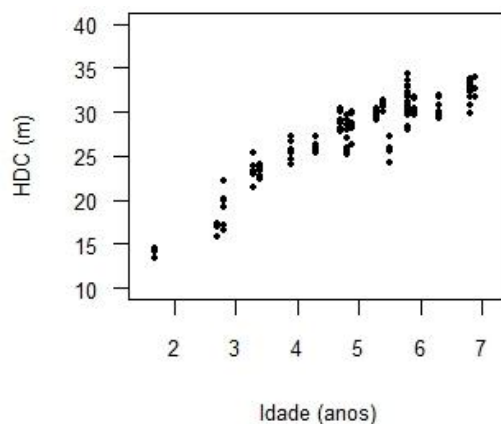


Figura 3 Distribuição da altura média das árvores dominantes e codominantes em função do tempo

A tabela 9 apresenta as estatísticas de ajuste dos modelos utilizados para estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes. Nota-se que

todos os parâmetros são significativos ($p < 0,05$). Considerando apenas a significância dos parâmetros, pode-se concluir que todos os modelos podem ser utilizados para estimativa da \overline{HDC} . Com relação ao critério erro padrão relativo $[S_{yx} \ %]$, observa-se que o modelo logístico obteve o melhor resultado, seguido pelos modelo de Bailey e Clutter, Chapman e Richards, e Schumacher, respectivamente.

Tabela 9 Estatísticas de ajuste dos modelos para classificação da capacidade produtiva e seus respectivos parâmetros estimados

Logístico ($S_{yx} = 5,64\%$)				
Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_0	33,72575	0,630	53,535	< 0,0001
β_1	2,29369	0,071	32,086	< 0,0001
β_2	1,51997	0,122	12,447	< 0,0001
Bailey e Clutter ($S_{yx} = 5,68\%$)				
β_0	35,65162	1,524	23,390	< 0,0001
β_1	-0,23891	0,017	-14,140	< 0,0001
β_2	1,19547	0,103	11,640	< 0,0001
Chapman e Richards ($S_{yx} = 5,68\%$)				
β_0	36,48639	1,461	24,977	< 0,0001
β_1	-0,35877	0,061	-5,918	< 0,0001
β_2	1,32285	0,212	6,233	< 0,0001
Schumacher ($S_{yx} = 5,78\%$)				
β_0	45,02192	0,767	58,730	< 0,0001
β_1	-2,25570	0,082	-27,330	< 0,0001

Observados o critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC) e o logaritmo neperiano da máxima verossimilhança ($lnmv$) presentes na tabela 10, nota-se que o modelo logístico

foi superior para todos os critérios analisados, apresentando os menores valores de *AIC*, *BIC* e *lnmv*, seguido pelos modelos de Bailey e Clutter, Chapman e Richards e pelo modelo de Schumacher, respectivamente. Os resultados apresentados na tabela 10 corroboram com a estatística do S_{yx} %, apresentada na tabela 9.

Tabela 10 Critério de informação de Akaike (*AIC*), critério de informação Bayesiano (*BIC*), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança (*lnmv*), para os modelos de sítio ajustados

Modelo	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>lnmv</i>
Logístico	547,450	559,357	-269,725
Bailey e Clutter	549,431	561,338	-270,715
Chapman e Richards	549,769	561,676	-270,885
Schumacher	553,406	562,336	-273,703

3.4 Estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes e construção de curvas de índice de sítio

De acordo com os critérios estatísticos, observa-se que o modelo logístico apresentou as melhores estatísticas em comparação com os modelos analisados. Partindo do pressuposto de que o melhor modelo será utilizado para estimar a altura média das árvores dominantes e codominantes e construção das curvas de índice de sítio, o modelo logístico será manipulado a fim de atingir os objetivos.

O modelo (7) foi utilizado para a construção das curvas de índice de sítio, mostrando a estimativa de crescimento médio no tempo.

$$\overline{HDC}_i = \frac{\beta_0}{1 + \exp\left[\frac{\beta_1 - I_i}{\beta_2}\right]} + \varepsilon_i \quad (7)$$

Em que: \overline{HDC}_i = altura média das árvores dominantes e codominantes da *i-ésima* unidade amostral (m); I_i = idade da *i-ésima* unidade amostral (anos); \exp = base do logaritmo neperiano; β_s = parâmetros a serem estimados; ε_i = erro aleatório.

O método utilizado para construção das curvas de índice de sítio foi o método da curva guia. A idade de referência I_{ref} é de 7 anos, definida pela empresa onde os dados foram coletados.

Quando $I_i = I_{ref} \Rightarrow \overline{HDC}_i = S$, equação (8).

$$\overline{HDC}_{2_i} = \hat{S}_i = \frac{\hat{\beta}_0}{1 + \exp\left[\frac{\hat{\beta}_1 - I_{ref}}{\hat{\beta}_2}\right]} + \varepsilon_i \quad (8)$$

Isolando o parâmetro $\hat{\beta}_0$ (assíntota) do modelo (7), assume que $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ será constante para todos os sítios, permitindo a construção de curvas de índice de sítio anamórficas, equação (9).

$$\hat{\beta}_0 = \overline{HDC}_{1_i} \left[1 + \exp\left(\frac{\hat{\beta}_1 - I_i}{\hat{\beta}_2}\right) \right] \quad (9)$$

Em que: \overline{HDC}_{1_i} = altura média das árvores dominantes e codominantes da *i-ésima* unidade amostral (m); $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ = parâmetros estimados do modelo (7); I_i = idade da *i-ésima* unidade amostral (anos).

Substituindo a expressão (9) em (8), tem-se a estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes nas diferentes idades e índices de sítios, considerando a idade de referência definida, equação (10).

$$\overline{HDC}_{2_i} = \hat{S}_i = \frac{\overline{HDC}_{1_i} * 1 + \exp\left[\frac{\hat{\beta}_1 - I_i}{\hat{\beta}_2}\right]}{1 + \exp\left[\frac{\hat{\beta}_1 - I_{ref}}{\hat{\beta}_2}\right]} \quad (10)$$

Em que: \overline{HDC}_{2_i} = estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes na idade de referência da *i-ésima* unidade amostral (m); \hat{S}_i = estimativa do índice de sítio da *i-ésima* unidade amostral; I_{ref} = idade de referência (7 anos).

A partir dos valores de \overline{HDC}_{2_i} estimados na idade de referência, e utilizando uma amplitude definida é possível definir classes de índice de sítio. Definida as classes de índice de sítio, o próximo passo é estimar o parâmetro β_{0_j} para cada classe de sítio, equação (11).

$$\beta_{0_j} = classe_j \cdot 1 + \left[\exp \frac{\hat{\beta}_1 - I_{ref}}{\hat{\beta}_2} \right] \quad (11)$$

Em que: β_{0_j} = parâmetro estimado da *j-ésima* classe de sítio; $classe_j$ = valor da *j-ésima* classe de sítio (m).

Estimados os valores de $\hat{\beta}_{0_j}$ para cada classe de sítio, é obtida a expressão que propiciará a estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes para as várias idades vinculadas a qualquer classe de sítio, equação (12).

$$\overline{HDC}_{i_j} = \frac{\hat{\beta}_{0_j}}{1 + \exp\left[\frac{\hat{\beta}_1 - I_i}{\hat{\beta}_2}\right]} \quad (12)$$

Em que: \overline{HDC}_{i_j} = estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes da *i-ésima* unidade amostral vinculada a *j-ésima* classe de sítio.

Na tabela 11 é apresentado os limites das classes de sítio.

Tabela 11 Limite das classes de sítio para o modelo logístico

Classe	Limite inferior (m)	Limite superior (m)
I	33,1	37
II	29,1	33
III	25	29

Após a definição das classes de sítio foram plotadas as curvas de índice de sítio, figura (4). Nota-se que a altura média das árvores dominantes e codominantes estão, em maior frequência, nos sítios I e II.

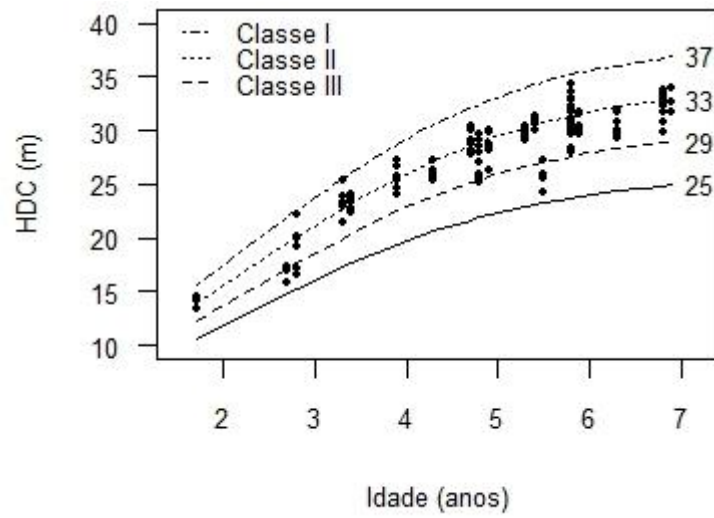


Figura 4 Curvas de índice de sítio para clones de eucalipto na empresa Anglo American, Catalão/Ouvidor – GO

4 CONCLUSÕES

A utilização de modelos não lineares para estimativa da relação hipsométrica e classificação de sítio mostrou-se superior em todas as estatísticas analisadas. Estes modelos são preferíveis aos modelos lineares, pois produzem estimativas de alta precisão, são parcimoniosos, seus parâmetros são interpretáveis, além da sua ampla aplicabilidade em qualquer base de dados de origem florestal.

Os modelos logísticos de quatro e três parâmetros foram os mais precisos para as estimativas da relação hipsométrica e do crescimento em altura média das árvores dominantes e codominantes para clones de eucalipto, respectivamente.

A utilização da técnica de inclusão de covariáveis melhorou, significativamente, a precisão na estimativa da relação hipsométrica, destacando a sua importância e potencial na utilização em estudos de crescimento e produtividade.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, S. P. C. E. **Uma nova metodologia de avaliação do crescimento e da produção de *Eucalyptus* sp clonal para fins energéticos**. 2010. 103 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.

GUIMARÃES, M. A. M. et al. Height-diameter models in forestry with inclusion of covariates. **Cerne**, Lavras, v. 15, n. 3, p. 313-321, 2009.

MENDONÇA, A. R. D. et al. Modelos hipsométricos e de crescimento em altura das árvores dominantes e codominantes para *Pinus caribaea* var . *hondurensis*. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, v. 39, n. 90, p. 151-160, 2011.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-Plus**. New York: Springer-Verlag, 2000. 528 p.

SAKAMOTO, Y.; ISHIGURO, M.; KITAGAWA, G. **Akaike information criterion statistics**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. 290 p.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Haward, v. 6, p. 461-464, 1978.

CAPÍTULO 3 Modelagem do crescimento e da produção em área basal fundamentada no uso de equações diferenciais

RESUMO

Objetivou-se neste estudo aplicar a técnica de equações diferenciais em modelos lineares e não lineares com adição de covariáveis, para modelagem do crescimento e da produção de clones de eucalipto. Foram escolhidos três modelos, sendo um não linear e dois lineares para a modelagem do crescimento e da produção em área basal. Para a modelagem do crescimento e da produção em volume foram ajustados os modelos linear de Clutter e o não linear logístico de três parâmetros. Para os modelos lineares e não lineares foi utilizado o método de inclusão de covariáveis, visando obter melhor precisão nas estimativas. A seleção e a qualidade de ajuste dos modelos se deram considerando o erro padrão percentual $[S_{yx} \ %]$, critério de informação de Akaike AIC , critério de informação Bayesiano BIC e no teste de razão da máxima verossimilhança $TRMV$, além do gráfico de resíduos. Para a manipulação, ajuste e processamento dos dados foi utilizado o *software* R. A aplicação da técnica de equações diferenciais, para estimativa do crescimento e da produção em área basal, permitiu a obtenção de resultados condizentes e precisos até a idade de 7 anos. Quanto à estimativa da produção volumétrica, o modelo logístico de três parâmetros foi preciso na estimativa, até a idade de 7 anos.

Palavras-chave: Eucalipto. Crescimento e produção. Equações diferenciais. covariáveis.

ABSTRACT

This chapter sought to apply the technique of differential equations in linear and nonlinear models with added covariates for modeling the growth and yield of eucalyptus clones. Three models were chosen, one nonlinear and two linear for the growth and production in basal area modeling. For the modeling of growth and volume production it was adjusted the Clutter linear model and the logistic model with 3 parameters. For linear and non-linear models it was used the method of covariates inclusion in order to obtain better precision in estimates. The selection of the models and the goodness of fit of the models is given based on the standard error $[S_{yx} \ %]$, Akaike information criterion AIC , Bayesian information criterion BIC , test the maximum likelihood $TRMV$, in addition to the graphical analysis of the residuals. For handling, fitting and processing the data it was used the R software. The application of the differential equations technique for estimating growth and basal area production allowed to obtain consistent and precise results up to the age of 7 years. Concerning the estimation of volumetric production, the three-parameter logistic model was accurate in estimating, until the age of 7 years.

