

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JULIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE CIÊNCIAS AGRONÔMICAS  
CÂMPUS DE BOTUCATU

**USO DO MODELO LINEAR MULTIVARIADO DE CRESCIMENTO NO  
ESTUDO DA DENSIDADE BÁSICA DA MADEIRA DE EUCALIPTOS**

**GISLAINE CRISTINA BATISTELA**

Tese apresentada à Faculdade de Ciências Agronômicas da UNESP – Câmpus de Botucatu, para obtenção do título de Doutor em Agronomia (Energia na Agricultura).

BOTUCATU-SP

Junho - 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JULIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE CIÊNCIAS AGRONÔMICAS  
CÂMPUS DE BOTUCATU

**USO DO MODELO LINEAR MULTIVARIADO DE CRESCIMENTO NO  
ESTUDO DA DENSIDADE BÁSICA DE EUCALIPTOS**

**GISLAINE CRISTINA BATISTELA**

Orientador: Prof. Dr. Carlos Roberto Padovani

Tese apresentada à Faculdade de Ciências Agronômicas da UNESP – Câmpus de Botucatu, para obtenção do título de Doutor em Agronomia (Energia na Agricultura).

BOTUCATU-SP

Junho – 2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉCNICA DE AQUISIÇÃO E TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - UNESP - FCA - LAGEADO- BOTUCATU (SP)

B326u      Batistela, Gislaine Cristina, 1979-  
            Usos do modelo linear multivariado de crescimento no estudo da densidade básica da madeira de eucaliptos / Gislaine Cristina Batistela. - Botucatu : [s.n.], 2014  
            viii, 65 f. : ils., grafs., tabs.

            Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências Agrônomicas, Botucatu, 2014  
            Orientador: Carlos Roberto Padovani  
            Inclui bibliografia

            1. Análise multivariada. 2. Eucaliptos. 3. Densidade da madeira. I. Padovani, Carlos Roberto. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Campus de Botucatu). Faculdade de Ciências Agrônomicas de Botucatu. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
FACULDADE DE CIÊNCIAS AGRONÔMICAS  
CAMPUS DE BOTUCATU  
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: "USO DO MODELO LINEAR MULTIVARIADO DE CRESCIMENTO NO  
ESTUDO DA DENSIDADE BÁSICA DA MADEIRA DE EUCALIPTOS"

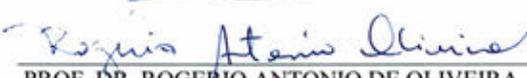
ALUNA: GISLAINE CRISTINA BATISTELA

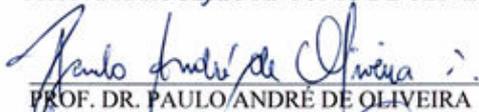
ORIENTADORA: PROF. DR. CARLOS ROBERTO PADOVANI

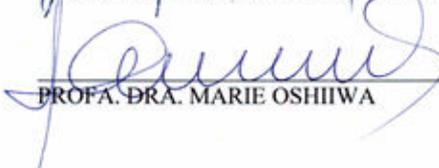
Aprovado pela Comissão Examinadora

  
\_\_\_\_\_  
PROF. DR. CARLOS ROBERTO PADOVANI

  
\_\_\_\_\_  
PROF. DR. ADRIANO WAGNER BALLARIN

  
\_\_\_\_\_  
PROF. DR. ROGERIO ANTONIO DE OLIVEIRA

  
\_\_\_\_\_  
PROF. DR. PAULO ANDRÉ DE OLIVEIRA

  
\_\_\_\_\_  
PROFA. DRA. MARIE OSHIWA

Data da Realização: 02 de junho de 2014.

*“Não chores pelo que perdeste, luta pelo que tens. Não chores pelo que está morto, luta por aquilo que nasceu em ti. Não chores por quem te abandonou, luta por quem está contigo. Não chores por quem te odeia, luta por quem te quer. Não chores pelo teu passado, luta pelo teu presente. Não chores pelo teu sofrimento, luta pela tua felicidade. Com as coisas que vão nos acontecendo vamos aprendendo que nada é impossível de solucionar, apenas siga adiante.”*

*Jorge Mario Bergoglio - Papa Francisco*

**DEDICATÓRIA**

A meus pais, Nivaldo e Terezinha, e aos meus irmãos,  
Jader e Leiziane, pelo carinho, pelo amor e pelo apoio  
incondicionais. Um beijo no coração de cada um,

Gislaine

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por minha saúde e por minha disposição para realizar este trabalho.

Ao professor Dr. Carlos Roberto Padovani, pela dedicação, paciência, carinho e apoio no desenvolvimento desta pesquisa. Mais do que um orientador, um verdadeiro “pai”.

A toda minha família, pelo amparo e pelo incentivo em todos os momentos de minha vida.

Às minhas amigas e irmãs de coração, por não me deixarem desistir deste sonho.

Aos professores Dr. Adriano Wagner Ballarin e Dr. Rogério Antônio de Oliveira pelas sugestões durante o trabalho e no exame de qualificação.

Durante a realização deste trabalho, algumas pessoas foram importantes, dentre elas: Sergio Augusto Rodrigues, Graciela Sanjutá Soares Faria, Fábio José Bettus, Sandra Rodrigues Boiago, Martha Aparecida Augusto, Fernanda Cristina Pierre, Adriane Belluci Belório de Castro, Miriam Harumi Tsunemi, Danilo Simões, Ricardo Ghantous Cervi, Maria Fernanda Martins e Silvia Helena Pereira Padovani.

Aos funcionários da biblioteca e da seção de Pós-graduação, pela atenção e pela presteza.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para realização desta tese.

Muito obrigada a todos!

## SUMÁRIO

	Página
LISTA DE TABELAS .....	VII
LISTA DE FIGURAS .....	VIII
1 RESUMO .....	1
2 SUMMARY .....	2
3 INTRODUÇÃO .....	3
4 REVISÃO DE LITERATURA .....	5
4.1 O gênero eucalipto e a importância da propriedade densidade básica na caracterização tecnológica da madeira .....	5
4.2 Variações da densidade básica da madeira .....	7
4.3 Modelos estatísticos em estudos longitudinais nas ciências agrônomicas, florestais e zootécnicas .....	9
5 MATERIAL E MÉTODOS .....	15
5.1 Material .....	15
5.2 Métodos .....	16
5.2.1 Análise de variância multivariada (MANOVA) .....	20
5.2.1.1 Normalidade multivariada .....	25
5.2.1.2 Teste de Box para igualdade de matrizes de variâncias e covariâncias .....	26
5.2.2 Intervalos de confiança simultâneos de Hotelling .....	27
5.2.3 Distância de Mahalanobis .....	27
5.2.4 Modelo linear multivariado de crescimento .....	28
5.2.4.1 Proposta de Potthoff e Roy .....	30
5.2.4.2 Ajuste do MLMC .....	31
6 RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	34
6.1 Medidas descritivas .....	34
6.2 Procedimento univariado .....	36
6.2.1 Comparação de médias .....	36
6.2.2 Modelo de regressão polinomial .....	40
6.3 Procedimento multivariado .....	40
6.3.1 Análise de variância multivariada .....	41
6.3.2 Curvas de crescimento .....	43
6.4 Comparação entre os resultados dos procedimentos univariado e multivariado .....	46
7 CONCLUSÕES .....	50
REFERÊNCIAS .....	52
APÊNDICE 1 .....	57
APÊNDICE 2 .....	60
APÊNDICE 3 .....	61

## LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1. Representação genérica dos dados de um experimento multivariado envolvendo medidas repetidas .....	17
Tabela 2. Tabela de MANOVA em um modelo com um fator .....	23
Tabela 3. Resultados do procedimento estatístico de “descarte” do polinômio .....	33
Tabela 4. Nível descritivo (p) do teste de normalidade .....	37
Tabela 5. Nível descritivo (p) do teste de homogeneidade de Bartlett .....	37
Tabela 6. Média e desvio padrão da densidade básica segundo grupo e resultado do teste estatístico univariado por disco .....	38
Tabela 7. Intervalos de confiança de Tukey para as diferenças entre as médias de dois grupos .....	38
Tabela 8. Resultado da MANOVA da densidade básica da madeira .....	42
Tabela 9. Intervalos de confiança simultâneos de Hotelling para as diferenças entre as médias de dois grupos e distância de Mahalanobis .....	43
Tabela 10. Resultados do procedimento estatístico de “descarte” do polinômio .....	44
Tabela 11. Diferenças significantes segundo os procedimentos estatísticos .....	47
Tabela 12. Estimativa e erro padrão dos coeficientes dos polinômios da regressão polinomial e das curvas de crescimento .....	48
Tabela 13. Valores médios da densidade básica da madeira estimados pela regressão polinomial e pela curva de crescimento e SQErro segundo grupo .....	49
Tabela 14. Dados de densidade básica para 27 árvores de <i>E. saligna</i> .....	57
Tabela 15. Dados de densidade básica para 31 árvores de <i>E. grandis</i> .....	58
Tabela 16. Dados de densidade básica para 30 híbridos ( <i>E. grandis</i> x <i>E. urophylla</i> ) .....	59

## LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Esquema de forma de amostragem utilizado nas árvores .....	16
Figura 2. Densidade básica da madeira em função da posição relativa dos discos.....	35
Figura 3. <i>Boxplot</i> da densidade básica da madeira por disco e grupo .....	36
Figura 4. Intervalos de confiança de Tukey para a diferença entre médias.....	39
Figura 5. (a) <i>Q-Q plot</i> das observações do G1; (b) <i>Q-Q plot</i> das observações do G2; (c) <i>Q-Q plot</i> das observações do G3 .....	41

## 1 RESUMO

Nas situações biológicas em que há configuração da estrutura de dependência na unidade experimental, do ponto de vista do estudo mais acurado da estatística, há que se considerarem não só as variâncias dos dados, mas também suas covariâncias (variações entre características na mesma unidade). Neste estudo, apresentam-se os procedimentos analíticos de dados para essas situações envolvendo a técnica da MANOVA (Análise de Variância Multivariada), modelos lineares multivariados de crescimento (MLMC) para a estimação da densidade básica da madeira de árvores de eucaliptos, considerando o vetor de respostas amostrado em cinco alturas medidas ao longo do tronco no sentido base topo (discos amostrados a 0% - base -, 25%, 50%, 75%, 100% da altura comercial da árvore) e comparar a precisão dos estimadores do modelo de regressão polinomial e com os obtidos pela técnica de MLMC. O conjunto de dados utilizado consiste em valores da densidade básica de árvores relativas a três grupos de eucaliptos, sendo *Eucalyptus saligna*, *E. grandis* e *E. grandis* x *E. urophylla*, com  $n_1=27$ ,  $n_2=31$ ,  $n_3=30$  unidades experimentais, respectivamente. O estudo permitiu concluir que há pouca utilização do MLMC nas áreas de ciências agrônômicas e florestais; que a posição do topo da altura comercial da árvore (100%) é a diferenciadora para todos os grupos, sendo a posição da base não própria para a diferenciação e que a forma geral de variabilidade dos dados indica a necessidade de modelos que considerem a estrutura de dependência no estudo da densidade básica da madeira.

---

Palavras chaves: Modelo linear multivariado de crescimento, medidas repetidas, densidade básica da madeira de eucaliptos.

USE OF GROWTH MULTIVARIATE LINEAR MODEL IN THE STUDY OF BASIC DENSITY OF EUCALYPTUS. Botucatu, 2014. 65p. Tese (Doutorado em Agronomia – Energia na Agricultura) – Faculdade de Ciências Agrônômicas, Universidade Estadual Paulista.

Author: GISLAINE CRISTINA BATISTELA

Adviser: CARLOS ROBERTO PADOVANI

## 2 SUMMARY

In biological situations in which there is structural dependence within experimental unit and observing a more accurate statistical viewpoint it should be accounted not only data variance but also the covariances (variations among characteristics within the same unit). In this study it is presented analytical procedures data for such situation using MANOVA technology (Multivariate Variance Analysis), growth multivariate linear models (MLMC) for wood basic density estimation from eucalyptus considering 5 sample heights on tree trunks from base to top (sampled disks 0% - base -, 25%, 50% 75%, 100% of tree commercial height) and also comparing the precision of polynomial regression model estimators to those obtained from MLMC technique. Used data set have basic density values from three groups of eucalyptus trees being *Eucalyptus saligna*, *E. grandis* e *E. grandis* x *E.urophylla*, with  $n_1=27$ ,  $n_2=31$ ,  $n_3=30$  experimental units, respectively. Results showed that there is low usage of MLMC within Agronomic and Forestry Sciences; that the tree top commercial position (100%) is the differentiating for all in the groups being the bottom position inappropriate for differentiation and that the general data variability indicates the necessity of models which should consider the structural dependence in the study of wood basic density.

---

Key words: Growth multivariate linear model, repeated measurements, basic density of eucalyptus wood.

### 3 INTRODUÇÃO

A madeira como matéria prima resultante de árvores constitui-se em material com uma grande variabilidade em suas propriedades, tanto entre árvores de mesma espécie como dentro de uma mesma árvore. As variações encontradas nas propriedades físicas da madeira dentro de uma mesma árvore podem ocorrer ao longo da direção longitudinal do tronco (da base ao topo) e ao longo da direção radial (da medula à casca).

A densidade básica da madeira varia em função de muitos fatores tais como a idade e taxa de crescimento das árvores, o clima, os tratamentos silviculturais, o sítio, o local de amostragem no tronco, entre outros. A literatura especializada tem destacado ser a densidade básica a propriedade mais utilizada para análise de variabilidade entre árvores e dentro de uma mesma árvore.

Em virtude dos resultados ainda insatisfatórios para o desenvolvimento de modelos de respostas gerais nos trabalhos desenvolvidos, pesquisadores da área de ciências agronômicas e florestais ainda não têm encontrado um padrão de variação para a densidade básica da madeira para as várias espécies de eucaliptos estudadas.

Aprofundando o estudo na literatura especializada, verifica-se que, embora a maioria dos autores revele que existe uma profunda variação da densidade básica da madeira entre e dentro das árvores, não se mostra como fator comum de análise de dados desses experimentos a preocupação quanto à utilização de procedimentos estatísticos, principalmente, na construção de modelos preditores, ou seja, o fato de as medidas serem realizadas em uma mesma unidade experimental implica dependência entre as observações, negando, assim, a suposição de independência, pressuposto necessário para a aplicação dos

modelos clássicos de análise de variância e regressão na análise dos dados, expediente comum em grande parte dos artigos científicos publicados.

Normalmente, os modelos de respostas utilizados nas áreas de ciências agronômicas e florestais desconsideram a estrutura de variação conjunta da densidade básica da madeira em relação à altura do tronco da árvore na direção longitudinal (matriz de variância e covariância) e, conforme indicam as exigências das técnicas estatísticas utilizadas, qualquer inferência sobre os dados está seriamente comprometida. Nesse sentido, os modelos lineares multivariados de crescimento se justificam corretamente em situações biológicas, em particular nas áreas citadas, onde há configuração clara da estrutura de dependência na unidade experimental.

Pautado nisso, o que se propõe neste estudo é a utilização de um método mais adequado e preciso (em relação aos métodos utilizados atualmente) para a análise da densidade básica da madeira, por meio do uso de modelos de regressão multivariada polinomiais considerando a estrutura completa de variação da densidade básica entre e dentro de árvores, levando-se em conta a altura no sentido base topo (longitudinal).

Portanto, objetiva-se no presente estudo:

- 1) Empregar a técnica de análise de variância multivariada (MANOVA) para a comparação dos perfis médios de resposta dos grupos de eucaliptos estudados e estabelecer a proximidade entre estes perfis pela distância generalizada de Mahalanobis e comparar os resultados obtidos com o procedimento univariado.

- 2) Estabelecer modelos lineares multivariados de crescimento envolvendo o modelo polinomial para a estimação da densidade básica da madeira de árvores de eucaliptos, considerando o vetor de respostas amostrado em cinco alturas medidas ao longo do tronco no sentido base topo.

- 3) Comparar a precisão dos estimadores do modelo polinomial obtido pelo processo de regressão polinomial e pela técnica de modelos lineares multivariados de crescimento.

## 4 REVISÃO DE LITERATURA

### 4.1 O gênero eucalipto e a importância da propriedade densidade básica na caracterização tecnológica da madeira

O eucalipto possui mais de 600 espécies, mas somente algumas são mais bem adaptadas no Brasil no sentido de exploração econômica. No setor de madeira serrada, o valor da madeira de eucalipto cresce devido a sua ótima qualidade, boa adaptabilidade a vários tipos de ambiente, assemelhando-se às espécies nativas e com a vantagem de ter grande variedade, o que estimula empresas e instituições de pesquisas a investirem em programas de melhoramento genético do eucalipto (MARTINS et al., 2005; VIANA et al., 2010).

As florestas plantadas de eucalipto constituem-se como as mais importantes do Brasil devido ao rápido desenvolvimento das árvores, capacidade para produzir árvores com boa forma, alta produtividade e aplicabilidade de sua madeira aos setores moveleiro, madeireiro, energético e de celulose e papel em substituição às madeiras nativas (BATISTA; KLITZKE; SANTOS, 2010; VIANA et al., 2010).

De acordo com Benjamin (2006, p. 9), as propriedades físicas da madeira:

Avaliam características intrínsecas da madeira (como aparência, cor, densidade aparente e básica, teor de umidade) ou suas reações a estímulos não mecânicos como as alterações dimensionais por perda ou ganho de água (retratibilidade e inchamento), a reação ao calor (condutividade e

difusibilidade térmica, expansão térmica e combustão), a reação à eletricidade (condutividade, constante dielétrica), por exemplo.

A densidade básica da madeira ( $\rho_b$ ) tem sua definição já estabelecida por vários autores como a relação entre massa seca ( $M_0$ ) da amostra e o volume verde ou saturado ( $V_V$ ), indicada pela fórmula  $\rho_b = \frac{M_0}{V_V}$ .

Foelkel, Mora e Menochelli (1992) afirmaram que, apesar de existir variabilidade da madeira dentro e entre árvores e entre espécies e gêneros, a densidade básica estabeleceu-se ao longo dos anos como um índice para avaliar a qualidade da madeira. Tal fato ocorreu pela facilidade da determinação da densidade básica e pelas ótimas relações que ela mostra com suas utilizações. Os autores ressaltaram ainda que “[...] essa universalização não pode e não deve ser absoluta, pois há perigo de se cometerem exageros e erros [...]” (FOELKEL; MORA; MENOCELLI, 1992, p. 35).

Ruy (1998) relatou que certas características anatômicas como comprimento, espessura da parede e diâmetro do lume das fibras, porcentagens de vasos e de parênquima, possuem relação com a densidade básica da madeira e exercem influência em algumas de suas propriedades e nos usos finais da madeira. Além disso, em relação às propriedades físicas da madeira, a densidade básica é a mais empregada como parâmetro de seleção, sendo influenciada pela base genética e ambiente e pelo resultado da interação desses dois fatores.

Cardoso et al. (2002) afirmaram que, dentre as propriedades da madeira, a densidade básica é um parâmetro de máxima significância, é complexa e resultante da combinação de vários fatores, tais como anatômicos, físicos e químicos.

Jorge e Pereira (1998) citado por Matos et al. (2003, p. 2) relataram que a densidade básica ou massa volumétrica é considerada a mais importante dentre todas as características da madeira destacando que:

É resultante da integração dos aspectos estruturais, anatômicos e químicos da madeira, sendo a principal responsável pelas características de resistência e produção de energia, entre outras, que condicionam a qualidade do produto final.

A densidade básica, o teor de umidade e a retratibilidade são as propriedades físicas mais utilizadas na caracterização da madeira, sendo a densidade básica o índice mais utilizado nas especificações de qualidade. A densidade básica é um fator importante para a avaliação da qualidade, pois é de fácil determinação e tem relação com a maioria das características, correlaciona-se diretamente com o peso e com as propriedades físicas e mecânicas da madeira, logo, nesse sentido, a propriedade mais utilizada na avaliação da madeira (BRASIL; FERREIRA, 1971; BENJAMIN, 2006).

Eisfeld et al. (2009) relataram que a densidade básica da madeira é resultante de uma complexa combinação dos seus constituintes internos; isso a torna um parâmetro muito utilizado para a qualificação, em virtude de sua relação próxima com várias outras propriedades, o que propicia inúmeras informações sobre as características da madeira.

Batista, Klitzke e Santos (2010, p. 667) apresentaram que:

Dentre as diversas propriedades da madeira, a densidade é a mais utilizada, pela facilidade de ser determinada e por se correlacionar diretamente com as propriedades físicas e mecânicas da madeira e com a composição celular.

Batista, Klitzke e Santos (2010) estudaram *Eucalyptus saligna*, *E. grandis* e *E. dunnii* e concluíram que houve relação direta entre a densidade básica, contração volumétrica máxima e coeficiente de retratibilidade volumétrico máximo entre as três espécies estudadas.

#### **4.2 Variações da densidade básica da madeira**

As variações da densidade básica dependem das mudanças na proporção de vasos e das espessuras das paredes celulares das fibras de eucalipto (OLIVEIRA; SILVA, 2003). Os autores ainda relataram que o crescimento da densidade pode ser o resultado dos aumentos da espessura da parede celular das fibras ou da proporção de fibras em relação, por exemplo, à proporção de vasos. De maneira inversa, um aumento

na proporção de vasos, com ou sem decréscimo na espessura da parede celular, leva à redução na densidade básica.

Brasil e Ferreira (1971) estudaram as variações da densidade básica da madeira em três espécies de eucaliptos (*Eucalyptus alba* Reinw, *E. saligna* Smith e *E. grandis* Hill ex Maiden) aos cinco anos de idade em função das condições ecológicas e dos espaçamentos nas regiões de Itupeva (SP) e Mogi-Guaçu (SP). Concluíram que, independentemente das espécies, a densidade básica da madeira variou em função da localidade. Em Mogi-Guaçu, a densidade básica média (0,542 g/cm<sup>3</sup>) é maior que em Itupeva (0,460 g/cm<sup>3</sup>), fato atribuído às diferenças ecológicas das duas regiões.

Foelkel, Mora e Menochelli (1992) estudaram o relacionamento da densidade básica da madeira com algumas características físicas, químicas e anatômicas de cinco espécies de eucaliptos (*Eucalyptus grandis*, *E. saligna*, *E. tereticornis*, *E. camaldulensis* e *E. citriodora*) entre sete e nove anos. Os autores mostraram que existem algumas propriedades importantes da celulose de eucalipto (volume específico, resistência ao ar e absorção de água) mais dependentes da densidade básica do que da espécie. Finalizaram com a seguinte sugestão: “[...] cautela nas comparações entre espécies com base apenas na densidade básica, mas enfatizam a importância desse índice na avaliação da qualidade da madeira de eucalipto [...]” (FOELKEL; MORA; MENOCELLI, 1992, p. 40).