Key Words: Eucalyptus. Growth and yield. Differential equations. Covariates.

1 INTRODUÇÃO

Conhecer o crescimento e a produção de um povoamento florestal é um dos principais desafios enfrentados pelos engenheiros florestais. O crescimento e a produção em área basal e volume são características frequentemente estimadas e que merecem atenção em toda parte do ciclo do povoamento. Além de fornecer uma medida quantitativa e qualitativa da dinâmica de desenvolvimento da floresta, possibilita um controle mais efetivo do planejamento, culminando em decisões eficazes e sólidas do empreendimento florestal.

Em virtude da necessidade e da importância de conhecer o crescimento e a produção de um povoamento, técnicas modernas de quantificação estão sendo desenvolvidas para obtenção de estimativas mais precisas de variáveis de interesse. Nesse contexto, Schumacher e Clutter foram os responsáveis por um dos grandes avanços no processo de modelagem, solucionando o problema da incompatibilidade entre os modelos de crescimento e produção pela aplicação de técnicas matemáticas – integral e derivada.

Além de sua compatibilidade, os modelos de crescimento e produção podem ser obtidos por equações diferenciais. Segundo Zill (2003), uma equação que contenha as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial. A grande vantagem do uso desta técnica está justamente na compatibilidade entre os modelos, além de garantir consistência das estimativas, ou seja, quando a idade prognosticada for igual à idade predita, a produção projetada será igual a produção predita $I_2 = I_1 \therefore G_2 = G_1$.

Desse modo, uma série de trabalhos, seguindo esta tendência, vêm sendo desenvolvidos, como em Burkhart (1962), Clutter (1963), Mendes (2006) e Mendonça (2010).

Além disso, com os avanços tecnológicos, o aprimoramento de computadores e desenvolvimento de *hardwares* e *softwares* mais modernos, proporcionou uma evolução no uso de modelos estatísticos. O grande avanço ocorreu no processo de estimar uma variável do povoamento a partir de modelos não lineares. A aplicação destes modelos apresenta uma leve dificuldade, pois é necessário conhecer os valores dos parâmetros iniciais para o processo de convergência, o que torna complexo para a maioria dos profissionais.

Além do uso de modelos não lineares, outras técnicas envolvendo a manipulação destes modelos vêm sendo utilizadas. A adição de variáveis do povoamento que explicam a variabilidade do que se deseja conhecer é um aprimoramento da modelagem. Essa técnica, também chamada de modelagem com adição de covariáveis, é utilizada com o intuito de produzir estimativas com alto grau de precisão.

Nesse contexto, objetivou-se neste estudo aplicar a técnica de equações diferenciais em modelos lineares e não lineares com adição de covariáveis, para modelagem do crescimento e da produção em clones de eucalipto.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Caracterização da área de estudo e coleta dos dados

Os dados para a realização do estudo são provenientes de um plantio clonal de eucalipto, de responsabilidade da empresa Copebrás, pertencente ao grupo Anglo American, localizada nos municípios de Catalão e Ouidor, região sudeste do estado de Goiás, Brasil. O clima da região enquadra-se no tipo Aw, que, de acordo com a classificação climática de Köppen, apresenta dois períodos distintos: um chuvoso e outro seco. Com temperatura média anual atingindo 22°C e precipitação média anual, com valores entre 1200 e 1800 mm.

A área total utilizada para o estudo foi de, aproximadamente, 1000 hectares. O método de amostragem foi a casual simples (ACS). As unidades amostrais possuem formato retangular de área variável com, aproximadamente, 450 m². Para o estudo da estimativa volumétrica, modelagem do crescimento e da produção em área basal e volume, foram utilizados dados de cubagem medidos em 2012 e dados de 35 parcelas temporárias e 55 parcelas permanentes medidas em 2010 e 2012, distribuídas em diferentes idades e locais.

Considerando os dados coletados, DAP , H_t e diâmetro a várias posições de h_{ij} (d_{ij}), procedeu-se à divisão das árvores em classes diamétrica e de altura, além de uma análise descritiva relacionada às variáveis do povoamento. A metodologia de cubagem utilizada consistiu na medição dos diâmetros nas posições de DAP , 0.1, 0.5, 1, 2 m, e assim por diante, a cada 2 m, até o diâmetro mínimo de 4 cm.

2.2 Modelagem da relação hipsométrica

Para a modelagem da relação hipsométrica, utilizou-se o modelo não linear logístico de quatro parâmetros com inclusão de covariáveis, conforme Capítulo 2, modelo (6).

$$H_{t_i} = \beta_0 + \frac{\beta_1 - \beta_0}{1 + \exp\left[\frac{\beta_2 - DAP_i}{\beta_3}\right]} + \varepsilon_i \quad (1)$$

Em que: $\beta_0 = \beta_{00} + \beta_{01}I + \beta_{02}S + \beta_{03}G$; $\beta_1 = \beta_{10} + \beta_{11}I + \beta_{12}S$; $\beta_2 = \beta_{20} + \beta_{21}I + \beta_{22}S + \beta_{23}G$; $\beta_3 = \beta_{30} + \beta_{31}I + \beta_{32}S + \beta_{33}G$; $I =$ idade do povoamento (anos); $S =$ índice de sítio (m); $G =$ área basal por hectare ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$).

Esse modelo é composto pela assíntota horizontal superior e inferior, ponto de inflexão e ponto de escala. A assíntota horizontal superior e inferior β_0 e β_1 expressa a taxa média de máximo e mínimo crescimento, respectivamente, dado pelo eixo Y. O parâmetro β_2 representa o ponto de inflexão, dado pelo eixo X. O parâmetro de escala β_3 representa a distância do eixo X, aproximadamente, 75% da distância entre o parâmetro β_0 e β_1 (PINHEIRO; BATES, 2000).

2.3 Classificação de sítio

Para a classificação de sítio foi utilizado o modelo não linear logístico de três parâmetros, conforme Capítulo 2, modelo (7).

$$\overline{HDC}_{i_j} = \frac{\hat{\beta}_{0_j}}{1 + \exp\left[\frac{\hat{\beta}_1 - I_i}{\hat{\beta}_2}\right]} \quad (2)$$

Em que: \overline{HDC}_{i_j} = estimativa da altura média das árvores dominantes e codominantes da *i-ésima* unidade amostral vinculada a *j-ésima* classe de sítio; $\hat{\beta}_{0_j}$ = parâmetro estimado da *j-ésima* classe de sítio; $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ = parâmetros estimados; I_i = idade da *i-ésima* unidade amostral (anos); \exp = base do logaritmo neperiano.

Este modelo retrata o comportamento biológico de crescimento, sendo seus parâmetros, interpretáveis. O modelo logístico é composto pela assíntota horizontal, ponto de inflexão e ponto de escala. A assíntota refere-se ao crescimento médio máximo β_0 , dado pelo eixo Y. O ponto de inflexão expressa a taxa média de máximo crescimento β_1 , dado pelo eixo X. O parâmetro de escala β_2 representa a distância do eixo X entre o ponto de inflexão e, aproximadamente, 73% do máximo crescimento médio (PINHEIRO; BATES, 2000).

2.4 Estimativa do volume de árvores individuais

Para estimativa do volume individual de árvores, foi utilizado o modelo não linear de Schumacher e Hall (1933), conforme equação (3).

$$V_{t_i} = \beta_0 DAP_i^{\beta_1} H_{t_i}^{\beta_2} + \varepsilon_i \quad (3)$$

Em que: V_{i_i} = volume total da *i-ésima* árvore cubada (m^3); DAP_i = diâmetro a 1,30 m de altura da *i-ésima* árvore cubada (cm); H_{i_i} = altura total da *i-ésima* árvore cubada (m); β_s = parâmetros a serem estimados; ε_i = erro aleatório.

2.5 Modelagem do crescimento e produção em área basal

Para a modelagem do crescimento e produção em área basal, utilizou-se a teoria de equações diferenciais, como nos trabalhos de Mendes et al. (2006) e Mendonça (2010). Foram escolhidos dois modelos, sendo o primeiro deles sugerido por Ratkowsky (1989). O primeiro é composto por dois parâmetros e o segundo por três parâmetros, apresentados na sua forma original pelas equações (4 e 5).

$$\frac{\partial G}{\partial I} = \beta_0 I - \beta_1 \exp -\beta_0 I \quad (4)$$

$$\frac{\partial G}{\partial I} = \beta_0 + \beta_1 I + \beta_2 I^2 \quad (5)$$

Em que: G = área basal do *i-ésimo* povoamento ($m^2 \text{ ha}^{-1}$); I = idade do povoamento (anos); β_s = parâmetros a serem estimados.

As equações (4 e 5) representam a curva de crescimento do povoamento, as quais apresentam tendência semelhante ao incremento corrente anual (*ICA*). Para a obtenção da função de produção, em área basal, as equações (4 e 5) foram integradas em função da idade, originando os modelos (6 e 7).

$$\int \partial G = \int \beta_0 I - \beta_1 \exp -\beta_0 I \partial I + C$$

$$G = - \left[\exp -\beta_0 I \beta_0 I + \exp -\beta_0 I - \exp -\beta_0 I \beta_1 \right] \beta_0^{-1} \quad (6)$$

$$\int \partial G = \int \beta_0 + \beta_1 I + \beta_2 I^2 \partial I + C$$

$$G = \beta_0 I + \beta_1 I^2 2^{-1} + \beta_2 I^3 3^{-1} \quad (7)$$

Em que: C = constante arbitrária da integração.

Após integrar as funções de crescimento para obtenção dos modelos de produção em área basal, objetivou-se estabelecer um sistema de equações para a modelagem da projeção. Assim, integraram-se as equações (4 e 5) nos intervalos I_1 e I_2 , resultando nas funções (8 e 9).

$$\int_{G_1}^{G_2} \partial G = \int_{I_1}^{I_2} \beta_0 I - \beta_1 \exp -\beta_0 I \partial I + C$$

$$G_2 - G_1 = \left\{ \left[\begin{array}{l} -\exp -\beta_0 I_2 \beta_0 I_2 - \exp -\beta_0 I_2 + \exp -\beta_0 I_2 \beta_1 \\ + \exp -\beta_0 I_1 \beta_0 I_1 + \exp -\beta_0 I_1 - \exp -\beta_0 I_1 \beta_1 \end{array} \right] \beta_0^{-1} \right\} \quad (8)$$

$$\int_{G_1}^{G_2} \partial G = \int_{I_1}^{I_2} \beta_0 + \beta_1 I + \beta_2 I^2 \partial I + C$$

$$G_2 - G_1 = \left[\beta_0 I_2 + \beta_1 I_2^2 2^{-1} + \beta_2 I_2^3 3^{-1} - \beta_0 I_1 - \beta_1 I_1^2 2^{-1} - \beta_2 I_1^3 3^{-1} \right] \quad (9)$$

Para obter o modelo de projeção da área basal G_2 , a G_2 foi isolada, e os parâmetros dos modelos (8) e (9) foram decompostos para inclusão das covariáveis sítio e número de árvores por hectare, resultando nos modelos 10 (Modelo I) e 11 (Modelo II).

$$G_2 = G_1 + \left\{ \begin{array}{l} -\exp[-\beta_{00} + \beta_{01}S I_2] \beta_{00} + \beta_{01}S I_2 \\ -\exp[-\beta_{00} + \beta_{01}S I_2] \\ +\exp[-\beta_{00} + \beta_{01}S I_2] \beta_{10} + \beta_{11}S \\ +\exp[-\beta_{00} + \beta_{01}S I_1] \beta_{00} + \beta_{01}S I_1 \\ +\exp[-\beta_{00} + \beta_{01}S I_1] - \exp[-\beta_{00} + \beta_{01}S I_1] \beta_{10} \\ +\beta_{11}S \end{array} \right\} \beta_{00} + \beta_{01}S^{-1} + \varepsilon_i \quad (10)$$

$$G_2 = G_1 + \left\{ \begin{array}{l} \beta_{00} + \beta_{01}N I_2 + [\beta_{10} + \beta_{11}N I_2^2] 2^{-1} \\ + [\beta_{20} + \beta_{21}S I_2^3] 3^{-1} - \beta_{00} + \beta_{01}N I_1 \\ - [\beta_{10} + \beta_{11}N I_1^2] 2^{-1} - [\beta_{20} + \beta_{21}S I_1^3] 3^{-1} \end{array} \right\} + \varepsilon_i \quad (11)$$

Em que: G_2 = área basal na idade I_2 do *i-ésimo* povoamento ($m^2 ha^{-1}$); G_1 = área basal na idade I_1 do *i-ésimo* povoamento ($m^2 ha^{-1}$); S = índice de sítio (m); N = número de árvores por hectare (N/ha); β_s = parâmetros a serem estimados; ε_i = erro aleatório.

2.6 Modelagem do crescimento e produção em volume

Para a modelagem do crescimento e produção em volume foram utilizados dois modelos. O primeiro trata-se do modelo de Clutter, o qual é bastante utilizado para o processo de projeção do crescimento e da produção em

área basal e volume. É composto por um sistema de equações consistentes capazes de prever com alta precisão o volume atual e futuro, a taxa de crescimento volumétrico instantâneo, a área basal futura e a taxa de crescimento instantânea da área basal (CLUTTER et al., 1983).

Esse sistema de equações iniciou-se com uma função desenvolvida por Schumacher e Coile (1960 citados por CLUTTER et al., 1983), para a modelagem do crescimento em área basal, equação (12).

$$\ln G = \alpha_0 + \alpha_1 S + \alpha_2 \left(\frac{1}{I} \right) + \alpha_3 \left(\frac{1}{I} \right) \ln G_2 + \alpha_4 \left(\frac{1}{I} \right) S \quad (12)$$

Para obter a taxa de crescimento em área basal, correspondente a uma determinada idade, é aplicada a diferencial, equação (13).

$$\frac{\partial G}{\partial I} = \left(\frac{1}{I} \right) G \alpha_0 + \alpha_1 S - \ln G \quad (13)$$

Objetivando estabelecer um sistema de equações, para a modelagem da projeção em área basal, a equação (13) será integrada nos intervalos I_1 e I_2 , resultando no modelo (14).

$$\int_{G_1}^{G_2} G = \int_{I_1}^{I_2} \left(\frac{1}{I} \right) G \alpha_0 + \alpha_1 S - \ln G$$

$$\ln G_2 = \ln G_1 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_0 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \alpha_1 \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S + \varepsilon_1 \quad (14)$$

A função de projeção da área basal (14), juntamente com o modelo volumétrico desenvolvido por Schumacher (1939 citado por CLUTTER et al., 1983), equação (15), são importantes para o estabelecimento de um sistema capaz de estimar (G_2).

$$\ln V_2 = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 \left(\frac{1}{I_2} \right) + \beta_3 \ln G_2 + \varepsilon_2 \quad (15)$$

O sistema de Clutter é concretizado quando é incorporada na equação (15) a função (14), originando o modelo (16).

$$\ln V_2 = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 \left(\frac{1}{I_2} \right) + \beta_{3*} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \ln G_1 + \beta_{4*} \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) + \beta_{5*} \left(1 - \frac{I_1}{I_2} \right) S + \varepsilon_i \quad (16)$$

Em que: V_2 = volume total na idade I_2 do *i-ésimo* povoamento ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$); \ln = logaritmo neperiano; β_s = parâmetros do modelo; S = índice de sítio (m); I_1 e I_2 = idades de medição inicial e final do *i-ésimo* povoamento, respectivamente (anos); $\hat{\beta}_{4*} = \hat{\beta}_{3*} \hat{\alpha}_0$; $\hat{\beta}_{5*} = \hat{\beta}_{3*} \hat{\alpha}_1$; $\varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (erro aleatório).

O segundo modelo utilizado para a modelagem do crescimento e da produção volumétrica foi o modelo sigmoidal logístico. Trata-se de um modelo bastante utilizado para o processo de estimação de variáveis de difícil obtenção no meio florestal, pois além de contribuir com estimativas precisas da variável de interesse, é um modelo não linear, ou seja, retrata o comportamento biológico de crescimento, favorecendo a interpretação de seus parâmetros.

O modelo logístico é composto pela assíntota horizontal, ponto de inflexão e ponto de escala. A assíntota refere-se ao crescimento médio máximo β_0 , dado pelo eixo Y. O ponto de inflexão expressa a taxa média de máximo crescimento β_1 , dado pelo eixo X. O parâmetro de escala representa a distância do eixo X entre o ponto de inflexão e, aproximadamente, 73% do máximo crescimento médio (PINHEIRO; BATES, 2000). O modelo é dado pela equação (17).

$$V_2 = \frac{\beta_0}{1 + \exp\left[\frac{\beta_1 - I_2}{\beta_2}\right]} + \varepsilon_i \quad (17)$$

Partindo do pressuposto de que outras variáveis contribuem para estimativa volumétrica, os parâmetros do modelo logístico foram decompostos e incluídas covariáveis, índice de sítio, área basal e densidade para melhoria da precisão do modelo. O modelo completo é representado pela equação (18).

$$V_2 = \frac{\beta_{00} + \beta_{01}S}{1 + \exp\left[\frac{\beta_{10} + \beta_{11}G_2 + \beta_{12}N - I_2}{\beta_2}\right]} + \varepsilon_i \quad (18)$$

Em que: V_2 = volume total na idade I_2 do *i-ésimo* povoamento ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$); S = índice de sítio (m); G_2 = área basal projetada na idade I_2 do *i-ésimo* povoamento ($\text{m}^2 \text{ha}^{-1}$); N = número de árvores por hectare do *i-ésimo* povoamento (N/ha); β_s = parâmetros a serem estimados; ε_i = erro aleatório.

2.7 Avaliação da qualidade de ajuste dos modelos

Para avaliação dos modelos, utilizou-se a análise gráfica dos resíduos, para verificação das suposições básicas de análise de regressão, juntamente com algumas medidas de acurácia que servirá de subsídio na comparação dos modelos. Os modelos ajustados tiveram sua precisão avaliada, por meio do erro padrão residual S_{yx} e percentual $[S_{yx} \ %]$, critério de informação de Akaike AIC , Bayesiano BIC , e pelo teste da razão da máxima verossimilhança $TRMV$.

2.7.1 Erro padrão residual e percentual

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Y - \hat{Y}^2}{n - p}} \quad (19)$$

$$S_{yx} \ \% = \frac{S_{yx}}{\bar{Y}} 100 \quad (20)$$

Em que: S_{yx} = erro padrão residual (m); $S_{yx} \ %$ = erro padrão relativo (%); Y = valor observado da variável dependente; \hat{Y} = valor estimado da variável dependente pelo modelo; n = número de observações; p = número de parâmetros.

2.7.2 Critério de informação de Akaike (AIC) (SAKAMOTO; ISHIGURO; KITAGAWA, 1986)

$$AIC = -2 \ln mv + 2p \quad (21)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano; p = número de parâmetros do modelo.

2.7.3 Critério de informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978)

$$BIC = -2 \ln mv + p \ln n \quad (22)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano; p = número de parâmetros do modelo; n = número de observações.

2.7.4 Teste da razão da máxima verossimilhança (TRMV)

$$TRMV = 2 \left[\ln mv_2 - \ln mv_1 \right] \quad (23)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano.

Em relação aos critérios, nota-se que quanto menores os valores de AIC e BIC melhor o modelo ajustado, pois penalizam modelos com número excessivo de parâmetros, selecionando modelos mais parcimoniosos. O teste $TRMV$ é uma ferramenta de comparação de modelos aninhados dado pela diferença entre os valores máximos da função de verossimilhança dos modelos.

Este valor é testado pela estatística χ^2 . Se o valor de *TRMV* for significativo ao nível α de probabilidade, o modelo com maior valor de máxima verossimilhança apresenta maior precisão.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Análise exploratória dos dados

Na tabela 1 são apresentadas as frequências de diâmetro e altura, e uma análise descritiva relacionada às variáveis do povoamento.

Tabela 1 Frequências de diâmetro e altura das árvores-amostra presentes nas unidades amostrais e estatísticas descritivas do povoamento

Classe DAP	Classe de Altura Total						Total
	9,5	14,5	19,5	24,5	29,5	34,5	
5,5	15	6	--	--	--	--	21
8,5	6	32	30	--	--	--	68
11,5	7	72	77	68	4	--	228
14,5	--	32	106	300	122	2	562
17,5	--	3	22	299	478	40	842
20,5	--	--	--	35	190	64	289
23,5	--	--	--	1	69	29	99
26,5	--	--	--	--	21	12	33
29,5	--	--	--	--	1	2	3
Total	28	145	235	703	885	149	2145

Estatísticas Descritivas Relacionadas às Variáveis do Povoamento					
Variável do Povoamento	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	CV (%)
Idade (anos)	1,70	6,90	--	--	25,63
N (árvores/ha)	891	1612	1189	1191	7,15
S (m)	27,00	39,00	33,86	33,00	6,46
\overline{Dq} (cm)	10,16	18,53	15,50	15,72	8,95
G (m ² ha ⁻¹)	10,18	34,74	22,58	22,99	17,37

A tabela 2 apresenta a relação das árvores que foram cubadas para o ajuste do modelo volumétrico de árvores individuais.

Tabela 2 Caracterização das árvores cubadas para o ajuste do modelo volumétrico de árvores individuais

Projeto	Talhão	Idade	Classe de Sítio	Sítio (m)	Classe Diamétrica					Total
					4 - 9	9 - 14	14 - 19	19 - 24	24 - 29	
Copebrás 9	3	2,8	II	33	2	3	3	--	--	8
Copebrás 7-B	1	3,9	II	33	2	3	3	--	--	8
Catalão 3-B	1	4,9	III	29	3	2	3	--	--	8
Catalão 3-B	2	4,9	I	37	3	3	2	4	--	12
Copebrás 30-B	3	5,5	II	33	2	2	1	1	--	6
Copebrás 30-B	2	5,6	II	33	--	2	1	1	--	4
Copebrás 30-A	4	6,0	I	37	1	1	1	2	--	5
Copebrás 30-A	5	6,0	I	37	2	--	2	1	--	5
Copebrás 28	2	6,4	II	33	--	--	--	--	4	4
Copebrás 28	4	6,4	II	33	2	3	2	3	--	10
Copebras 27	4	6,8	I	37	2	2	4	2	2	12
Copebrás 26	8	7,0	II	33	2	3	2	3	--	10
Total					21	24	24	17	6	92

3.2 Análise do modelo volumétrico de árvores individuais

Após o ajuste do modelo volumétrico foi possível a obtenção das estatísticas e dos parâmetros do modelo não linear de Schumacher e Hall (1933). De acordo com o teste “t”, nota-se que todos os parâmetros foram significativos a um nível de 5% de significância. Como critério estatístico, observa-se um erro padrão relativo de 6,55%, conforme tabela 3.

Tabela 3 Estatísticas de ajuste do modelo volumétrico e seus respectivos parâmetros estimados

Schumacher e Hall ($S_{yx} = 6,55\%$)				
Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_0	0,00002523	0,001	6,279	< 0,001
β_1	1,61300000	0,042	38,433	< 0,001
β_2	1,44800000	0,069	21,001	< 0,001

3.3 Análise dos modelos I, II e de Clutter para estimativa do crescimento e produção em área basal

Nas tabelas 4 e 5 são apresentados os valores dos parâmetros estimados e as estatísticas de ajuste para os modelos I, II e de Clutter. Nota-se que todos os parâmetros foram significativos a um nível de 5% de significância.

Tabela 4 Parâmetros estimados dos modelos I, II e de Clutter para estimativa da área basal

Modelo I - Completo ($S_{yx} = 4,37\%$)					
Parâmetro	Covariante Associada	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_{00}	Intercepto	-1,070149	0,350	-3,057	0,004
β_{01}	<i>S</i>	0,024840	0,011	2,336	0,024
β_{10}	Intercepto	-5,041490	0,813	-6,198	< 0,001
β_{11}	<i>S</i>	0,101031	0,025	4,058	< 0,001
Modelo II - Completo ($S_{yx} = 3,39\%$)					
β_{00}	Intercepto	40,94725	8,669	4,724	< 0,001
β_{01}	<i>N</i>	-0,01305	0,006	-2,031	0,047
β_{10}	Intercepto	-12,85824	2,163	-5,946	< 0,001
β_{11}	<i>N</i>	0,00270	0,001	2,123	0,039
β_{20}	Intercepto	1,00481	0,141	7,124	< 0,001
β_{21}	<i>S</i>	-0,00206	0,001	-2,028	0,048
Clutter (14) - ($S_{yx} = 4,06\%$)					
α_0	--	2,826084	10,759	0,262	< 0,0001
α_1	--	0,016976	0,309	0,055	0,046

Em que: $\alpha_0 = \hat{\beta}_{4*} / \hat{\beta}_{3*}$; $\alpha_1 = \hat{\beta}_{5*} / \hat{\beta}_{3*}$.