Downes et al. (1997) depois de avaliarem publicações no assunto (âmbito internacional), apresentaram quatro tendências de comportamento da variação da densidade básica da madeira de árvores de eucaliptos: (i) a densidade básica da madeira aumenta ao longo do fuste no sentido base topo; (ii) a densidade básica da madeira diminui ao longo do fuste no sentido base topo; (iii) a densidade básica da madeira inicialmente diminui e depois aumenta ao longo do fuste no sentido base topo; (iv) a densidade básica da madeira não se altera ao longo do fuste no sentido base topo.

Rosa et al. (2001) avaliaram as variações da densidade básica da madeira, volumes e proporções volumétricas de cerne, alburno e casca, ao longo do tronco (discos retirados a 50 cm da base, 25%, 50%, 75% e 100% da altura comercial) de árvores de um clone de *E. saligna* e demonstraram que existem variações entre as árvores, mesmo sendo procedentes de um mesmo clone e de mesmo sítio. Afirmaram variarem as características tanto na direção radial como na direção longitudinal. Concluíram que as árvores mostram variações significativas em suas características de acordo com a altura de amostragem do disco e, para a densidade básica da madeira como um todo (cerne mais

alburno) houve um decréscimo nas posições entre a base e 25%, aumentando a partir desta posição até 100% da altura comercial.

No Brasil, de acordo com Benjamin (2002, p. 20-21), muitas pesquisas vêm sendo desenvolvidas com o objetivo de melhorarem o entendimento da variação da densidade básica da madeira de eucalipto. Destacam-se:

Para *Eucalyptus grandis*, a densidade básica da madeira aumenta da base ao topo da árvore (Ferreira, 1972) – árvores de 11 a 14 anos de idade. Já Souza et al. (1986) afirmam que a densidade básica da madeira diminui até 25% da altura comercial e depois aumentou até o topo em árvores com 7 anos de idade; Para *Eucalyptus propinqua*, a densidade básica da madeira aumenta até a metade da altura do tronco, depois diminui (Brasil et al., 1977) – árvores com cinco anos de idade.

Benjamin (2002) relatou, ainda, a dificuldade na determinação precisa de padrões de variação da densidade básica da madeira ao longo do fuste da árvore, principalmente, para algumas espécies de eucaliptos.

Cardoso et al. (2002) estudaram a variabilidade e o comportamento da densidade básica na direção longitudinal do tronco (discos amostrados a 40 cm da base, 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90% e 100% da altura comercial da árvore) da espécie *E. globulus* Labil., com oito anos de idade. Os autores concluíram, por meio de um gráfico, que a densidade básica da madeira é crescente da base para o topo e que o disco retirado na posição relativa a 30% da altura comercial da árvore apresenta o mesmo valor da densidade básica média ponderada da árvore toda.

### **4.3 Modelos estatísticos em estudos longitudinais nas ciências agronômicas, florestais e zootécnicas**

Esta revisão apresenta-se sob duas considerações: a primeira envolve modelos estatísticos ajustados considerando os erros independentes e, na sequência, os modelos ajustados que envolvem procedimentos multivariados de dados direcionados às áreas das ciências agronômicas, florestais e zootécnicas.

Em relação a modelos matemáticos e estocásticos, no estudo da densidade básica da madeira tem-se Nogueira e Vale (1997), que empregaram modelo de regressão linear para estudar o comportamento da densidade básica da madeira de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* procedente do cerrado brasileiro (idade não mencionada) no sentido base topo. Foram feitas medidas da densidade básica em diversas posições relativas ao longo do tronco da árvore (0%, 25%, 75% e 100% da altura comercial e no DAP - diâmetro a altura do peito). Concluíram que a variação da densidade básica mostrou-se melhor representada por meio do modelo linear ( $r^2 = 0,97$ ) decrescendo da base até o topo.

Sturion et al. (1987) avaliaram a densidade básica em doze espécies de eucaliptos (*E. camaldulensis* Dehnh., *E. citriodora* Hook., *E. cloeziana* F. Muell., *E. grandis* W. Hill ex Maiden, *E. maculata* Hook., *E. microcorys* F. Muell., *E. pellita* F. Muell., *E. pilularis* Smith, *E. propinqua* Deane & Maiden, *E. saligna* Smith, *E. tereticornis* Smith e *E. urophylla* S. T. Blake) aos dez anos e meio ao longo do tronco da árvore em discos amostrados nas posições correspondentes ao DAP e a 0%, 25%, 50%, 75% e 100% da altura comercial. Com o objetivo de determinar a densidade básica média da árvore em relação à posição relativa dos discos amostrados ao longo da árvore em sua altura comercial, utilizaram uma análise gráfica e concluíram que:

- para *E. cloeziana*, *E. tereticornis* e *E. grandis*, a densidade básica decresce da base até a posição relativa a 25% da altura comercial, cresce até 50% e, posteriormente, volta a decrescer;
- para *E. citriodora*, *E. camaldulensis*, *E. microcorys*, *E. pilularis*, *E. urophylla* e *E. saligna*, observaram que a densidade básica decresce no sentido basetopo;
- para *E. pellita* e *E. propinqua*, a densidade básica não varia expressivamente ao longo do tronco;
- para *E. maculata*, a densidade básica mostrou-se decrescente da base para a posição 25% da altura comercial e, em seguida, ocorre um pequeno acréscimo no sentido base topo.

Vale et al. (1999) estudaram a madeira de *Acacia mangium* Willd aos sete anos de idade com o objetivo de determinar a densidade básica média, estabelecer a variação longitudinal da densidade básica e as relações entre a densidade básica média e densidade básica medida em cinco discos retirados nas posições relativas a 0%, 25%, 50%, 75%, 100% e DAP (1,30m do solo) ao longo do tronco. Por meio de regressão polinomial, encontrou-se um polinômio de segundo grau ( $r^2=0,81$ ) para explicar a variação longitudinal da densidade básica da madeira, a qual apresenta uma diminuição até a metade da altura do

tronco e uma tendência de aumento em direção ao topo da árvore. Este estudo também mostrou em particular para esses dados, por meio da regressão linear ( $r^2=0,83$ ), que a altura de 25% do tronco é aquela que mais se aproxima da densidade básica média em função da densidade básica. Ainda, segundo os autores, caso ocorra dificuldade para retirar amostras a 25% da altura do tronco, na amostragem não-destrutiva, pode-se optar pela altura do DAP, pois 78,18% da relação entre a densidade básica média da árvore e a densidade básica obtida no DAP são explicadas pelo modelo proposto.

Haselein et al. (2004) avaliaram as características tecnológicas da madeira de *E. grandis* de 27 anos e, por meio da análise de regressão, ajustaram um modelo para estimar a densidade básica em função da raiz quadrada da posição (discos retirados nas posições 0% - base, 25%, 50%, 75% e 100% da altura comercial e DAP). Verificaram que a variação da densidade básica na direção longitudinal da árvore possui tendência decrescente entre o DAP e 25%, tornando-se crescente até 100% da altura comercial.

Mattos et al. (2011) analisaram a variação longitudinal da densidade básica das madeiras de *Araucaria angustifolia* (Bertol.) Kuntze, *Pinus elliottii* Engelm. e *Pinus taeda* L. por meio de vários modelos de regressão, ajustando equações para a estimativa da densidade básica da madeira em função da altura (em metros) e em relação às posições relativas dos discos amostrados ao longo do tronco da árvore no sentido base topo (0%, DAP, 25%, 50%, 75% e 100% da altura comercial). Concluíram que os modelos que explicam de forma significativa a variação da densidade básica da madeira ao longo do tronco da árvore para as espécies em estudo são os polinomiais, mostrando que a densidade básica diminui da base para o topo da árvore.

Couto et al. (2012) determinaram o padrão da variação longitudinal da densidade básica da madeira de clones de *Eucalyptus* sp. aos 42 meses de idade, sendo cinco árvores por clone. Para determinação da densidade básica foi retirado um disco na base da árvore, o seguinte no DAP e, a partir desse ponto, de metro em metro até a altura comercial (diâmetro de 5 cm com casca). Para cada árvore amostrada foram ajustados modelos polinomiais de 2º, 3º, 4º e 5º grau na caracterização da variação longitudinal da densidade básica. Os autores observaram, por meio de análise residual, que o modelo polinomial de 5º grau apresentou melhor qualidade na predição da densidade básica da madeira em função da altura da árvore.

Sette Jr. et al. (2012) estudaram árvores de *E. grandis* com 24, 36 e 72 meses de idade, sendo cinco árvores por idade, e para determinação da densidade básica

da madeira foram retirados discos em diferentes alturas do tronco, sendo o primeiro na base e os outros de três em três metros até a altura total da árvore, de acordo com a NBR 11941/2003. Concluíram, por meio de análise gráfica, que o modelo de variação longitudinal da densidade básica da madeira nas diferentes posições relativas do tronco das árvores de eucalipto, comum nas três idades, caracterizou-se pelo decréscimo da base até três metros e aumento até a extremidade do tronco.

Eloy et al. (2013) examinaram a variação longitudinal da densidade básica de árvores considerando duas espécies florestais, *E. grandis* e *Acacia mearnsii*, de um povoamento com 36 meses de idade. Os discos para determinação da densidade básica da madeira foram retirados de 72 árvores nas seguintes posições relativas do tronco: 10 cm da base, DAP, 25%, 50% e 75% da altura total da árvore. Por meio da análise de regressão linear múltipla, ajustaram-se modelos em função da posição relativa na direção longitudinal para as duas espécies e utilizaram-se o coeficiente de determinação ajustado e o erro padrão na seleção dos preditores mais consistentes aos dados. De acordo com os autores, apesar dos baixos coeficientes de determinação resultantes dos modelos selecionados, estes expressam a real variação longitudinal da densidade básica das árvores. Concluíram que, para a espécie *E. grandis* a densidade básica da madeira decresce da base até, aproximadamente, o DAP e a partir desta posição segue com pouco crescimento em função da altura; e para *Acacia mearnsii*, ocorre uma tendência de decréscimo da densidade básica da base até a posição relativa que corresponde a 50% da altura total, e a partir dessa posição cresce, em função da posição relativa no sentido base topo do tronco.

Quanto aos estudos que envolveram procedimentos multivariados, Rosa et al. (2000) estimaram o modelo linear de crescimento que melhor se ajustava aos pesos de 32 cordeiros avaliados sequencialmente aos 24, 35, 46 e 57 dias de idade, segundo sexo. Para o procedimento analítico das curvas, utilizaram-se quatro critérios da análise multivariada, que são: Wilks, Pillai, Hottelling-Lawley e Roy. Considerou-se como modelo de ajuste mais adequado para a matriz de variâncias e covariâncias o autorregressivo de primeira ordem, com heterogeneidade de variâncias e, como critério de estimação, o de máxima verossimilhança.

Considerando a dificuldade existente quanto a programas computacionais acessíveis a pesquisadores das áreas agrônomicas, biológicas e da saúde, e a falta de entendimento da complexidade da estrutura de análise dos dados longitudinais, Oshiiwa e Padovani (2005) apresentaram aos participantes dessas áreas um programa

computacional com facilidade de manuseio e simplicidade operacional. Também discutiram as vantagens das técnicas multivariadas na preservação da estrutura de dependência dos dados em relação aos procedimentos convencionais utilizados na experimentação agrônômica. Para ilustrarem o procedimento os autores empregaram alturas, em centímetro, de plantas de alhos do tipo caçador considerando os grupos testemunha e tratado, em que foram realizadas avaliações aos 20, 30, 40 e 50 dias após a plantação obtendo as curvas de crescimento que permitem estimar o efeito de tratamentos relacionados a valores de altura não observados experimentalmente.