Tomando como base apenas a estatística $[S_{yx} \ %]$, é possível afirmar que ambos os modelos podem ser utilizados para projeção da área basal G_2 na idade I_2 . Na tabela 5 verificam-se as estatísticas comparativas de ajuste para os modelos (I) e (II).

Observa-se uma superioridade dos modelos completos pela adição de covariáveis em relação aos seus respectivos modelos originais. Essa

superioridade fortalece a ideia de que as variáveis índice de sítio e densidade influenciam, significativamente, a relação $G \sim I$. Tal fato pode ser confirmado pelo alto grau de significância dos parâmetros $TRMV$'s, indicando uma melhora do modelo e a redução das estatísticas $[S_{yx} \text{ m}^2\text{ha}^{-1}]$ e $[S_{yx} \text{ \%}]$.

Tabela 5 Análise estatística comparativa de ajuste dos modelos originais e com inclusão de covariável para estimativa da área basal

Modelo	<i>G.L.</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>Lnmv</i>	<i>TRMV</i>	p-valor
Modelo I Original	52	179,794	185,760	-86,897		
Mod. I Covariável	50	164,722	174,667	-77,361	19,072	< 0,0001
Modelo II Original	51	144,655	152,611	-68,328		
Mod. II Covariável	48	139,178	152,100	-62,589	11,478	< 0,0001

Estatística de erro padrão residual e percentual		
Modelo	$S_{yx} \text{ m}^2\text{ha}^{-1}$	$S_{yx} \text{ \%}$
Modelo I Original	1,23	5,11
Modelo I Covariável	1,05	4,37
Modelo II Original	0,88	3,66
Modelo II Covariável	0,82	3,39

A qualidade de ajuste dos modelos é, também, verificada pela análise gráfica dos resíduos, dada pelas figuras 1 (a), e 1 (b).

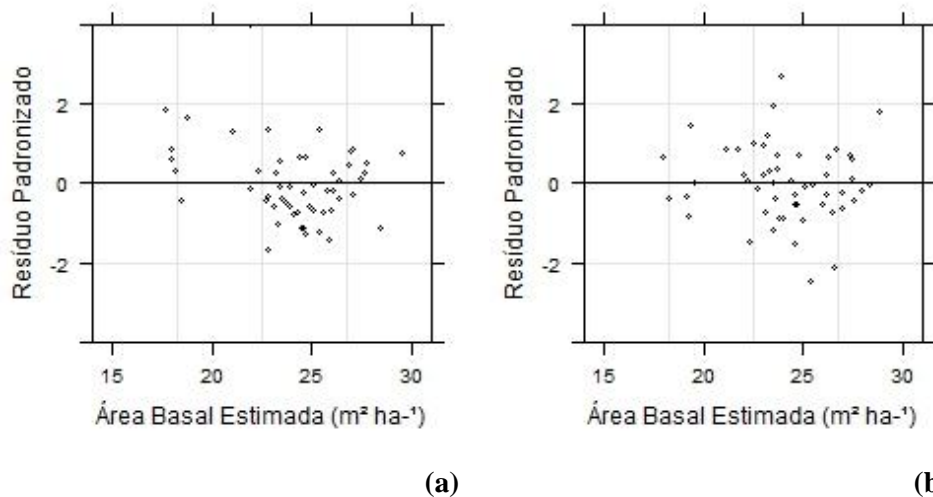


Figura 1 (a) Gráfico de resíduo para o modelo com inclusão de covariáveis utilizado na estimativa da produtividade em área basal – Modelo (I); Gráfico de resíduo para o modelo com inclusão de covariáveis utilizado na estimativa da produtividade em área basal – Modelo (II)

Na figura 1 (a) observa-se uma boa distribuição dos resíduos a partir de 22 m² ha⁻¹. Nos baixos valores de produtividade em área basal é possível verificar uma tendência de subestimativa dessa variável.

Após a análise da figura 1 (b), observa-se uma melhora significativa de dispersão dos resíduos em comparação com a figura 1 (a). A análise visual da figura 1 (b) corrobora com os resultados estatísticos encontrados na tabela 5. Nestes resultados é possível verificar uma melhor precisão do modelo (II) em relação ao modelo (I).

3.4 Aplicação do procedimento de consistência para estimativa do crescimento e da produção em área basal

A consistência dos modelos de produção em área basal é obtida, quando as expressões (10) e (11) geram estimativas idênticas de produção, por exemplo, quando é realizada a projeção de 2 para 4 anos e de 3 para 4 anos.

Este princípio é demonstrado pelos modelos I e II. Considerando como exemplo uma unidade amostral com as seguintes características: $S = 33$ m; $G_1 = 12,97$ m² ha⁻¹; $G_2 = 20,50$; $I_1 = 2,8$ anos; $I_2 = 4,8$ anos; $N = 1046$ árvores/ha. Deseja-se projetar a área basal da idade de 2,8 para 4,8 anos e da idade de 3,8 para 4,8 anos, com o intuito de demonstrar a consistência.

3.4.1 Modelo I – Projeção do crescimento de 2,8 para 4,8 anos e de 3,8 para 4,8 anos

$$\begin{aligned}
 G_2 = G_1 + & \left\{ \frac{- \left[\exp^{-\beta_{00} + \beta_{01} S} I_2 \quad \beta_{00} + \beta_{01} S \quad I_2 \right] - \left[\exp^{-\beta_{00} + \beta_{01} S} I_2 \right]}{\beta_{00} + \beta_{01} S} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{\left[\exp^{-\beta_{00} + \beta_{01} S} I_2 \quad \beta_{10} + \beta_{11} S \right]}{\beta_{00} + \beta_{01} S} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{\left[\exp^{-\beta_{00} + \beta_{01} S} I_1 \quad \beta_{00} + \beta_{01} S \quad I_1 \right]}{\beta_{00} + \beta_{01} S} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{\left[\exp^{-\beta_{00} + \beta_{01} S} I_1 \right] - \left[\exp^{-\beta_{00} + \beta_{01} S} I_1 \quad \left(\beta_{10} + \beta_{11} S \right) \right]}{\left(\beta_{00} + \beta_{01} S \right)} \right\}
 \end{aligned}$$

Tabela 6 Consistência verificada para o modelo I

Idades de Projeção (anos)	Sítio (m)	Produção (m ² ha ⁻¹)
De 2,8 para 4,8 anos	33	18,72
De 2,8 para 3,8 anos	33	16,02
De 3,8 para 4,8 anos	33	18,72

3.4.2 Modelo II – Projeção do crescimento de 2,8 para 4,8 anos e de 3,8 para 4,8 anos

$$G_2 = G_1 + \left[\beta_{00} + \beta_{01}N I_2 + \frac{\beta_{10} + \beta_{11}N I_2^2}{2} + \frac{[\beta_{20} + \beta_{21}S I_2^3]}{3} \right] + \left[-\beta_{00} + \beta_{01}N I_1 - \frac{\beta_{10} + \beta_{11}N I_1^2}{2} - \frac{[\beta_{20} + \beta_{21}S I_1^3]}{3} \right]$$

Tabela 7 Consistência verificada para o modelo II

Idades de Projeção (anos)	Sítio (m)	Produção (m ² ha ⁻¹)
De 2,8 para 4,8 anos	33	19,24
De 2,8 para 3,8 anos	33	17,55
De 3,8 para 4,8 anos	33	19,24

3.5 Comportamento do crescimento volumétrico e análise dos modelos de Clutter e logístico para estimativa do crescimento e produção em volume

Na figura 2 é apresentado o comportamento do crescimento volumétrico em função do tempo.

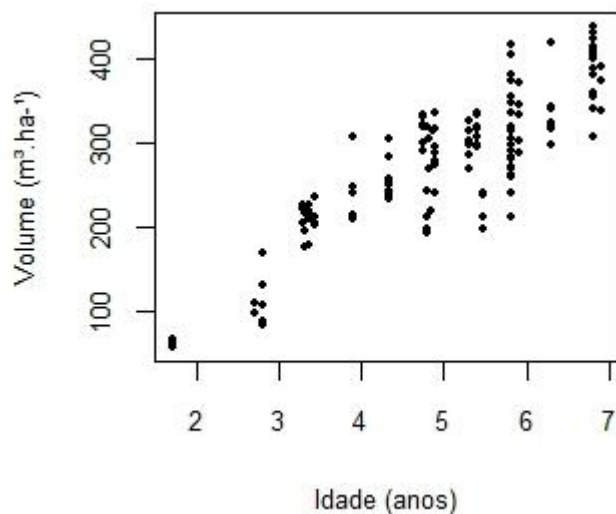


Figura 2 Comportamento do crescimento volumétrico em função da idade

Na tabela 5 são apresentadas as estatísticas de ajuste e a estimativa paramétrica para o modelo de Clutter e logístico. Observa-se que todos os parâmetros dos modelos foram significativos ($p < 0,05$). Com relação ao critério estatístico erro padrão relativo, nota-se uma superioridade do modelo logístico em comparação ao modelo de Clutter.

Tabela 8 Estatísticas de ajuste dos modelos de Clutter e logístico e seus respectivos parâmetros estimados

Clutter (16) – ($S_{yx} = 3,83\%$)					
Parâmetro	Covariante Associada	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_0	--	1,486264	0,113	13,146	< 0,001
β_1	--	0,015896	0,002	9,044	< 0,001
β_2	--	-2,326108	0,093	-24,858	< 0,001
β_{3_s}	--	1,306659	0,036	36,035	< 0,001
β_{4_s}	--	5,761092	0,268	21,474	< 0,001
β_{5_s}	--	-0,038817	0,007	-5,536	< 0,001
Modelo logístico 3 Parâmetros com Covariáveis ($S_{yx} = 3,21\%$)					
β_{00}	Intercepto	510,0076	41,258	12,361	< 0,001
β_{01}	S	2,6420	0,956	2,762	< 0,001
β_{10}	Intercepto	17,1966	1,108	15,526	< 0,001
β_{11}	G_2	-0,6344	0,048	-13,102	< 0,001
β_{12}	N	0,0024	0,007	3,997	< 0,001
β_2	--	5,4552	0,346	15,771	< 0,001

Nesse mesmo sentido, ao analisar as estatísticas de ajuste para o modelo logístico, considerando-o na sua forma original e com inclusão de covariáveis, nota-se uma melhora significativa do modelo com covariáveis. Essa superioridade fortalece a ideia de que as variáveis índice de sítio, área basal e densidade influenciam, significativamente, a relação $V \sim I$. Fato esse que pode ser confirmado pelo alto grau de significância do parâmetro $TRMV$, indicando uma melhora expressiva do modelo e a redução de, aproximadamente, 10% do erro padrão residual, tabela 9.

Tabela 9 Estatísticas de comparação entre o modelo logístico original, o modelo logístico completo e o modelo de Clutter

Modelo	<i>G.L.</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>Lnmv</i>	<i>TRMV</i>	p-valor
Original	159	1634,593	1646,944	-813,297		
Covariáveis	158	1201,764	1223,377	-593,882	438,83	< 0,0001

Estatística de erro padrão residual e percentual			
Modelo	S_{yx}	$m^3 ha^{-1}$	S_{yx} %
Original		36,99	12,34
Covariante		9,64	3,21
Clutter		11,50	3,83

A qualidade de ajuste para os modelos de Clutter e logístico completo é, também, verificada pela análise gráfica dos resíduos, dada pelas figuras 3 (a) e 3 (b).

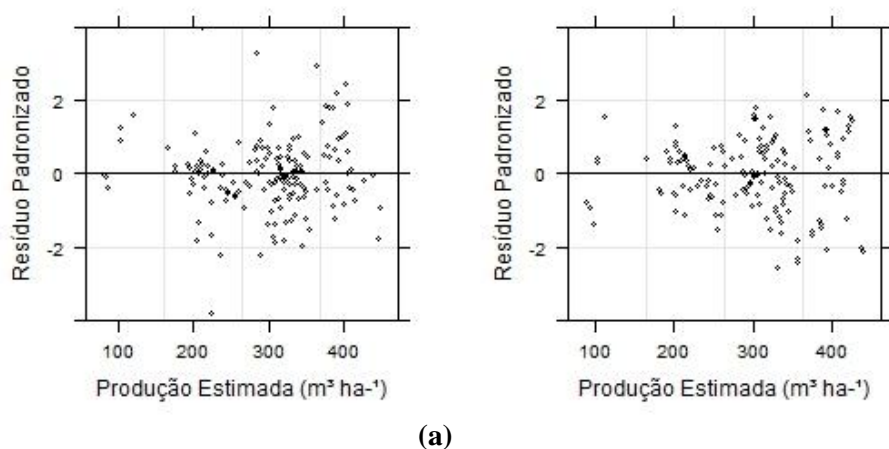


Figura 3 (a) Gráfico de resíduo para o modelo de Clutter utilizado na estimativa da produtividade em volume – Modelo (16); (b) Gráfico de resíduo para o modelo logístico com inclusão de covariáveis utilizado na estimativa da produtividade em volume – Modelo (18)

Analisando a figura 3 (a), é possível notar uma tendência de superestimava dos erros para os valores de produção em volume compreendidos entre 190 e 350 m³ ha⁻¹. Com relação à figura 3 (b), observa-se uma melhora na dispersão dos resíduos em comparação com a figura 3 (a). A análise visual da figura 3 (b) corrobora os resultados estatísticos encontrados na tabela 8. Nesses resultados observa-se uma vantagem do modelo logístico com inclusão de covariáveis em relação ao modelo de Clutter.

3.6 Aplicação do procedimento de compatibilidade para estimativa do crescimento e da produção volumétrica

Objetivando testar a compatibilidade do modelo logístico com adição de covariáveis, esse foi derivado, em função da idade, a fim de obter a função de crescimento em volume, resultando no modelo (24).

$$\frac{\partial V_i}{\partial I_i} = \beta_{00} + \beta_{01}S \left\{ \frac{\exp \left[\beta_{10} + \beta_{11}G_i + \beta_{12}N_i - I_i \right] / \beta_2}{\left(1 + \exp \left[\beta_{10} + \beta_{11}G_i + \beta_{12}N_i - I_i \right] / \beta_2 \right)^2 \beta_2} \right\} \quad (24)$$

Sabe-se que, para obter a função de produção, deve-se integrar a função de crescimento (24), neste caso, volta-se ao modelo (18). A produção em volume foi prognosticada para a mesma unidade amostral, tida como exemplo, nos estudos de compatibilidade em área basal (item 3.3).

Encontra-se na tabela 10 os valores obtidos com a integral da função de crescimento (modelo 24), juntamente com os valores de produção do modelo (18).

Tabela 10 Valores de produção referentes à integral do modelo de crescimento e do modelo de produção

Idades de Projeção (anos)	Sítio (m)	Produção (m ² ha ⁻¹)	Produção (m ³ ha ⁻¹)
2,8	33	12,97	101,08
3,8	33	17,55	153,86
4,8	33	19,24	177,35

Ao integrar a função de crescimento (modelo 24), são obtidos os mesmos valores de produção em volume quando é utilizado o modelo (18). Desse modo, é verificado o princípio de compatibilidade do modelo logístico com inclusão de covariáveis para projeção da produção em volume.

3.7 Aplicação da técnica equações diferenciais para modelagem da área basal e projeção da produção volumétrica

Com base nos resultados apresentados e discutidos nos itens anteriores, verifica-se que os modelos que apresentaram as melhores estatísticas de ajuste foram o Modelo II - para modelagem do crescimento e produção em área basal, e o modelo logístico completo (18) - para projeção do crescimento e produção em volume.

Nesse contexto, aplicou-se o Modelo II para projeção da produção em área basal com idade variando de 2 a 10 anos. Obtidas as áreas basais nessas idades, procedeu-se à estimativa da produção em volume utilizando o modelo logístico com covariáveis.

Após a estimativa da produção volumétrica, os valores de área basal e volume foram agregados por classe de sítio e, então, a média dessas variáveis compôs os valores de produção em volume nas idades de projeção, como pode ser observado na tabela 11.

A rotação técnica foi definida pela interseção entre as duas curvas de incremento – incremento médio anual (*IMA*) e incremento corrente anual (*ICA*). Segundo Campos e Leite (2009), essa técnica leva em consideração apenas a maior eficiência na produção em volume, sendo definida com base na produção média. Esses mesmos autores ressaltam que a rotação técnica não corresponde, necessariamente, à rotação técnica definida com base em fatores econômicos.

Tabela 11 Valores de volume, incremento médio anual e incremento corrente anual para as diferentes classes de sítio

Idade	Classe de Sítio								
	I – 37m			II – 33m			III – 29m		
	Volume	<i>IMA</i>	<i>ICA</i>	Volume	<i>IMA</i>	<i>ICA</i>	Volume	<i>IMA</i>	<i>ICA</i>
2	106,6	53,3		71,0	35,5		56,6	28,3	
3	216,5	72,2	109,9	164,9	55,0	93,8	135,0	45,0	78,4
4	292,3	73,1	75,8	239,4	59,8	74,5	201,7	50,4	66,7
5	335,3	67,1	43,0	283,6	56,7	44,2	244,1	48,8	42,4
6	374,6	62,4	39,3	322,0	53,7	38,4	282,7	47,1	38,6
7	436,4	62,3	61,8	383,7	54,8	61,8	346,6	49,5	63,9
8	521,3	65,2	84,9	479,3	59,9	95,6	450,2	56,3	103,6
9	585,4	65,0	64,1	563,5	62,6	84,2	546,7	60,7	96,5
10	605,4	60,5	20,0	593,3	59,3	29,9	582,0	58,2	35,3

Na tabela 11 verifica-se que a idade técnica de corte (*ITC*) para todos os sítios foi de quatro anos. Esse fato contradiz o que se espera na realidade, ou seja, quanto melhor o sítio, mais cedo é realizada a rotação técnica. Isso porque, para uma mesma densidade, um sítio mais produtivo, o ponto de inflexão da curva será precoce quando comparado com sítios menos produtivos. A principal responsável pela ineficiência em representar de forma real a *ITC* é a base de

dados. Com as características da base de dados utilizada para o estudo, isto é, a utilização de parcelas temporárias e permanentes com apenas duas medições (2010 e 2012), torna-se incompleta e inadequada para obtenção de informações condizentes da projeção do crescimento e produção volumétrica. Esse fato é confirmado pela significância do índice de sítio, apenas, na assíntota horizontal superior do modelo logístico.

4 CONCLUSÃO

O uso de modelos lineares e não lineares para predição e projeção do crescimento e da produção em volume e área basal gerou estimativas com alta precisão.

Apesar da preferência aos modelos não lineares, por possuírem características desejáveis como a parcimônia e apresentarem comportamento biológico, os mesmos não geraram estimativas superiores em relação aos modelos lineares, para o estudo de crescimento e produtividade em área basal. Para o estudo do crescimento e produção em volume o modelo não linear foi superior ao modelo linear de Clutter.

A decomposição de parâmetros dos modelos, para inclusão de covariáveis, proporcionou maior precisão nas estimativas. Tal inclusão explica melhor a variabilidade do componente dependente, permitindo que os dados sejam trabalhados na sua naturalidade, ou seja, não necessitando realizar transformações dos mesmos, além de contribuir para que as pressuposições da análise de regressão sejam atendidas.

A aplicação da técnica equações diferenciais, para estimativa do crescimento e da produção em área basal, permite a obtenção de resultados precisos, com exceção dos resultados de área basal projetados após a idade de 7 anos. Nesse contexto, é possível afirmar que houve superestimativa da variável em questão.

O modelo logístico com covariáveis foi preciso no processo de estimativa da produção volumétrica, com exceção dos valores preditos após a idade de 7 anos. Tal fato decorre da superestimativa ocasionada pelo modelo de produção em área basal.

REFERÊNCIAS

- BURKHART, H. E. **Growth and yield of red pine in Minnesota**. Washington: USDA, 1962. 50 p. (Technical Bulletin, 1272).
- CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: perguntas e respostas**. 3. ed. Viçosa, MG: UFV, 2009. 548 p.
- CLUTTER, J. L. Compatible growth and yield for loblolly pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 9, n. 3, p. 354-371, 1963.
- CLUTTER, J. L. et al. **Timber management: a quantitative approach**. New York: Wiley, 1983. 333 p.
- MENDES, B. R. et al. Desenvolvimento de modelos de crescimento de árvores individuais fundamentado em equações diferenciais. **Cerne**, Lavras, v. 12, n. 3, p. 254-263, 2006.
- MENDONÇA, A. R. de. **Modelagem não linear do crescimento e da produção de plantações florestais**. 2010. 96 p. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.
- PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-Plus**. New York: Springer-Verlag, 2000. 528 p.
- RATKOWSKY, D. A. **Handbook of nonlinear regression models**. New York: M. Dekker, 1989. 241 p.
- SAKAMOTO, Y.; ISHIGURO, M.; KITAGAWA, G. **Akaike information criterion statistics**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. 290 p.
- SCHUMACHER, F. X.; HALL, F. S. Logarithmic expression of timber tree. **Journal of Agricultural Research**, Washington, v. 47, n. 9, p. 719-734, 1933.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Haward, v. 6, p. 461-464, 1978.
- ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Thomson, 2003. 492 p.

CAPÍTULO 4 Proposta de uma metodologia de modelagem do afilamento baseado na taxa de variação do raio

RESUMO

Objetivou-se neste estudo desenvolver e avaliar modelos de afilamento não lineares, baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste, capaz de estimar com alto grau de precisão a variável altura comercial h_{ij} . Para efeito de comparação, foram ajustados três modelos tradicionais, sendo eles, o modelo linear de Schö e pfer modificado; o modelo não linear logístico de três parâmetros e o logístico de quatro parâmetros. Para ajuste dos modelos não lineares foi realizada a inclusão de covariáveis, visando obter melhor precisão nas estimativas. A seleção e a qualidade de ajuste do melhor modelo se deram com base no erro padrão percentual $[S_{yx} \ %]$, critério de informação de Akaike

AIC e critério de informação Bayesiano BIC , além da análise de resíduos. Para a manipulação, ajuste e processamento dos dados foi utilizado o *software* estatístico R. De acordo com as análises estatísticas, o desenvolvimento dos modelos de afilamento, baseado na taxa de variação, apresentou características estatísticas inferiores quando comparado com o modelo linear de Schö e pfer modificado, e semelhante aos modelos tradicionais logísticos. Quando comparado ao modelo logístico de três parâmetros, demonstrou uma leve superioridade.

Palavras-chave: Eucalipto. Função de afilamento. Multiprodutos. Covariáveis.

ABSTRACT

The aim of the study was to develop and evaluate nonlinear taper models, based on the radius rate change along the stem, which is able to estimate with high accuracy the commercial tree height variable h_{ij} . For comparison, it was adjusted three traditional models, the modified Schö eper linear model, the logistic model with 3 parameters model and the four parameters logistic model. To adjust the nonlinear models it was done the inclusion of covariates in order to obtain better accuracy in the estimates. The selection of the models and the goodness of fit of the models is given based on the standard error $[S_{yx} \ %]$, Akaike information criterion AIC , Bayesian information criterion BIC , test the maximum likelihood $TRMV$, in addition to the graphical analysis of the residuals. For handling, fitting and processing the data it was used the R software. According to the statistical analysis, the development of taper models based on the change of rate showed lower statistical characteristics when compared to the modified Schö eper linear model, and similar characteristics compared to traditional logistic models. When compared to the three-parameter logistic model, it demonstrated a slight superiority.

Key Words: Eucalyptus. Tapering function. Multiproducts. Covariates.

1 INTRODUÇÃO

Em função da grande demanda por produtos madeireiros, aliada à instabilidade de mercado para alguns produtos, é notável uma tendência das empresas florestais em destinar parte de suas plantações florestais para que sejam utilizadas segundo o conceito de multiprodutos. Nesse contexto, as receitas de um determinado produto, que apresentar menor valor de mercado, poderão ser compensadas pelas receitas de outros produtos, que no momento apresentam melhor valor de mercado. Com isso, a empresa poderá otimizar e maximizar sua produção de forma a alcançar um máximo rendimento e, conseqüentemente, aumentar a sua receita.

Quando o objetivo da empresa florestal é a produção de multiprodutos, o uso de técnicas de modelagem é uma ferramenta importante para o processo de quantificação de sortimentos. O uso de modelos de afilamento, para estimativa do diâmetro e/ou altura e volume em qualquer seção do fuste, se utilizada de maneira adequada, fornece estimativas precisas do estoque, o que torna essencial para a eficiência do planejamento da produção florestal.

Os avanços tecnológicos proporcionaram uma evolução no uso de modelos estatísticos. Em relação às variáveis de afilamento, anteriormente estimadas apenas por modelos lineares, passaram a ser estimadas por modelos não lineares.

A busca em aprimorar e desenvolver modelos capazes de representar e explicar uma realidade complexa constitui estratégia de grande valia para o desenvolvimento da ciência. Novas técnicas de modelagem do perfil dos fustes de espécies florestais têm sido desenvolvidas, mesmo com a quantidade de estudos na área, sempre existe a possibilidade de se melhorar a eficiência de tais funções (SOUZA et al., 2008). Dentre os estudos que seguem essa linha de pesquisa podem ser citados os trabalhos de Bi e Long (2001), Fonweban et al.