Freitas (2007) avaliou três alternativas de técnicas estatísticas para a análise de dados de produtividade da cana-de-açúcar consideradas na mesma unidade experimental. Na análise dos dados, utilizou-se o modelo univariado, conforme o planejamento experimental do tipo *split-plot on time*; o modelo multivariado, o qual utiliza os testes de Wilks, Pillai, Hottelling-Lawley e Roy para mostrar o efeito do fator ano e interação genótipo x ano; e o modelo misto, que possibilita a seleção de matriz que melhor representa os dados. Os resultados dos procedimentos indicaram não existir diferença entre os testes estatísticos para as diferentes metodologias.

Macedo, Barbin e Mourão (2009) analisaram dados referentes aos pesos de animais da raça Nelore desde o nascimento até 800 dias de vida, sendo que cada animal forneceu uma medida dentro de seis intervalos de idade (em dias) especificados, caracterizando dados longitudinais. O propósito deste estudo foi avaliar o desempenho dos modelos de regressão aleatória nas bases de funções de Legendre, de Jacobi modificada e trigonométricas em dados longitudinais. Para seleção de modelos, utilizaram o critério de informação Bayesiano de Schwarz (BIC), o qual selecionou os modelos Legendre de ordem seis (com o menor BIC), Jacobi de ordem cinco e trigonométrica de ordem seis.

Carvalho (2010) empregou modelos não lineares generalizados de efeitos fixos e de efeitos mistos para estimar a densidade básica ao longo do tronco de 46 árvores de *Eucalyptus* sp. considerando discos retirados nas posições de 0%, 25%, 50% e 75% da altura total da árvore e no DAP. O autor concluiu que o modelo de efeito misto é preciso e retrata bem a realidade dos dados conseguindo melhores estimativas dos parâmetros em torno de 50% em relação ao modelo de efeitos fixos.

A influência de três densidades de plantas (distância entre elas) no cultivo de mamona (*Ricinus communis* L.) e a relação destas com a forma de crescimento da planta foram avaliadas por Amador (2010). Para explorar de forma adequada os dados,

considerando sua estrutura de covariância, foi usada a técnica de análise de dados longitudinais por meio de modelagem de curvas de crescimento com a metodologia de modelos mistos. O estudo resultou na modelagem de duas curvas polinomiais de grau dois, uma delas relativa às densidades 1,0m e 1,4m, que proporcionaram a maior altura da planta, não diferindo significativamente entre si; e outra curva polinomial de grau dois para a densidade de cultivo de 1,2m, na qual a planta apresentou um menor crescimento.

Mariguele et al. (2011) avaliaram métodos de análise de medidas repetidas para o melhoramento genético da pinha e admitiram diferentes estruturas de variâncias e covariâncias para os efeitos genéticos e residuais. Os autores estudaram 20 progênies durante três anos de colheitas (2003, 2004 e 2005) em um experimento com quatro parcelas e cinco repetições e concluíram, por meio de critérios de seleção de modelos, que os modelos SAD (antependência estruturada) e o modelo multivariado são os melhores para representar os dados.

Em seu estudo, Rocha (2012) teve como um de seus objetivos comparar a produtividade volumétrica de 15 clones híbridos de *Eucalyptus* spp. aplicando a análise de variância multivariada de medidas repetidas ao longo do tempo. Foram realizadas medidas das circunferências à altura do peito e da altura total das plantas úteis a cada seis meses a partir do plantio, obtiveram-se, ao final do experimento, medidas aos 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90 meses. Aos 90 meses as árvores foram cubadas rigorosamente, onde a altura total foi medida com trena e o volume individual foi obtido por meio do método de Smalian. Por meio dos testes de Wilks, Pillai, Hottelling-Lawley e Roy verificou-se que existe efeito do tempo e da interação do tempo *versus* clones na variável volume. Em seguida, vários modelos de crescimento foram ajustados para descrever a produtividade volumétrica dos clones de híbridos de *Eucalyptus* spp.

Em síntese, a revisão de literatura mostrou que a maioria dos estudos que envolvem ajustamento de curvas como modelos preditivos da resposta média da densidade básica da madeira irrelevam a correlação existente com a posição da altura de retirada do disco. Sob o aspecto de metodologias de ajustamento de curvas de respostas a maioria está em descuido com o princípio da independência dos erros para esses ajustes. Sem prejuízo prático da resposta, deve ser considerado que os resultados estimados carecem de consistência estatística dos métodos.

## 5 MATERIAL E MÉTODOS

### 5.1 Material

Os dados originais são relativos a árvores de eucaliptos de oito anos de idade pertencentes a três talhões de duas espécies e um híbrido de eucalipto. Os talhões, com 250 árvores cada, fazem parte de um experimento clonal localizado na Fazenda Santa Rosa em São Miguel Arcanjo, SP – longitude de 48°03'W, latitude de 23°58'S e uma altitude de 672 metros em relação ao nível do mar; com precipitação média anual de 1200mm ± 225mm, temperatura média anual de 18°C –, pertencente à Companhia Suzano de Celulose e Papel. De cada talhão foram selecionadas 50 árvores, sendo 50 de *E. grandis*, 50 de *E. saligna* e 50 híbridos de *E. grandis* x *E. urophylla* (BENJAMIN, 2002).

De cada árvore foram amostrados discos ao longo do tronco a 0% (base), 25%, 50%, 75%, 100% de sua altura comercial<sup>1</sup> – respectivamente os discos A, C, D, E e F – e à altura do peito (disco B), conforme representado na Figura 1, a partir dos quais se determinou o valor da densidade básica da madeira, mensurada em g/cm<sup>3</sup> (BENJAMIN, 2002).

No presente estudo, foram feitas adaptações no conjunto de dados para que as exigências de normalidade dos erros e homogeneidade das matrizes de variâncias e covariâncias fossem satisfeitas. Nesse sentido, o novo conjunto de dados para a densidade básica das árvores relativas aos três grupos considerados, G1 = grupo 1 (*E. saligna*), G2 = grupo 2 (*E. grandis*) e G3 = grupo3 (*E. grandis* x *E. urophylla*) permaneceram,

---

<sup>1</sup> A altura comercial para esse estudo, foi considerada como sendo a altura em que o diâmetro do tronco chega a um limite mínimo de 5cm.

respectivamente, com  $n_1 = 27$ ,  $n_2 = 31$  e  $n_3 = 30$  unidades experimentais. Os discos considerados foram: disco A, disco C, disco D, disco E e disco F, ou seja, os discos amostrados a 0% (base), 25%, 50%, 75%, 100% da altura comercial da árvore (Figura 1).

Para o processamento das análises estatísticas foram utilizados o pacote *Office Microsoft Excel* e o *software* aberto e gratuito R (2010).

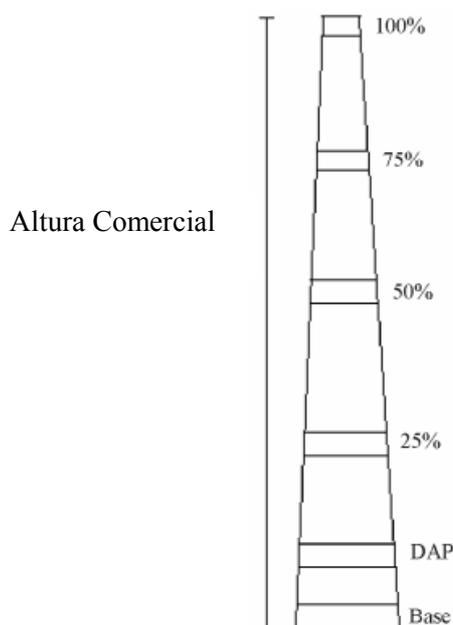


Figura 1. Esquema de forma de amostragem utilizado nas árvores  
Fonte: Trugilho, 2009.

## 5.2 Métodos

São considerados como dados longitudinais aqueles obtidos por medidas de uma mesma variável resposta em cada unidade experimental de um conjunto de dados, por exemplo, tempos, doses de uma droga, doses de adubos, entre outros. As unidades experimentais, avaliadas em várias situações e classificadas em subpopulações (tratamentos ou grupos), constituem o conjunto utilizado em experimentos planejados em dados longitudinais (SOUZA, 1989). Objetiva-se, em estudos longitudinais, determinar o comportamento de uma variável ao longo da dimensão considerada nos diversos tratamentos. No presente estudo os discos estarão à semelhança das posições de avaliação e os tratamentos correspondem aos grupos. Na análise de dados longitudinais estuda-se o efeito dos tratamentos, o efeito das condições de avaliação, o efeito da interação entre

tratamentos e condições de avaliação e complementa-se o processo com ajustes de modelos para explicar a variação da resposta média.

De maneira genérica, os valores da densidade básica da madeira são apresentados por um vetor composto de cinco mensurações realizadas em discos amostrados na direção longitudinal de uma mesma árvore (unidade experimental), o que caracteriza, portanto, medidas repetidas na mesma unidade (dados longitudinais). O conjunto de valores das unidades experimentais relativo aos três grupos em estudo, sendo duas espécies e um híbrido de eucalipto, define a matriz geral de dados multivariados (Tabela 1) compondo-se de  $n$  linhas e  $p$  colunas.

Tabela 1. Representação genérica dos dados de um experimento multivariado envolvendo medidas repetidas

Grupo	Unidade Experimental	Posição de avaliação			
		$t_1$	$t_2$	...	$t_p$
1	1	$y_{111}$	$y_{112}$	...	$y_{11p}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	$n_1$	$y_{1n_11}$	$y_{1n_12}$	...	$y_{1n_1p}$
2	1	$y_{211}$	$y_{212}$	...	$y_{21p}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	$n_2$	$y_{2n_21}$	$y_{2n_22}$	...	$y_{2n_2p}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$g$	1	$y_{g11}$	$y_{g12}$	...	$y_{g1p}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$g$	$n_g$	$y_{gn_g1}$	$y_{gn_g2}$	...	$y_{gn_gp}$

No contexto apresentado na Tabela 1,  $y_{ijk}$ , denotado pelos índices  $i=1, \dots, g$  (grupo),  $j = 1, \dots, n_i$  (unidade experimental) e  $k = 1, \dots, p$  (níveis da posição de avaliação), representa a resposta encontrada no  $k$ -ésimo nível da posição de avaliação da  $j$ -ésima unidade experimental do  $i$ -ésimo grupo.

Considerando cada linha da Tabela 1 como um vetor de resposta multivariada de ordem  $p$ , tem-se:

1) Representação matricial

$\mathbf{Y} = (y_{ijk})$  de ordem  $n \times p$ , sendo  $n = n_1 + \dots + n_g$ .

$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}'_{ij})$ ; com  $\mathbf{y}'_{ij} = (y_{ij1}, \dots, y_{ijp})$ ;

2) Vetor de médias amostrais

$\bar{\mathbf{y}}'_i = (\bar{y}_{i1}, \dots, \bar{y}_{ip})$  é o vetor de médias do grupo  $i$  e  $\bar{y}_{ik} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ijk}$ , com  $i = 1, \dots, g$  e  $k = 1, \dots, p$ ;

3) Matriz de variâncias e covariâncias amostrais

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} s_{11}^{(i)} & s_{12}^{(i)} & \dots & s_{1p}^{(i)} \\ s_{21}^{(i)} & s_{22}^{(i)} & \dots & s_{2p}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1}^{(i)} & s_{p2}^{(i)} & \dots & s_{pp}^{(i)} \end{pmatrix} = [s_{kk'}^{(i)}],$$

com:

$s_{kk}^{(i)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ijk}^2 - n_i \bar{y}_{ik}^2}{n_i - 1}$ , a variância amostral do  $k$ -ésimo nível da posição de avaliação relativa ao grupo  $i=1, \dots, g$ ;

$s_{kk'}^{(i)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ijk} y_{ijk'} - n_i \bar{y}_{ik} \bar{y}_{ik'}}{n_i - 1}$ , a covariância amostral entre o  $k$ -ésimo e  $k'$ -ésimo níveis da posição de avaliação relativa ao grupo  $i$  para  $k, k' = 1, \dots, p$  e  $k \neq k'$ .