(2011), Garber e Maguire (2003), Horle et al. (2010), Jiang e Liu (2011), Kozak (1997, 2004), Lejeune et al. (2009), Mendonça et al. (2007), Pires e Calegario (2007), Sharma e Zhang (2004) e Yang et al. (2009). Nesse sentido, uma nova metodologia foi proposta, objetivando desenvolver modelos de afilamento.

Aliada a essa busca por novas descobertas, outras técnicas podem ser utilizadas em conjunto com os modelos de regressão, com intuito de produzir boas estimativas da variável de interesse. A decomposição dos parâmetros dos modelos para inclusão de covariáveis é uma técnica válida, pois conhecendo as variáveis que explicam a variabilidade da variável dependente e adicionando-as aos modelos é um bom caminho para obter funções mais precisas.

Nesse contexto, objetivou-se neste estudo desenvolver e avaliar modelos de afilamento não lineares, baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste, capaz de estimar com alto grau de precisão a variável altura comercial

h_{ij} .

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Caracterização da área de estudo e coleta dos dados

Os dados para a realização do estudo foram provenientes de um plantio clonal de eucalipto, pertencente à empresa Copebrás, de propriedade do grupo Anglo American, localizada nos municípios de Catalão e Ouvidor, região sudeste do estado de Goiás, Brasil. O clima da região enquadra-se no tipo Aw, que, de acordo com a classificação climática de Köppen, apresenta dois períodos distintos: um chuvoso e outro seco, com temperatura média anual atingindo 22°C e precipitação média anual, com valores entre 1200 e 1800 mm.

Para o desenvolvimento e avaliação da eficiência de funções na descrição do perfil de fustes de árvores de eucalipto, foram utilizados dados de cubagem mensurados no ano de 2012, distribuídos em diferentes idades e locais. As árvores consideradas para tal estudo detinham um diâmetro mínimo de 15 cm de *DAP*.

Com base nos dados coletados, *DAP*, H_t e diâmetro em várias posições de h_{ij} (d_{ij}), procedeu-se à divisão das árvores em classes diamétrica e de altura. A metodologia de cubagem utilizada foi a de Smalian, sendo tomadas medidas de diâmetro nas posições de 0.1, *DAP*, 2 m, e assim por diante, a cada 2 m, até o diâmetro de 4 cm. A figura 1 representa o perfil das árvores médias de cada classe diamétrica.

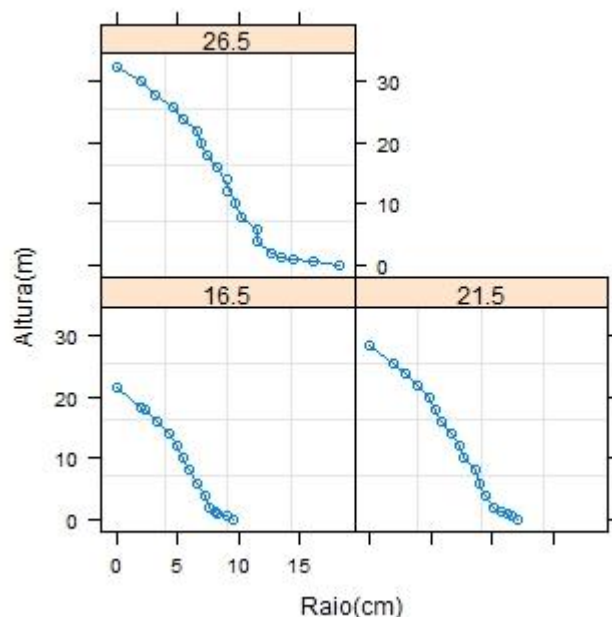


Figura 1 Perfil da árvore média por classe diamétrica

2.2 Ajuste de modelos de afilamento para estimativa da altura comercial

Foram avaliados o modelo linear modificado de Schö eper (1966) e os modelos não lineares logísticos de três e quatro parâmetros para estimativa da altura ao longo do fuste. Para obter maior precisão nas estimativas, os modelos não lineares foram decompostos para inclusão da variável altura total ht_i como covariável, conforme os modelos de Schö eper modificado (1), logístico de três parâmetros (2) e quatro parâmetros (3).

$$h_{ij} = \beta_0 + \beta_1 ht_i + \beta_2 \left(\frac{r_{ij}}{rap_i} \right) ht_i + \beta_3 \left(\frac{r_{ij}}{rap_i} \right)^2 ht_i + \beta_4 \left(\frac{r_{ij}}{rap_i} \right)^3 ht_i + \beta_5 \left(\frac{r_{ij}}{rap_i} \right)^4 ht_i + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$h_{ij} = \frac{\beta_{00} + \beta_{01}ht_i}{1 + \exp\left[\left(\beta_{10} + \beta_{11}ht_i - \frac{r_{ij}}{rap_i}\right) / \beta_{20} + \beta_{21}ht_i\right]} + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$h_{ij} = \beta_{00} + \beta_{01}ht_i + \frac{\beta_{10} + \beta_{11}ht_i - \beta_{00} + \beta_{01}ht_i}{1 + \exp\left[\left(\beta_{20} + \beta_{21}ht_i - \frac{r_{ij}}{rap_i}\right) / \beta_3\right]} + \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

Em que: h_{ij} = altura no raio r_{ij} da i -ésima árvore (m); ht_i = altura total da i -ésima árvore (m); r_{ij} = raio da i -ésima árvore na j -ésima posição (m); rap_i = raio a 1,30 m de altura da i -ésima árvore (m); β_s = parâmetros a serem estimados; ε_{ij} = erro aleatório.

2.3 Desenvolvimento do modelo de afilamento baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste

O desenvolvimento do modelo que represente o afilamento foi baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste. Partindo do conhecimento de que a derivativa da função que representa o perfil do fuste de uma árvore, em determinado ponto, tem um valor crescente da base até o ponto de inflexão e decrescente do ponto de inflexão até o ápice do fuste, foram escolhidos modelos que apresentam tendência semelhante a essa taxa de variação, conforme figura 2.

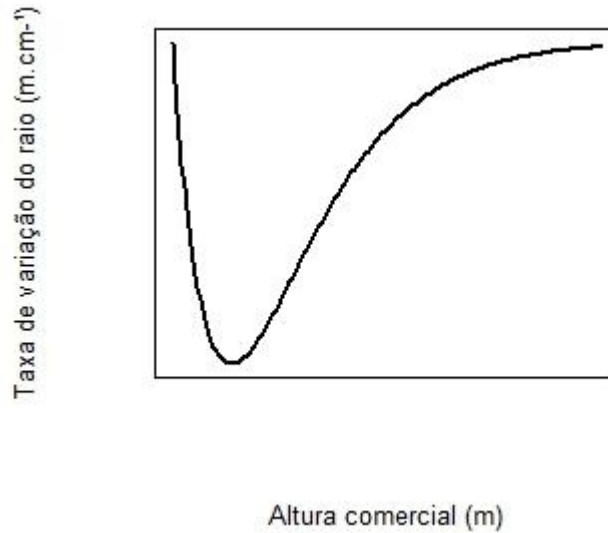


Figura 2 Exemplo da variação da taxa do afilamento em função da altura comercial

Para o cálculo da taxa de afilamento do fuste de árvores, foi utilizado o princípio da tangente, a qual leva em consideração a relação entre a variação da altura e a variação do raio.

Foram escolhidos três modelos não lineares, sendo os dois primeiros compostos por três parâmetros e o terceiro modelo com dois parâmetros (RATKOWSKY, 1989). Tais modelos, os quais se assemelham ao comportamento da figura 2, são representados pelas equações (4), (5) e (6).

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}} = \beta_0 - \beta_1 r_{ij} \exp \beta_2 r_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 r_{ij} + \beta_2 r_{ij}^2} + \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}} = \beta_0 r_{ij} \exp[-\beta_1 r_{ij}] + \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

Em que: $\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}}$ = taxa de variação do *j*-ésimo dado de cubagem (cm/m);

r_{ij} = raio na altura h_{ij} da *i*-ésima árvore (cm); β_s = parâmetros a serem estimados; ε_{ij} = erro aleatório.

Com o intuito de obter estatísticas com maior precisão, os parâmetros dos modelos (4), (5) e (6) foram decompostos para inclusão da covariável h_{ij} , originando as equações (7), (8) e (9), modelos I, II e III, respectivamente.

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}} = \left[\beta_{00} + \beta_{01} h_{ij} - \beta_{10} + \beta_{11} h_{ij} \frac{r_{ij}}{rap_i} \right] \exp \left[\beta_{20} + \beta_{21} h_{ij} \frac{r_{ij}}{rap_i} \right] + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{1}{\beta_{00} + \beta_{01} h_{ij} + \beta_{10} + \beta_{11} h_{ij} \frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_2 \left(\frac{r_{ij}}{rap_i} \right)^2} + \varepsilon_{ij} \quad (8)$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r_{ij}} = \beta_{00} + \beta_{01} h_{ij} \frac{r_{ij}}{rap_i} \exp \left[-\beta_{10} + \beta_{11} h_{ij} \frac{r_{ij}}{rap_i} \right] + \varepsilon_{ij} \quad (9)$$

Para obtenção das funções de afilamento as equações 4, 5 e 6 foram integradas em função do raio, resultando nas funções 10, 11 e 12, respectivamente.

$$\int \partial h_{ij} = \int \beta_0 - \beta_1 r_{ij} \exp \beta_2 r_{ij} \partial r_{ij} + C_{ij}$$

$$h_{ij} = -\frac{\exp \beta_2 r_{ij} - \beta_0 \beta_2 + \beta_1 \beta_2 r_{ij} - \beta_1}{\beta_2^2} \quad (10)$$

$$\int \partial h_{ij} = \int \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 r_{ij} + \beta_2 r_{ij}^2} \partial r_{ij} + C_{ij}$$

$$h_{ij} = 2 \frac{\arctan \left[\frac{2\beta_2 r_{ij} + \beta_1}{\sqrt{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}} \right]}{\sqrt{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}} \quad (11)$$

$$\int \partial h_{ij} = \int \beta_0 r_{ij} \exp -\beta_1 r_{ij} \partial r_{ij} + C_{ij}$$

$$h_{ij} = \frac{b_0 \left[-b_1 r_{ij} \exp -b_1 r_{ij} - \exp -b_1 r_{ij} \right]}{b_1^2} \quad (12)$$

Em que: h_{ij} = altura no raio r_{ij} da *i-ésima* árvore (m); C_{ij} = constante arbitrária da integração.

2.4 Avaliação da qualidade de ajuste dos modelos

Para avaliação dos modelos e verificação das pressuposições da análise de regressão, foi utilizada a análise gráfica dos resíduos, juntamente com algumas medidas de acurácia que servirão de subsídio na comparação dos modelos. Os modelos ajustados tiveram sua precisão avaliada por meio do erro

padrão residual S_{yx} e percentual $[S_{yx} \ %]$, critério de informação de Akaike AIC , e Bayesiano.

2.4.1 Erro padrão residual e percentual

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Y - \hat{Y}^2}{n - p}} \quad (13)$$

$$S_{yx} \ \% = \frac{S_{yx}}{\bar{Y}} 100 \quad (14)$$

Em que: S_{yx} = erro padrão residual (m); $S_{yx} \ \%$ = erro padrão relativo (%); Y = valor observado da variável dependente; \hat{Y} = valor estimado da variável dependente pelo modelo; n = número de observações; p = número de parâmetros.

2.4.2 Critério de informação de Akaike (AIC) (SAKAMOTO; ISHIGURO; KITAGAWA, 1986)

$$AIC = -2 \ln mv + 2p \quad (15)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano; p = número de parâmetros do modelo.

2.4.3 Critério de informação Bayesiano (BIC) (Schwarz, 1978)

$$BIC = -2 \ln mv + p \ln n \quad (16)$$

Em que: mv = valor da máxima verossimilhança; \ln = logaritmo neperiano; p = número de parâmetros do modelo; n = número de observações.

Em relação aos critérios, nota-se que quanto menores os valores de AIC e BIC melhor o modelo ajustado, pois penaliza modelos com número excessivo de parâmetros, selecionando modelos mais parcimoniosos.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Análise exploratória dos dados

Na tabela 1 é apresentada a relação das árvores que foram cubadas para o ajuste dos modelos de afilamento.