O modelo para o estudo do comportamento biológico, considerando as respostas da densidade básica da madeira em função da posição relativa do disco amostrado no tronco da árvore no sentido base topo, deve ser estabelecido por medidas que envolvem tanto a tendência central como a variabilidade dos dados e, de uma maneira geral, são apresentadas pelo vetor de médias de cada grupo ( $\bar{\mathbf{y}}'_1, \bar{\mathbf{y}}'_2, \bar{\mathbf{y}}'_3$ ) e matrizes de variâncias e covariâncias das posições dos discos ao longo do fuste da árvore para cada grupo ( $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ ).

A partir da matriz dos dados da densidade básica da madeira coletados nas árvores amostradas, realizou-se a técnica da análise de variância multivariada (MANOVA) para comparação das respostas médias dos três grupos (MORRISON, 2004).

De acordo com Hair Jr. et al. (2005) para os procedimentos do teste estatístico multivariado da MANOVA, algumas suposições devem ser satisfeitas:

1) O vetor de variáveis deve seguir uma distribuição normal multivariada, ou seja, os erros devem ter distribuição normal multivariada com matriz de variâncias e covariâncias  $\Sigma$ .

Ainda, segundo os autores, violações dessa suposição têm pouco impacto em grandes amostras.

2) Homocedasticidade: as matrizes de variâncias e covariâncias devem ser idênticas para todos os grupos ( $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_g = \Sigma$ ).

Para realizar o teste de hipóteses relacionado à estrutura multivariada da MANOVA, encontrou-se a matriz produto resultante da multiplicação da matriz relativa à variação entre os grupos e a inversa da matriz relativa à variação dentro dos grupos, o que inclui todos os níveis da posição de avaliação.

Em seguida, obtiveram-se os autovalores da matriz produto, a partir dos quais, foram determinadas as estatísticas de Roy, Wilks, Lawley-Hotelling e Pillai para a tomada de decisão sobre a igualdade dos vetores de médias, considerando um nível de significância definido *a priori*. Complementou-se o procedimento com a construção dos intervalos de confiança simultâneos (ICS) de Hotelling para todas as possíveis diferenças entre pares de médias.

Para investigar quão dissimilares são os grupos considerados foram empregados seus centroides e determinaram-se entre eles as distâncias genéticas, indicadas pela distância generalizada de Mahalanobis (JOHNSON; WICHERN, 2007).

Terminada a fase da comparação dos grupos de eucaliptos envolvendo a técnica da MANOVA e a distância generalizada de Mahalanobis, na sequência detalhou-se a utilização dos modelos de crescimento univariado e multivariado da densidade básica da madeira em função da posição relativa do disco amostrado no tronco da árvore no sentido base topo. Os modelos empregados são descritos nos itens a seguir:

1) Modelo de regressão polinomial com erros aleatórios independentes: significa considerar a posição relativa dos discos amostrados ao longo do tronco da árvore no sentido base topo como independentes, ou seja, supor que os erros aleatórios possuem matriz de variâncias e covariâncias diagonal dada por  $\sigma^2 I_p$ , em que  $\sigma^2$  é a variância comum dos erros e  $I_p$  é a matriz identidade de ordem  $p$ . A equação geral de regressão polinomial para estimar a densidade básica da madeira ao longo do tronco da árvore, em cada grupo ( $i=1, 2, 3$ ), é expressa por:

$$y_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}P_1(T) + \alpha_{i2}P_2(T) + \dots + \alpha_{i,q-1}P_{q-1}(T) + \varepsilon_i, \quad (1)$$

sendo  $P_l(T)$  polinômio ortogonal de grau  $l$  ( $l = 0, 1, \dots, q - 1$ ),  $q \leq p$ , com  $p = 5$  número de níveis da posição de avaliação (posição relativa do disco amostrado ao longo do tronco) e  $\alpha_{i,l}$  o coeficiente associado ao polinômio.

2) Modelo linear multivariado de crescimento também conhecido como curva de crescimento: sob esse enfoque, a matriz de variâncias e covariâncias é simétrica e positiva definida, cujos elementos da diagonal representam a variância da densidade básica da madeira em cada disco retirado do tronco da árvore na direção longitudinal, os elementos fora da diagonal representam a covariância da densidade básica entre dois discos quaisquer.

Por fim, optou-se por realizar uma comparação das predições dos modelos utilizando a soma de quadrado dos desvios entre os valores observados e estimados da densidade básica da madeira mensurada em discos amostrados ao longo do fuste da árvore (soma de quadrado total dos erros). Nesse contexto, estabeleceu-se, para os grupos estudados ( $i=1, 2, 3$ ):

$\bar{y}'_{iOBS} = [\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \bar{y}_{i3}, \bar{y}_{i4}, \bar{y}_{i5}]$  como sendo o vetor de médias das densidades básicas da madeira observadas do grupo  $i$ ;

$\hat{y}'_{iMRP} = [\hat{y}_{i1MRP}, \hat{y}_{i2MRP}, \hat{y}_{i3MRP}, \hat{y}_{i4MRP}, \hat{y}_{i5MRP}]$  como sendo o vetor de médias das densidades básicas da madeira estimadas pelo modelo de regressão polinomial com erros independentes do grupo  $i$ ;

$\hat{y}'_{iMLMC} = [\hat{y}_{i1MLMC}, \hat{y}_{i2MLMC}, \hat{y}_{i3MLMC}, \hat{y}_{i4MLMC}, \hat{y}_{i5MLMC}]$  como sendo o vetor de médias das densidades básicas da madeira estimadas pelo modelo de curvas de crescimento do grupo  $i$ ;

$SQE_{MRP} = \sum_{k=1}^5 (\bar{y}'_{iOBS} - \hat{y}'_{iMRP})^2$  como sendo a soma de quadrados dos erros da densidade básica estimada pelo modelo de regressão polinomial;

$SQE_{MLMC} = \sum_{k=1}^5 (\bar{y}'_{iOBS} - \hat{y}'_{iMLMC})^2$  como sendo a soma de quadrados dos erros da densidade básica estimada pelo modelo de curvas de crescimento.

A partir da determinação da matriz de variâncias estimadas utilizou-se a raiz quadrada destes valores como sendo a medida de precisão dos estimadores, ou seja, medida caracterizada como erro padrão.

### 5.2.1 Análise de variância multivariada (MANOVA)

A análise de variância multivariada (MANOVA – *Multivariate Analysis Of Variance*) representa uma extensão da análise de variância univariada (ANOVA

– *univariate ANalysis Of VAriance*), sendo que, a principal diferença entre as duas, consiste no fato de a ANOVA avaliar a diferença entre as médias de grupos para uma variável resposta isolada, ao passo que a MANOVA avalia as diferenças entre médias de grupos considerando as várias variáveis respostas simultaneamente (HAIR Jr. et al., 2005).

A seguir, apresenta-se uma breve descrição dos modelos lineares multivariados, sendo que maiores detalhes podem ser vistos em Morrison (2004).

Considere  $g$  grupos cada qual com  $n_i$  unidades experimentais independentes, com  $n = n_1 + \dots + n_g$ . Suponha que, em cada unidade experimental, são realizadas  $p$  medidas de uma determinada variável. O modelo linear multivariado (MLM) pode ser representado matricialmente por:

$$\mathbf{Y}_{n \times p} = \mathbf{X}_{n \times g} \boldsymbol{\beta}_{g \times p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times p}, \quad (2)$$

em que:

- $\mathbf{Y}_{n \times p}$  é matriz de observações de  $p$  medidas realizadas para as  $n$  unidades experimentais, ou seja:

$$\mathbf{Y}_{n \times p} = \begin{bmatrix} y_{111} & \dots & y_{11p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{gn_1} & \dots & y_{gn_p} \end{bmatrix};$$

- $\mathbf{X}_{n \times g}$  é a matriz de planejamento com  $g < n$ , constituída por 0's e 1's, associando cada unidade experimental ao seu respectivo grupo,

$$\mathbf{X}_{n \times g} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1}_{n_g} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \mathbf{1}_{n_i} \text{ o vetor unidade com } n_i \text{ componentes};$$

- $\boldsymbol{\beta}_{g \times p}$  é a matriz de parâmetros, sendo cada linha constituída por  $p$  elementos que representam os valores esperados da variável resposta em cada uma das medidas realizadas nas unidades experimentais de um determinado grupo,

$$\boldsymbol{\beta}_{g \times p} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{g1} & \dots & \beta_{gp} \end{bmatrix};$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{n \times p}$  é a matriz dos componentes aleatórios das observações com distribuição normal multivariada  $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

A suposição requerida pelo MLM que as linhas da matriz  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sejam não correlacionadas e apresentem distribuição normal multivariada com vetor de valores

esperados  $\mathbf{0}_{1xp}$  e matriz de variâncias e covariâncias não singular  $\Sigma_{pxp}$ , comum a todas as linhas, acarreta:

$$E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\mathbf{Y}) = \Sigma \otimes \mathbf{I}_n, \quad (3)$$

sendo que  $\otimes$  indica produto tensorial ou de Kronecker (GANTMACHER, 1989). A operação  $\otimes$  consiste em:

$$\mathbf{A}_{n \times p} \otimes \mathbf{B}_{p \times p} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1p}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \dots & a_{np}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

resultando em uma matriz de ordem  $np \times p^2$ .

Conforme mencionado, o modelo descrito dessa forma denomina-se modelo linear multivariado e utiliza a notação MLM( $\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \Sigma \otimes \mathbf{I}_n$ ).

O estimador de mínimos quadrados de  $\boldsymbol{\beta}$ , que coincide com o estimador de máxima verossimilhança, é expresso por  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ .

As hipóteses a serem testadas sob as considerações do modelo podem ser escritas na forma:

$$H_0: \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}\mathbf{U} = \boldsymbol{\Gamma}, \quad (4)$$

em que  $\mathbf{C}_{cxg}$  e  $\mathbf{U}_{pxu}$  são matrizes selecionadas de tal forma a obter as combinações lineares desejadas dos parâmetros, com  $\text{Var}(\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{U}) = \mathbf{U}'\Sigma\mathbf{U} \otimes \mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'$ .

Para testar a hipótese  $H_0$  anterior, a Tabela 2 apresenta o esquema geral da MANOVA, que envolve as matrizes de variação entre ( $\mathbf{B}$ ) e dentro ( $\mathbf{W}$ ) dos grupos.

Tabela 2. Tabela de MANOVA em um modelo com um fator

Fonte Variação	Matriz de SQP
Entre grupos	$\mathbf{B} = (\mathbf{C} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y} \mathbf{U})' [\mathbf{C} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{C}']^{-1} (\mathbf{C} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{Y} \mathbf{U})$
Dentro de grupos	$\mathbf{W} = \mathbf{U}' \mathbf{Y}' [\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'] \mathbf{Y} \mathbf{U}$
Total	$\mathbf{T} = \mathbf{B} + \mathbf{W}$

As matrizes  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{B}$  expressam a soma de quadrados e produtos cruzados relativos aos resíduos e à hipótese do teste, respectivamente, sendo  $\mathbf{B}$  a matriz de soma dos quadrados e produtos cruzados entre os grupos,  $\mathbf{W}$  a matriz de soma dos quadrados e produtos cruzados dentro dos grupos e  $\mathbf{T}$  a soma dos quadrados e produtos cruzados totais.

As matrizes  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{B}$  são independentes, a matriz  $\mathbf{W}$  tem distribuição central de Wishart  $W[n - g, \mathbf{U}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}, \boldsymbol{\Phi}]$  sendo  $\boldsymbol{\Phi}$  a matriz nula de ordem  $u$  e  $\mathbf{B}$  tem distribuição de Wishart  $W(c, \mathbf{U}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}, [\mathbf{C} \boldsymbol{\beta} \mathbf{U} - \boldsymbol{\Gamma}]' [\mathbf{C} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{C}']^{-1} [\mathbf{C} \boldsymbol{\beta} \mathbf{U} - \boldsymbol{\Gamma}])$ . Sob a veracidade de  $H_0$ ,  $\mathbf{B}$  tem distribuição de Wishart  $W(c, \mathbf{U}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}, \boldsymbol{\Phi})$ .

Os testes estatísticos para a hipótese geral são realizados com estatísticas que são funções das raízes características não nulas (autovalores:  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ) da equação  $|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{W}| = 0$ , ou equivalentemente,  $|\mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ .

Definindo  $\theta_\nu = \frac{\lambda_\nu}{1 + \lambda_\nu}$  com  $\lambda_\nu$  denotando a  $\nu$ -ésima raiz característica de  $\mathbf{B} \mathbf{W}^{-1}$  com  $1 \leq \nu \leq s$ ,  $s = \min(c, u)$ ,  $m_1 = \frac{|c-u|-1}{2}$  e  $m_2 = \frac{n-g-u-1}{2}$ , os principais critérios para testar a hipótese geral são:

#### i) Raiz Máxima de Roy

A hipótese  $H_0: \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} \mathbf{U} = \boldsymbol{\Gamma}$  é testada por meio da estatística  $\theta_s = \max(\theta_\nu)$ , cuja distribuição encontra-se tabelada em Morrison (2004) e os parâmetros são  $s$ ,  $m_1$  e  $m_2$ .

Se  $s=1$ , então  $F = \frac{\theta_1}{1-\theta_1} * \frac{m_2+1}{m_1+1}$  tem distribuição F com graus de liberdade  $(2m_1 + 2)$  e  $(2m_2 + 2)$ ;

### ii) Razão de Verossimilhança Generalizada de Wilks

A estatística de Wilks, definida a partir do princípio da razão de verossimilhança generalizada, é expressa por:

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{B} + \mathbf{W}|} = \prod_{v=1}^s (1 - \theta_v). \quad (5)$$

Se  $s=1$ , então  $F = \frac{m_2+1}{m_1+1} * \frac{1-\Lambda}{\Lambda}$  tem distribuição F com graus de liberdade  $(2m_1 + 2)$  e  $(2m_2 + 2)$ .

Se  $s=2$ , então  $F = \frac{2m_2+2}{2m_1+3} * \frac{1-\Lambda^{1/2}}{\Lambda^{1/2}}$  tem distribuição F com graus de liberdade  $(4m_1 + 6)$  e  $(4(m_2 + 1))$ .

Considerando outras situações para valores de  $s$ , em que o tamanho da amostra é grande, utiliza-se a aproximação de Bartlett designada por RV (Razão de Verossimilhança):

$RV = -\left[n - g - \frac{1}{2}(u - c + 1)\ln\Lambda\right]$  com distribuição assintótica  $\chi^2$  com  $c*u$  graus de liberdade;

### iii) Traço de Lawley-Hotelling

A estatística de Lawley-Hotelling é expressa por:

$$T = tr(\mathbf{B}\mathbf{W}^{-1}) = \sum_{v=1}^s \lambda_v. \quad (6)$$

A aproximação  $F = \frac{2(s m_2+1)}{s^2(2 m_1+s+1)}T$  tem distribuição F com graus de liberdade  $(s(2m_1 + s + 1))$  e  $(2(s m_2 + 1))$ ;

### iv) Traço de Pillai

A estatística de Pillai é expressa por:

$$P = tr[\mathbf{B}(\mathbf{B} + \mathbf{W})^{-1}] = \sum_{v=1}^s \theta_v. \quad (7)$$

---

Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz de ordem  $n$ , o traço de  $A$  é igual a soma dos elementos da diagonal principal de  $A$ , ou seja,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

A aproximação  $F = \frac{2m_2+s+1}{2m_1+s+1} * \frac{P}{s-P}$  tem distribuição F com graus de liberdade  $(s(2m_1 + s + 1))$  e  $(s(2m_2 + s + 1))$ .

### 5.2.1.1 Normalidade multivariada

A suposição de normalidade dos dados em análise multivariada pode ser verificada por meio de um gráfico de probabilidade qui-quadrado (*Q-Q plot* ou *Chi-Square plot*). Esse procedimento gráfico é baseado na distância de Mahalanobis expressa por:

$$\delta_j^2 = (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}), \quad j = 1, \dots, n_i \quad (8)$$

sendo  $\mathbf{y}_j$  os valores observados dos  $k$  níveis da posição de avaliação,  $\bar{\mathbf{y}}$  o vetor de médias e  $\mathbf{S}$  a matriz de variâncias e covariâncias.

Para construção do gráfico *Q-Q plot*, é necessário seguir os passos:

1) Calcular a distância de Mahalanobis,  $\delta_j^2$ , para todos os elementos da amostra e ordenar esses valores em ordem crescente, ou seja,  $\delta_{(1)}^2 \leq \delta_{(2)}^2 \leq \dots \leq \delta_{(n_i)}^2$ , com  $\delta_{(j)}^2$  a  $j$ -ésima estatística de ordem;

2) Fazer o gráfico dos pares  $\left[ \delta_{(j)}^2; \chi_p^2 \left( \frac{j-\frac{1}{2}}{n_i} \right) \right]$ , em que  $\chi_p^2 \left( \left( j - \frac{1}{2} \right) / n_i \right)$  representa o quantil de ordem  $100 \left( \left( j - \frac{1}{2} \right) / n_i \right)$  da distribuição qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade, isto é,

$$P \left[ \chi_p^2 \leq \chi_p^2 \left( \frac{j-\frac{1}{2}}{n_i} \right) \right] = \frac{j-\frac{1}{2}}{n_i}. \quad (9)$$

Quando a normalidade  $p$ -variada se ajusta bem aos dados amostrais, esse gráfico deve resultar em uma nuvem de pontos próximos a uma reta. Ele também auxilia na identificação de possíveis valores discrepantes (*outliers*).

A construção desse gráfico fundamenta-se pela teoria da distribuição normal multivariada, assegurando que, quando o número de elementos amostrais  $n_i$  é grande, a variável  $\delta_j^2$  tem aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com  $p$  graus de liberdade. Assim, podem-se comparar os valores das distâncias  $\delta_j^2$  com as respectivas ordenadas dos percentis da distribuição qui-quadrado (MINGOTI, 2005).

### 5.2.1.2 Teste de Box para igualdade de matrizes de variâncias e covariâncias

Uma das suposições que deve ser atendida para os procedimentos de teste multivariado de MANOVA é a igualdade das matrizes de variâncias e covariâncias para todos os grupos.

O teste de Box, descrito em Johnson e Wichern (2007), é um procedimento multivariado de homogeneidade de matrizes de variâncias e covariâncias, sendo considerado uma generalização do teste univariado de igualdade de variâncias. A hipótese  $H_0$  a ser testada expressa-se por:

$$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_g = \Sigma. \quad (10)$$

Para cada grupo  $i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) considere os seguintes elementos:  $n_i$  (número de unidades experimentais),  $v_i = n_i - 1$  (graus de liberdade) e  $S_i$  a matriz de variâncias e covariâncias. Além disso, sendo  $n = n_1 + \dots + n_g$  e  $S_p = \frac{W}{n-g}$  a matriz comum de variâncias e covariâncias, sendo  $g$  o número de grupos e  $W$  a matriz de soma de quadrados e produtos cruzados relativos aos resíduos. O teste relativo à hipótese de igualdade das matrizes de variâncias e covariâncias, sob a veracidade de  $H_0$ , é dado pela estatística:

$$M = (n - g) \ln |S_p| - \sum_{i=1}^g v_i \ln |S_i|, \text{ com a regra de decisão habitual.}$$

Para a tomada de decisão, uma aproximação para o teste de Box é descrita em Morrison (2004) e indicada quando a dimensão de cada grupo é superior a 20 e o número de variáveis e de grupos inferior a seis. Essa aproximação é dada por:

$$M C^{-1} \sim \chi^2_{\left(\frac{1}{2} p(p+1)(g-1)\right)}, \quad (11)$$

com

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(g-1)} \left( \sum_{i=1}^g \frac{1}{v_i} - \frac{1}{n-g} \right). \quad (12)$$

A regra de decisão consiste em verificar se  $M C^{-1}$  é superior ao quantil de ordem  $100(1-\alpha)\%$  da distribuição qui-quadrado com  $\frac{1}{2} p(p+1)(g-1)$  graus

de liberdade , ou seja: se  $M C^{-1} > \chi^2_{\left(\alpha; \frac{1}{2}p(p+1)(g-1)\right)}$  rejeita-se  $H_0$ , caso contrário, não se rejeita  $H_0$ .

### 5.2.2 Intervalos de confiança simultâneos de Hotelling

Em várias situações biológicas, quando o propósito é realizar a comparação entre vetores de médias de diferentes grupos, os intervalos de confiança simultâneos (ICS) para as diferenças entre os vetores médios tornam-se bastante úteis para as comparações de interesse, principalmente, por assegurar o nível de confiança conjunto para as conclusões. Nesse sentido, os limites do ICS de Hotelling para essas diferenças com nível  $100(1-\alpha)\%$  de confiança são estabelecidos por:

$$\mathbf{a}'(\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_{i'}) = \mathbf{a}'(\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_{i'}) \pm \sqrt{\frac{(n_i+n_{i'}-2)p}{n_i+n_{i'}-p-1} F_{(\alpha; p; n_i+n_{i'}-p-1)} \frac{n_i+n_{i'}}{n_i n_{i'}} \mathbf{a}' \mathbf{S}_p \mathbf{a}'}, \quad (13)$$

com  $\mathbf{a}' = [a_1, a_2, \dots, a_p]$ , o qual é composto por 0's e 1 sendo que o número 1 seleciona a diferença de médias de interesse e  $\mathbf{S}_p = \frac{\mathbf{W}}{n-g}$ .

Para a interpretação da resposta da comparação envolvida no contraste entre os pares de vetores há de verificar a inclusão ou não do valor zero nos limites estabelecidos. Se o valor zero não estiver incluído, os vetores de médias são estatisticamente diferentes, caso contrário, não diferem.

### 5.2.3 Distância de Mahalanobis

Constitui-se a distância generalizada de Mahalanobis como a “medida da unicidade de uma observação baseada em diferenças entre os valores da observação e os valores médios para todos os outros casos ao longo de todas as variáveis independentes” (HAIR Jr. et al., 2005, p. 188). Seu emprego como métrica tem sido muito utilizado nos estudos de divergências genéticas e, em várias situações, é referenciada como distância genética. A leitura de seu valor refere-se a uma medida de dissimilaridade entre os indivíduos (unidades experimentais), pois, quanto maior, mais diferentes são entre si.

Ao estabelecer o centro de cada grupo, é possível calcular as distâncias generalizadas de Mahalanobis entre os centroides para indicar o quão distantes estão esses grupos.