Tabela 1 Caracterização das árvores cubadas para o ajuste de modelos de perfil

Classe de diâmetro (cm)	Classe de altura (m)				Total
	18,5	23,5	28,5	33,5	
17,5	3	5	17	1	26
22,5			6	10	16
27,5			1	3	4
Total	3	5	24	14	46

3.2 Análise dos modelos de afilamento para estimativa da altura comercial

A tabela 2 apresenta os parâmetros e as estatísticas de ajuste dos modelos de afilamento.

Tabela 2 Parâmetros e estatísticas de ajuste dos modelos de afilamento

Polinômio do 4º Grau ($S_{yx} = 7,64\%$)					
Parâmetro	Covariante Associada	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_0	--	-0,94820	0,320	-2,960	0,003
β_1	--	1,03332	0,012	84,182	< 0,001
β_2	--	-0,49859	0,062	-8,022	< 0,001
β_3	--	0,67826	0,218	3,109	0,001
β_4	--	-2,61029	0,273	-9,542	< 0,001
β_5	--	1,49738	0,112	13,400	< 0,001
Logístico 4 Parâmetros ($S_{yx} = 8,16\%$)					
β_{00}	Intercepto	8,015390	1,364	5,877	< 0,001
β_{01}	<i>ht</i>	0,765953	0,044	17,239	< 0,001
β_{10}	Intercepto	-11,716246	2,185	-5,362	< 0,001
β_{11}	<i>ht</i>	0,212138	0,071	2,990	0,003
β_{20}	Intercepto	0,622897	1,576	0,395	0,693
β_{21}	<i>ht</i>	0,689370	0,052	13,269	< 0,001
β_3	Intercepto	6,741443	0,186	36,253	< 0,001
Logístico 3 Parâmetros ($S_{yx} = 9,61\%$)					
β_{00}	Intercepto	0,8137530	1,471	0,553	0,580
β_{01}	<i>ht</i>	0,9474969	0,049	19,031	< 0,001
β_{10}	Intercepto	-1,8488289	0,847	-2,182	0,029
β_{11}	<i>ht</i>	0,7199556	0,029	25,153	< 0,001
β_{20}	Intercepto	-0,9014882	0,618	-1,459	0,145
β_{21}	<i>ht</i>	-0,1355346	0,021	-6,454	< 0,001

De acordo com o teste “t”, nota-se que todos os parâmetros são significativos a ($p < 0,05$), com exceção dos parâmetros β_{20} (Intercepto), para o modelo logístico de quatro parâmetros e β_{00} e β_{20} (Interceptos) para o logístico de três parâmetros. Quando tratar da

insignificância do intercepto, esta normalmente deve ser desprezível, pois a característica da árvore associada ht_i influencia a relação $h_{ij} \sim r_{ij}$. Quanto aos critérios estatísticos $S_{yx} \%$, AIC , BIC , e $lnmv$, apresentados na tabela 2 e 3, nota-se que o modelo linear de Schö e pfer modificado obteve vantagem em relação aos outros modelos não lineares avaliados. Na tabela 3 são apresentadas as estatísticas dos modelos de afilamento ajustados.

Tabela 3 Critério de informação de Akaike (AIC), critério de informação Bayesiano (BIC), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança ($lnmv$), para os modelos de afilamento ajustados

Modelo	AIC	BIC	$lnmv$
Polinômio do 4° Grau (Schö e pfer)	2039,276	2070,775	-1012,638
Logístico 4 Parâmetros	2127,331	2163,329	-1055,665
Logístico 3 Parâmetros	2343,508	2375,007	-1164,754

Com o intuito de verificar a qualidade do ajuste e se as suposições da análise de regressão são atendidas, utiliza-se o gráfico de análise residual, representado pela figura 3 (a), e o gráfico representando a relação entre a altura h_{ij} estimada e a altura h_{ij} observada, conforme a figura 3 (b). Estas análises são demonstradas apenas para o modelo linear polinomial de 4° grau, por apresentar as melhores estatísticas de ajuste.

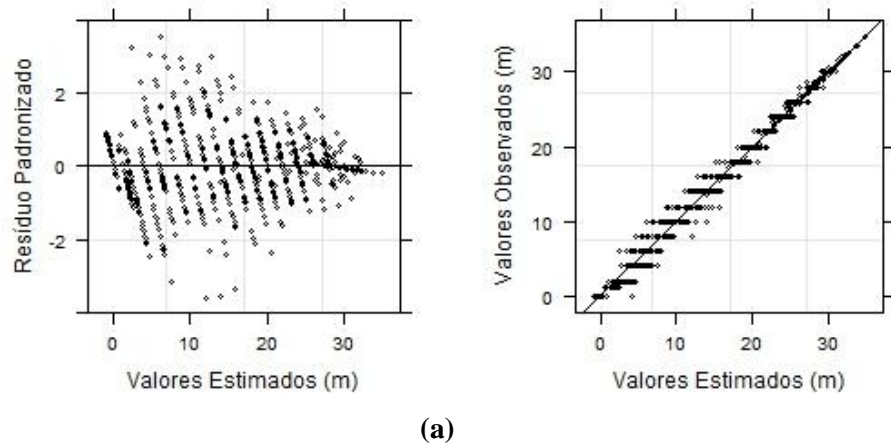


Figura 3 (a) Gráfico de resíduo para o modelo polinomial de 4^o grau; (b) Altura estimada (m) *versus* altura observada (m) para o modelo polinomial de 4^o grau

Verificando a figura 3 (a), é possível concluir uma boa distribuição dos resíduos. Nota-se, também, que a suposição de independência foi atendida. Apesar dos resíduos possuírem uma leve tendência à condição de heterocedasticidade, o modelo pode ser utilizado sem a preocupação de produzir estimativas tendenciosas. Nos menores valores de h_{ij} observa-se uma condição de superestimativa. Entre as alturas de 5 a 18 m, nota-se uma discrepância da variância, alcançando valores acima de ± 2 . Essa ocorrência de viés, supostamente está ligada à presença de “*outliers*”. Quanto à figura 3 (b), verifica-se que o modelo conseguiu representar a variação real do afilamento de árvores de eucalipto, em decorrência da proximidade dos valores observados *versus* estimados à linha média.

3.3 Análise dos modelos de afilamento baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste

A tabela 4 apresenta os parâmetros e as estatísticas de ajuste dos modelos de afilamento baseado na taxa de variação.

Tabela 4 Parâmetros e estatística de ajuste para os modelos de afilamento baseado na taxa de variação

Modelo I ($S_{yx} = 41,44\%$)					
Parâmetro	Covariante Associada	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_{00}	Intercepto	1,893746	1,003	1,887	0,059
β_{01}	h_{ij}	-0,069233	0,035	-1,999	0,046
β_{10}	Intercepto	22,361327	4,320	5,176	< 0,001
β_{11}	h_{ij}	-0,582791	0,140	-4,193	< 0,001
β_{20}	Intercepto	-2,162812	0,174	-12,393	< 0,001
β_{21}	h_{ij}	0,064516	0,006	9,898	< 0,001
Modelo II ($S_{yx} = 40,92\%$)					
β_{00}	Intercepto	-2,168491	0,335	-6,469	< 0,001
β_{01}	h_{ij}	0,027509	0,009	3,036	0,002
β_{10}	Intercepto	4,948123	0,797	6,210	< 0,001
β_{11}	h_{ij}	-0,041816	0,013	-3,214	0,001
β_2	--	-3,136251	0,463	-6,780	< 0,001
Modelo III ($S_{yx} = 38,57\%$)					
β_{00}	Intercepto	-0,1459199	0,038	-3,857	< 0,001
β_{01}	h_{ij}	-0,4789811	0,043	-11,203	< 0,001
β_{10}	Intercepto	-1,1952705	0,082	-14,617	< 0,001
β_{11}	h_{ij}	0,1169694	0,006	18,035	< 0,001

De acordo com o teste “t” é possível afirmar que os parâmetros são significativos ($p < 0,05$), com exceção do intercepto (β_{00}) no modelo I. Na modelagem da taxa, pelas estatísticas erro padrão relativo, *AIC*, *BIC* e *lnmv*, presentes na tabela 4 e 5, é possível concluir que o modelo III obteve uma ligeira vantagem em relação aos modelos I e II. Enquanto os modelos I e II apresentaram um erro padrão absoluto de 1,08 m/cm e 1,07 m/cm, respectivamente, o modelo III apresentou uma pequena vantagem, alcançando um erro de 1,01m/cm.

Tabela 5 Critério de informação de Akaike (*AIC*), critério de informação Bayesiano (*BIC*), e logaritmo neperiano da máxima verossimilhança (*lnmv*), para os modelos de afilamento baseado na variação da taxa

Modelo	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>lnmv</i>
Modelo I	1999,215	2030,714	-992,608
Modelo II	1981,436	2008,434	-984,718
Modelo III	1901,913	1924,412	-945,957

Na figura 4 são apresentados os gráficos de resíduos para o ajuste dos modelos de afilamento baseado na taxa de variação.

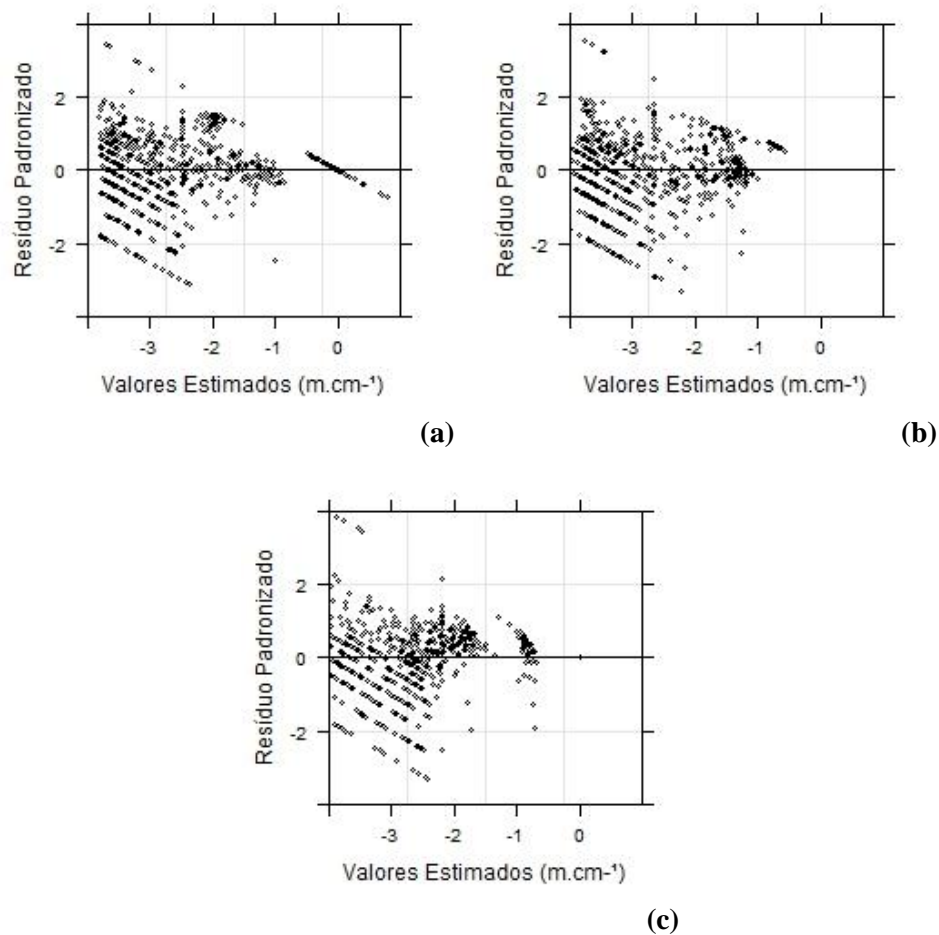


Figura 4 Gráficos de resíduo para os modelos I (a), II (b) e III (c)

Observando os gráficos da figura 4, conclui-se que os modelos apresentaram uma leve dificuldade em representar a taxa de variação nos maiores valores, culminando em uma superestimativa nesse intervalo.