As distâncias de Mahalanobis entre os centroides são expressas por:

$$\delta_{ii'}^2 = (\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_{i'})' \mathbf{S}_{ii'}^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_{i'}), \quad (14)$$

para  $i \neq i'$ ,  $i = 1, \dots, s$ , com  $\bar{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} \bar{y}_{i1} \\ \vdots \\ \bar{y}_{ip} \end{bmatrix}$  é o vetor de médias amostrais do grupo  $i$  e  $\mathbf{S}_{ii'}$  é

matriz comum de variâncias e covariâncias amostrais relativas aos grupos  $i$  e  $i'$ , obtida por:

$$\mathbf{S}_{ii'} = \frac{(n_i - 1)\mathbf{S}_i + (n_{i'} - 1)\mathbf{S}_{i'}}{n_i + n_{i'} - 2}. \quad (15)$$

#### 5.2.4 Modelo linear multivariado de crescimento

De acordo com Oshiiwa (2005) o Conde de Montbeillard (1759 a 1777) deu início aos estudos de crescimento e o primeiro trabalho foi publicado em um suplemento da *Histoire Naturelle*. Constata-se que, na primeira metade do século XX, houve uma intensificação do estudo sobre curvas de crescimento, em que se destacaram os autores Wishart (1938), Box (1950) e Rao (1958-1959). Porém, em 1964, Potthoff e Roy se destacam quando elaboram o modelo linear multivariado de crescimento (MLMC), expresso por:

$$\mathbf{Y}_{n \times p} = \mathbf{X}_{n \times g} \boldsymbol{\xi}_{g \times q} \mathbf{G}_{q \times p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times p}, \quad (16)$$

com  $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X} \boldsymbol{\xi} \mathbf{G}$  e  $Var(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_n$ ,

sendo que:

- $\mathbf{Y}_{n \times p}$ ,  $\mathbf{X}_{n \times g}$ , e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n \times p}$  são as mesmas do MLM,
- $\boldsymbol{\xi}_{g \times q}$  é a matriz dos parâmetros (desconhecidos) das curvas polinomiais de crescimento, em que cada linha representa os coeficientes do polinômio de grau  $l$  ( $l = 0, 1, \dots, q - 1$ ) relativo ao  $i$ -ésimo grupo do experimento dada por:

$$\xi_{g \times q} = \begin{bmatrix} \xi_{10} & \xi_{11} & \dots & \xi_{1,q-1} \\ \xi_{20} & \xi_{21} & \dots & \xi_{2,q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{g0} & \xi_{g1} & \dots & \xi_{g,q-1} \end{bmatrix},$$

- $\mathbf{G}_{q \times p}$  é a matriz de delineamento dentro de indivíduos, de dimensão  $q \times p$ , de posto completo  $q \leq p$ , a qual tem propósito de associar as respostas das unidades experimentais sob as condições de avaliação ao polinômio almejado, ou seja, as colunas correspondem aos níveis das condições de avaliação ( $t_1, t_2, \dots, t_p$ ) e as linhas aos possíveis graus do polinômio. Essa matriz é expressa por:

$$\mathbf{G}_{q \times p} = \begin{bmatrix} t_1^0 & t_2^0 & \dots & t_p^0 \\ t_1^1 & t_2^1 & \dots & t_p^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{q-1} & t_2^{q-1} & \dots & t_p^{q-1} \end{bmatrix}.$$

Três situações mais comuns podem ser levadas em consideração na construção da matriz de delineamento  $\mathbf{G}$ :

- 1) usar os próprios valores de  $t_k$  (níveis da posição de avaliação do planejamento experimental);
- 2) utilizar os valores dos afastamentos em relação à média dos níveis das condições de avaliação, ou seja, os valores codificados em  $t_k - \bar{t}$ ;
- 3) considerar os valores de  $t_k$  substituídos pelos coeficientes dos polinômios ortogonais.

A construção da matriz de planejamento dentro de indivíduos, isto é, a matriz  $\mathbf{G}$ , pelos coeficientes ortogonais, facilita a obtenção das estatísticas dos testes estatísticos, porém, em relação à estimação dos parâmetros, pode ser considerada como fator secundário a escolha de  $\mathbf{G}$ . As situações um e dois não têm restrição quanto ao uso, mas a terceira é utilizada para posições de avaliação igualmente espaçadas.

A estrutura matricial de  $\xi \mathbf{G}$ , descrita à semelhança de  $\beta$ , é representada por:

$$\begin{bmatrix} \xi_{10} + \xi_{11}t_1 + \dots + \xi_{1,q-1}t_1^{q-1} & \dots & \xi_{10} + \xi_{11}t_p + \dots + \xi_{1,q-1}t_p^{q-1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{g0} + \xi_{g1}t_1 + \dots + \xi_{g,q-1}t_1^{q-1} & \dots & \xi_{g0} + \xi_{g1}t_p + \dots + \xi_{g,q-1}t_p^{q-1} \end{bmatrix}$$

Sob as considerações apresentadas para a estrutura da matriz  $\mathbf{G}$  tem-se, respectivamente, os seguintes modelos polinomiais de crescimento:

$$1) \beta_{ik} = \xi_{i0} + \xi_{i1}t_k + \xi_{i2}t_k^2 + \cdots + \xi_{i,q-1}t_k^{q-1} = \sum_{l=0}^{q-1} \xi_{il}t_k^l;$$

$$2) \beta_{ik} = \xi_{i0}^* + \xi_{i1}^*(t_k - \bar{t}) + \xi_{i2}^*(t_k - \bar{t})^2 + \cdots + \xi_{i,q-1}^*(t_k - \bar{t})^{q-1} = \sum_{l=0}^{q-1} \xi_{il}^*(t_k - \bar{t})^l,$$

$$\text{com } \bar{t} = \sum_{k=1}^p \frac{t_k}{p},$$

3)  $\beta_{ik} = \xi_{i0}^*P_0(T_k) + \xi_{i1}^*P_1(T_k) + \xi_{i2}^*P_2(T_k) + \cdots + \xi_{i,q-1}^*P_{q-1}(T_k) = \sum_{l=0}^{q-1} \xi_{il}^*P_l(T_k)$ , sendo  $P_l(T_k)$  o termo polinomial no grau  $l$  na construção de polinômios ortogonais, com  $T_k$  uma variável auxiliar que, no caso de níveis quaisquer equidistantes, escreve-se da forma  $T_k = \frac{t_k - \bar{t}}{h}$  com  $h$  sendo a distância entre dois níveis sucessivos da posição de avaliação e  $\xi_{il}^*$  coeficiente associado ao termo polinomial no grau  $l$ .

Levando em conta os modelos apresentados, a resposta média de cada nível da posição de avaliação em cada grupo experimental pode ser descrita por um polinômio de grau  $l$ . Note que a formulação das curvas descritas em  $\boldsymbol{\beta}$  tem o mesmo grau.

O modelo linear multivariado de crescimento pode ser visto como uma generalização do modelo linear multivariado o que permite utilizar, para as curvas de crescimento, os procedimentos da MANOVA (SOUZA, 1989).

A seguir apresenta-se a proposta de Potthoff e Roy (1964) para estimar a matriz de parâmetros  $\boldsymbol{\xi}$  e os respectivos erros padrão associados aos estimadores.

#### 5.2.4.1 Proposta de Potthoff e Roy

Para simplificar o modelo linear multivariado de crescimento em um modelo linear multivariado, Potthoff e Roy (1964) propuseram um método de transformação de variável, expresso por:

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{G}'(\mathbf{G}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{G}')^{-1}, \quad (17)$$

com  $\boldsymbol{\Delta}_{p \times p}$  uma matriz arbitrária simétrica e positiva definida, ou qualquer matriz não-singular tal que  $(\mathbf{G}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{G}')^{-1}$ , de ordem  $(qxq)$ , que tenha posto completo. A partir desta transformação, obtém-se:

$$E(\mathbf{Y}^*) = \mathbf{X}\boldsymbol{\xi} \quad (18)$$

e a matriz de variâncias e covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}^*$ , não singular, dada por:

$$\Sigma^* = (\mathbf{G}\Delta'^{-1}\mathbf{G}')^{-1}\mathbf{G}\Delta'^{-1}\Sigma\Delta^{-1}\mathbf{G}'(\mathbf{G}\Delta'^{-1}\mathbf{G}')^{-1}, \quad (19)$$

O modelo gerado para as observações transformadas é descrito por MLM ( $\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}\xi, \Sigma^*$ ).

Como a matriz  $\mathbf{Y}$  tem distribuição normal multivariada com linhas independentes, então as linhas da matriz  $\mathbf{Y}^*$  são normais multivariadas independentes. Nesse caso, é possível utilizar diretamente os resultados conhecidos da MANOVA para fazer inferência sobre os parâmetros. Assim, um estimador não viciado de  $\xi$  obtido por meio do critério de máxima verossimilhança ou mínimos quadrados é expresso por:

$$\hat{\xi} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\Delta^{-1}\mathbf{G}'(\mathbf{G}\Delta^{-1}\mathbf{G}')^{-1} \quad (20)$$

e

$$Var(\hat{\xi}) = (\mathbf{G}\Delta'^{-1}\mathbf{G}')^{-1}\mathbf{G}\Delta'^{-1}\Sigma\Delta^{-1}\mathbf{G}'(\mathbf{G}\Delta^{-1}\mathbf{G}')^{-1} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}. \quad (21)$$

Potthoff e Roy (1964) mostraram que, se a matriz  $\Sigma$  for conhecida,  $\Delta = \Sigma$  é uma escolha ótima (não viciada e variância mínima). Como  $\Sigma$  é desconhecida, ainda que o estimador  $\hat{\xi}$  obtido é não viciado, independente da escolha da matriz  $\Delta$ , sua variância aumenta conforme  $\Delta^{-1}$  se distancia de  $\Sigma^{-1}$ .

Uma opção proposta por Khatri (1966) citado por Singer (1977) quando a matriz  $\Sigma$  é desconhecida e não estruturada é utilizar  $\Delta = \mathbf{S}$ , em que a matriz  $\mathbf{S} = \mathbf{Y}'[\mathbf{I} - \mathbf{X}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}]\mathbf{Y}$  é uma das estimativas usuais de  $\Sigma$  calculada a partir das observações.

#### 5.2.4.2 Ajuste do MLMC

Em estudos longitudinais, o comportamento de variáveis é estudado em função dos níveis das condições de avaliação, cuja matriz de observações,  $\mathbf{Y}_{n \times p}$ , tem suas linhas compostas pelo conjunto de  $p$  medidas de uma variável, realizadas em uma determinada unidade experimental.

Considerando o MLMC( $\mathbf{Y}, \mathbf{X}\xi\mathbf{G}, \Sigma$ ) com  $\mathbf{X}$ ,  $\xi$  e  $\mathbf{G}$  definidas nas seções 5.2.1 e 5.2.4, há o interesse em ajustar um polinômio de grau  $l$  ( $l \leq q - 1$ ) que melhor se adapte às observações, dado por:

$$\beta_{ik} = \xi_{i0} + \xi_{i1}t_k + \xi_{i2}t_k^2 + \dots + \xi_{i,q-1}t_k^{q-1}, \quad (22)$$

com  $t_k$  correspondendo ao  $k$ -ésimo nível da posição de avaliação do planejamento experimental.

Em muitas situações, quando os níveis das condições de avaliação são igualmente espaçados, é conveniente expressar a resposta da variável em estudo considerando polinômios ortogonais, dado por:

$$\beta_{ik} = \xi_{i0}^* P_0(T_k) + \xi_{i1}^* P_1(T_k) + \xi_{i2}^* P_2(T_k) + \dots + \xi_{i,q-1}^* P_{q-1}(T_k), \quad (23)$$

com  $P_l(T_k)$  polinômio ortogonal de grau  $l$  e  $\xi_{i,l}^*$  coeficiente associado ao mesmo.