De acordo com os critérios estatísticos analisados dos modelos I, II e III, é possível concluir que o modelo III obteve as melhores estatísticas de precisão, seguido pelos modelos II e I, respectivamente. Apesar do modelo II apresentar uma ligeira vantagem em relação ao modelo I, esse, após ser integrado para o

ajuste da h_{ij} em função do r_{ij} , não foi capaz de representar a função de afilamento. Nesse caso, apenas os modelos I e III serão utilizados, objetivando desenvolver modelos de afilamento, baseado na taxa de variação do raio ao longo do fuste de árvores de eucalipto. Pensando nesse objetivo, os modelos I e III nas suas formas originais (equações 4 e 6) foram integrados em função do raio (equações 10 e 12), e decompostos para a inclusão das covariáveis $\left(\frac{r_{ij}}{rap_i}\right)$ e ht_i , originando os modelos (17 e 18).

$$h_{ij} = \frac{\exp\left[\beta_{20} + \beta_{21}ht_i\right] \left[\begin{array}{l} -\left(\beta_{00} + \beta_{01}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{02}ht_i\right) \beta_{20} + \beta_{21}ht_i + \\ \left(\beta_{10} + \beta_{11}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{12}ht_i\right) \beta_{20} + \beta_{21}ht_i r_{ij} - \\ \left(\beta_{10} + \beta_{11}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{12}ht_i\right) \end{array} \right]}{\beta_{20} + \beta_{21}ht_i^2} \quad (17)$$

$$h_{ij} = \frac{\left(\beta_{00} + \beta_{01}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{02}ht_i\right) \left\{ \begin{array}{l} -\left(\beta_{10} + \beta_{11}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{12}ht_i\right) r_{ij} \cdot \\ \exp\left[-\left(\beta_{10} + \beta_{11}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{12}ht_i\right) r_{ij}\right] - \\ \exp\left[-\left(\beta_{10} + \beta_{11}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{12}ht_i\right) r_{ij}\right] \end{array} \right\}}{\left(\beta_{10} + \beta_{11}\frac{r_{ij}}{rap_i} + \beta_{12}ht_i\right)^2} \quad (18)$$

Em que: r_{ij} = raio na altura h_{ij} da *i-ésima* árvore (m); rap_i = raio a 1,30 m de altura (m); ht_i = altura total da *i-ésima* árvore (m).

Após o ajuste dos modelos de afilamento desenvolvidos, foi possível a obtenção das estatísticas e dos parâmetros dos modelos, como verificado na tabela 6.

Tabela 6 Parâmetros e estatísticas de ajuste para os modelos de afilamento desenvolvidos

Modelo I ($S_{yx} = 9,07\%$)					
Parâmetro	Covariável Associada	Estimativa	Erro Padrão	t-valor	p-valor
β_{00}	Intercepto	107,0783	4,789	22,358	< 0,001
β_{01}	r/rap	-132,6401	4,600	-28,833	< 0,001
β_{02}	ht	1,4560	0,136	10,719	< 0,001
β_{10}	Intercepto	1456,9786	161,330	9,031	< 0,001
β_{11}	r/rap	-2363,7496	53,601	-44,100	< 0,001
β_{12}	ht	43,2482	4,944	8,747	< 0,001
β_{20}	Intercepto	17,9349	0,630	28,621	< 0,001
β_{21}	ht	-0,1876	0,018	-10,230	< 0,001
Modelo III ($S_{yx} = 8,65\%$)					
β_{00}	Intercepto	-8,54391	1,482	-5,765	< 0,001
β_{01}	r/rap	42,83644	0,979	43,770	< 0,001
β_{02}	ht	-1,98977	0,076	-25,976	< 0,001
β_{10}	Intercepto	-1,46518	0,031	-46,778	< 0,001
β_{11}	r/rap	0,57697	0,022	25,710	< 0,001
β_{12}	ht	-0,00258	0,001	-5,250	< 0,001

De acordo com o teste “t”, nota-se que todos os parâmetros são significativos ($p < 0,05$). Como critério estatístico, observa-se um erro padrão relativo e absoluto de 9,07%, 1,32 m e 8,65%, 1,26 m, respectivamente, para ambos os modelos. Quando comparados com os modelos não lineares tradicionais utilizados para o ajuste do afilamento, nesse caso, os modelos logísticos de 3 e 4 parâmetros, é possível notar uma similaridade das estatísticas de ajuste, ficando bem próximos dos valores encontrados por esses modelos, 8,16% e 9,61%, respectivamente. Em relação ao modelo polinomial de 4º grau de Schö e pfer, é possível verificar uma pequena vantagem desse modelo em relação ao modelo desenvolvido. Observa-se uma redução no erro de, aproximadamente, 1% em comparação com os modelos desenvolvidos e os modelos logísticos de 3 e 4 parâmetros.

Na figura 5 é demonstrada a qualidade do ajuste dos modelos de afilamento desenvolvidos pelo gráfico de resíduo e pela relação entre a altura observada *versus* altura estimada.

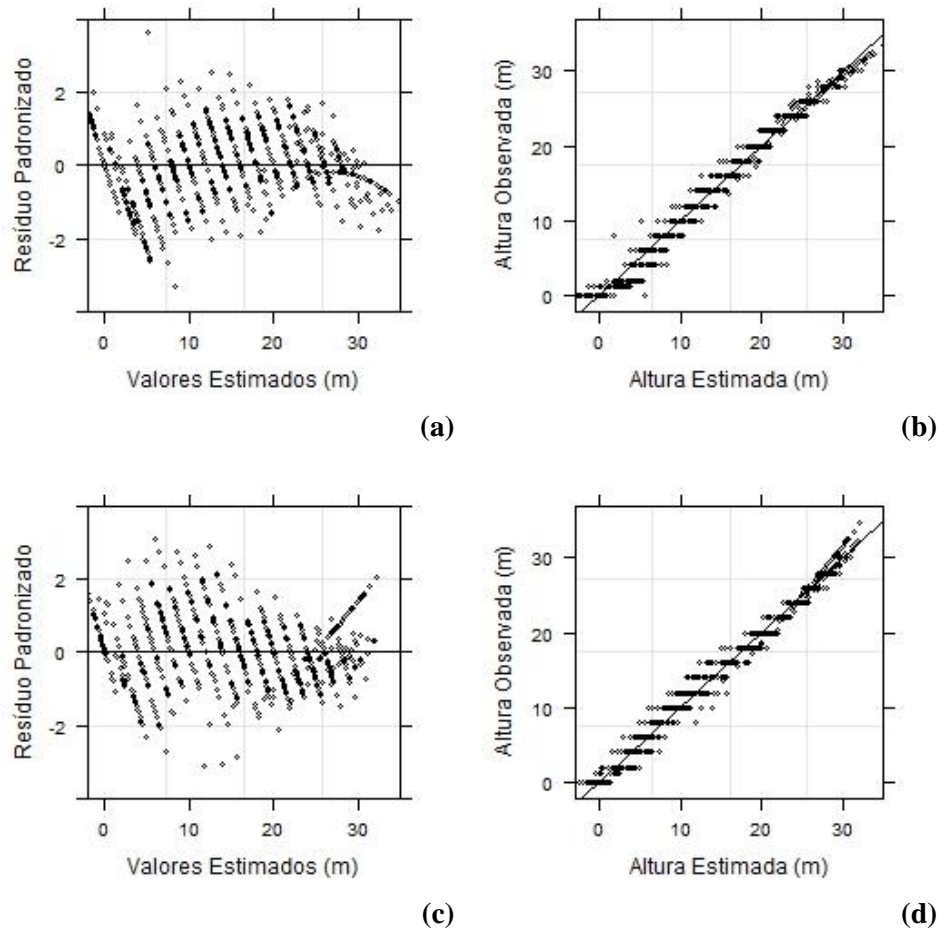


Figura 5 (a) Gráfico de resíduo do modelo I, (b) gráfico da altura estimada (m) *versus* altura observada (m) do modelo I, (c) gráfico de resíduo do modelo III, (d) gráfico da altura estimada (m) *versus* altura observada (m) do modelo III

De acordo com o gráfico de resíduo do modelo I, é possível verificar que nos menores e maiores valores de altura comercial houve uma superestimativa do modelo desenvolvido. O contrário é observado nos valores de altura entre 20 e 25 m. Para o modelo III é observada uma subestimativa nos valores de altura

entre 8 e 12 m, e nos valores acima de 25 metros de altura. Na figura 5 (b) e (d) é possível afirmar que houve uma proximidade dos valores observados *versus* estimados à linha média, mostrando a boa qualidade de ajuste dos modelos desenvolvidos. Uma tendência de superestimativa (modelo I) e subestimativa (modelo III) é verificada nos maiores valores de (h_{ij}), corroborando com a análise gráfica de resíduos. Tomando como base as estatísticas de ajuste, juntamente com os gráficos de resíduos, os modelos desenvolvidos podem ser utilizados para a modelagem do afilamento de árvores de eucalipto sem a preocupação de produzir estimativas tendenciosas.

4 CONCLUSÃO

A decomposição de parâmetros dos modelos, para inclusão de covariáveis, proporcionou maior precisão nas estimativas.

O uso de modelos não lineares para predição da altura comercial, apesar de possuírem características desejáveis como o comportamento biológico e a parcimônia, não apresentaram superioridade em relação ao modelo polinomial de 4º grau de Schö epfer.

O desenvolvimento de modelos de afilamento baseado na taxa de variação apresentou características estatísticas semelhantes aos modelos tradicionais logísticos, apresentando superioridade quando comparados ao modelo logístico de três parâmetros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para estimativa da taxa é pertinente evitar o ajuste da função com dados de cubagem de medidas coletadas entre o diâmetro da base e o *DAP*, em razão desta parte do fuste apresentar pouca ou quase nenhuma variação de diâmetro, às vezes superior ao diâmetro anterior, o que poderá favorecer a produção de taxas positivas e, conseqüentemente, dificultar e/ou impossibilitar que modelos sejam ajustados.

Neste mesmo sentido, para evitar que o cálculo da taxa forneça valores capazes de dificultar e impossibilitar o seu ajuste, os pontos de cubagem, após o *DAP*, devem possuir pequenas distâncias entre eles, ou seja, as medidas de diâmetro devem ser tomadas no máximo a cada metro, principalmente, nas maiores classes de diâmetro, em que as árvores apresentam maior idade e, conseqüentemente, a conicidade se reduz. Nessa situação, a pouca ou quase nenhuma variação do diâmetro e grandes variações de altura poderão produzir taxas de alto valor.

O uso de técnicas estatísticas avançadas poderá contribuir para melhorar as estimativas dos modelos, principalmente no que se diz respeito à modelagem da autocorrelação, presente em pequena proporção nas estatísticas de ajuste dos modelos (resíduo).

REFERÊNCIAS

- BI, H.; LONG, Y. Flexible taper equation for site-specific management of *Pinus radiata* in New South Wales, Australia. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 148, n. 1/3, p. 79-91, 2001.
- FONWEBAN, J. et al. Taper functions for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain. **Forestry**, Oxford, v. 84, n. 1, p. 49-60, Jan. 2011.
- GARBER, S. M.; MAGUIRE, D. A. Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 179, n. 1/3, p. 507-522, 2003.
- HORLE, D. C. et al. Modelagem não linear do perfil longitudinal de fustes de *Pinus oocarpa*. **Cerne**, Lavras, v. 16, n. 2, p. 177-184, abr./jun. 2010.
- JIANG, L.; LIU, R. Segmented taper equations with crown ratio and stand density for Dahurian Larch (*Larix gmelinii*) in Northeastern China. **Journal of Forestry Research**, London, v. 22, n. 3, p. 347-352, 2011.
- KOZAK, A. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v. 27, n. 5, p. 619-629, 1997.
- KOZAK, A. My last words on taper equations. **The Forestry Chronicle**, Ottawa, v. 80, n. 4, p. 507-515, 2004.
- LEJEUNE, G. et al. A simple stem taper model with mixed effects for boreal black spruce. **European Journal of Forest Research**, Georgetown, v. 128, n. 5, p. 505-513, 2009.
- MENDONÇA, A. R. D. et al. Avaliação de funções de afilamento visando a otimização de fustes de *Eucalyptus* sp. para multiprodutos. **Cerne**, Lavras, v. 13, n. 1, p. 71-82, jan./mar. 2007.
- PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não-lineares para a descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 31, n. 5, p. 845-852, set./out. 2007.

RATKOWSKY, D. A. **Handbook of nonlinear regression models**. New York: M. Dekker, 1989. 241 p.

SAKAMOTO, Y.; ISHIGURO, M.; KITAGAWA, G. **Akaike information criterion statistics**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. 290 p.

SCHÖEPFER, W. **Automatisierung des Massen, Sorten und Wertberechnung stenender waldbestände** *schriftenreihe bad.* [S.l.]: Wurttemberg-Forstl, 1966.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Haward, v. 6, p. 461-464, 1978.

SHARMA, M.; ZHANG, S. Y. Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern Canada. **Forest Ecology and Management**, Amsterdam, v. 198, n. 1/3, p. 39-53, 2004.

SOUZA, C. A. M. D. et al. Avaliação de modelos de afileamento não-segmentados na estimação da altura e volume comercial de *Eucalyptus* sp. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 18, n. 3, p. 393-405, 2008.

YANG, Y. et al. Nonlinear mixed-effects modeling of variable-exponent taper equations for lodgepole pine in Alberta, Canada. **European Journal of Forest Research**, Georgetown, v. 128, n. 4, p. 415-429, 2009.