Conseqüentemente, tem-se:

$$\xi^* = \begin{bmatrix} \xi_{10}^* & \xi_{11}^* & \dots & \xi_{1,q-1}^* \\ \xi_{20}^* & \xi_{21}^* & \dots & \xi_{2,q-1}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{g0}^* & \xi_{g1}^* & \dots & \xi_{g,q-1}^* \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} P_0(T_1) & P_0(T_2) & \dots & P_0(T_p) \\ P_1(T_1) & P_1(T_2) & \dots & P_1(T_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{q-1}(T_1) & P_{q-1}(T_2) & \dots & P_{q-1}(T_p) \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes de  $P_l(T_k)$  podem ser obtidos diretamente de tabelas como as apresentadas em Montgomery (2004) para a construção da matriz  $\mathbf{G}$ .

Sejam as matrizes  $\mathbf{G}_1(p \times q)$  e  $\mathbf{G}_2(p \times (p-q))$ , com posto  $\mathbf{G}_1 = q$  e posto  $\mathbf{G}_2 = p - q$ , que satisfazem as condições  $\mathbf{G}\mathbf{G}_1 = \mathbf{I}_q$  e  $\mathbf{G}\mathbf{G}_2 = \mathbf{0}_{(q \times (p-q))}$  e considere a transformação

$$\mathbf{Y}[\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] = [\mathbf{Y}\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{Y}\mathbf{G}_2] = [\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{Y}_2].$$

Para o teste estatístico do ajuste do polinômio, a hipótese nula escrita de forma geral é

$$H_{0A}: \mathbf{C} \xi^* \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \text{com} \quad \mathbf{C} = \mathbf{I}_g, \quad \xi^* = \xi \mathbf{G} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \mathbf{G}_2, \quad (24)$$

sendo  $\mathbf{G}_1$  construída com os coeficientes de polinômios ortogonais correspondentes ao grau do polinômio que deve ser ajustado (graus de baixa ordem) e  $\mathbf{G}_2$  expressa a partir dos coeficientes de polinômios ortogonais “descartáveis” no ajuste (graus de ordem mais alta) (SOUZA, 1989).

As matrizes de somas de quadrados e produtos cruzados devidas ao resíduo ( $\mathbf{W}_A$ ) e ao desvio em relação à hipótese nula ( $\mathbf{B}_A$ ) foram obtidas por meio das matrizes dadas em 5.2.1.

Nesse contexto, realizou-se o teste do ajustamento do modelo por meio do procedimento do “descarte”, ou seja, testou-se a hipótese  $H_{0A}: \mathbf{I} \xi^* \mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$  e considerando o critério da razão de verossimilhança generalizada de Wilks (descrito em

5.2.1), determinou-se o grau da curva polinomial que melhor se ajustava ao comportamento da variável resposta “descartando” colunas da matriz  $\mathbf{G}'$ .

A Tabela 3 apresenta o procedimento geral de “descarte” agrupado na sequência operacional do método considerando a matriz  $\mathbf{G}'$ .

Tabela 3. Resultados do procedimento estatístico de “descarte” do polinômio

Colunas de $\mathbf{G}'$ utilizadas na construção de $\mathbf{G}_2$	Grau do polinômio cujo ajuste é testado	Valor da estatística do teste	Nível descritivo do teste (valor $p$ )
Última	$p - 2$	RV ( $p - 2$ )	$P_{(p-2)}$
Duas últimas	$p - 3$	RV ( $p - 3$ )	$P_{(p-3)}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$(q - 1)$ últimas	1	RV (1)	$P_{(1)}$

Para a interpretação do resultado da Tabela 3, deve-se fazer a leitura do grau do polinômio ajustado de 1 até o grau  $p - 2$ . Se, nessa análise sequencial, o nível descritivo do teste for inferior ao nível significativo adotado  $\alpha$  ( $p < \alpha$ ), deve-se passar para a leitura do próximo nível. Caso contrário, ou seja, o nível descritivo superar  $\alpha$  ( $p > \alpha$ ), determinou-se o grau do polinômio do modelo ajustado aos dados.

Na sequência, os parâmetros de  $\xi^*$  são estimados por meio de duas fórmulas referidas em Souza (1989):

$$\widehat{\xi}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}'_1(\mathbf{G}_1\mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}'_1)^{-1} \quad (25)$$

e

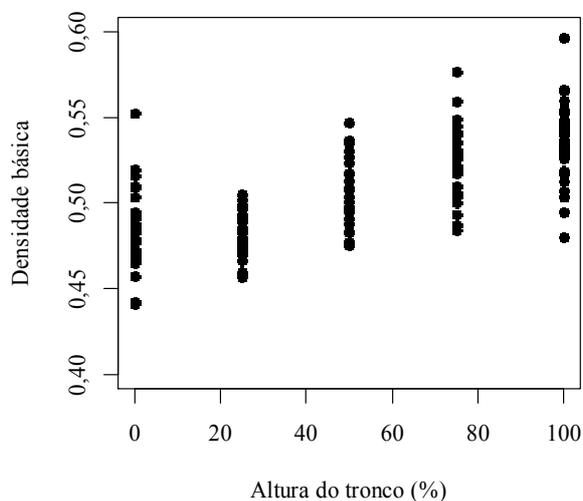
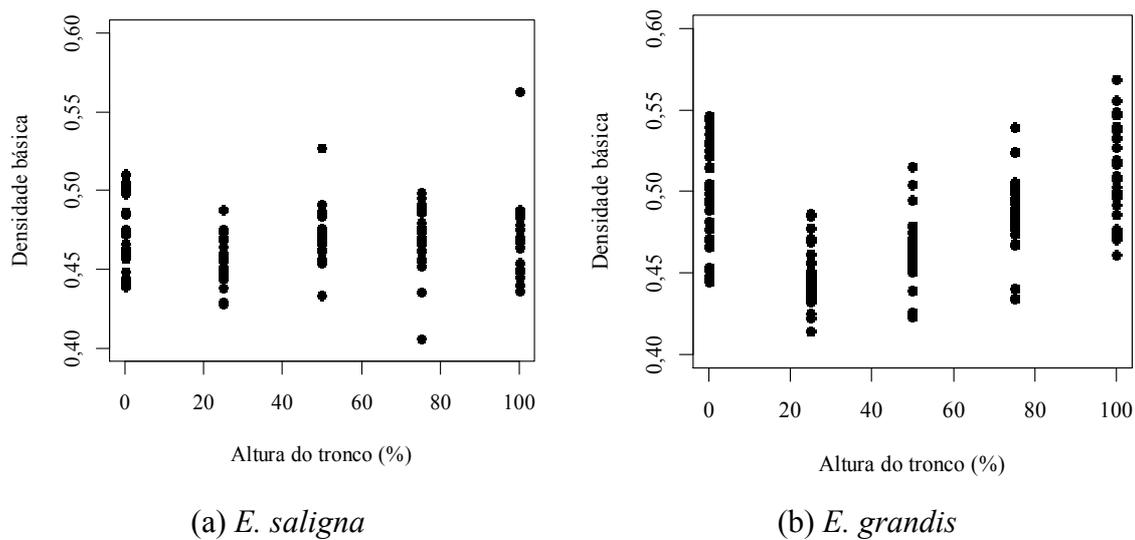
$$\widehat{Var}(\widehat{\xi}^*) = \frac{(n-g)-1}{(n-g)-(p-q)-1} * \frac{1}{(n-g)-(p-q)} (\mathbf{G}_1\mathbf{S}^{-1}\mathbf{G}'_1)^{-1} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}. \quad (26)$$

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 6.1 Medidas descritivas

A variação longitudinal da densidade básica da madeira em função da posição relativa dos discos retirados ao longo do tronco de árvores de *Eucalyptus saligna*, *E. grandis* e *E. grandis* x *E. urophylla* pode ser visualizada na Figura 2.

A inspeção gráfica da dispersão de dados mostra que o modelo de resposta da densidade básica da madeira pode estar associado com o grupo, ou seja, não há “nitidez” da possibilidade de ajustar um único modelo de predição com erros independentes para a variação longitudinal da densidade básica média das árvores de eucaliptos nos grupos estudados.



(c) *E. grandis* x *E. urophylla*

Figura 2. Densidade básica da madeira em função da posição relativa dos discos

A Figura 3 mostra o gráfico *Boxplot* da densidade básica da madeira segundo os cinco discos amostrados na árvore e os três grupos estudados, em que são destacadas medidas descritivas em cada um dos discos, ou seja, valores mínimos e máximos e os três quartis.

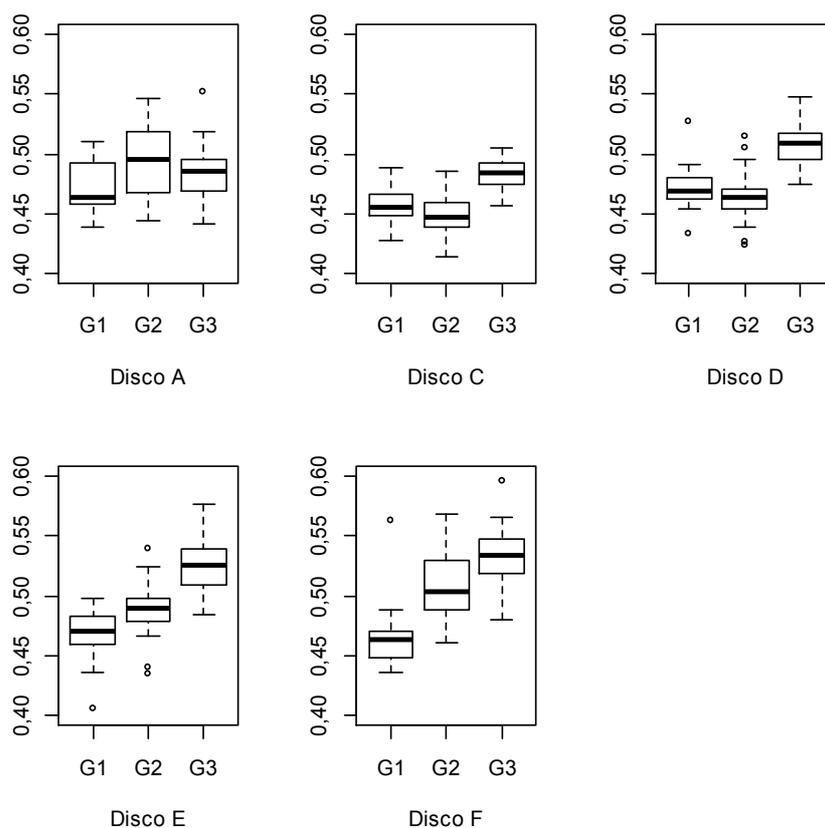


Figura 3. *Boxplot* da densidade básica da madeira por disco e grupo

A inspeção visual dos gráficos da Figura 3 apresenta a presença de pontos discrepantes (valores espúrios) e ausência de simetria em alguns discos com maiores evidências no G1 (*E. saligna*) e nas densidades básicas do disco amostrado a 100% da altura comercial da árvore (disco F) para todos os grupos.

## 6.2 Procedimento univariado

### 6.2.1 Comparação de médias

Para a utilização da técnica de análise de variância (ANOVA) paramétrica há necessidade do conhecimento da distribuição probabilística dos dados. No presente estudo, dentre os vários tipos de teste de normalidade existentes, optou-se pelo teste de Lilliefors (DALLAL e WILKISON, 1986) a fim de verificar a suposição de normalidade

da densidade básica da madeira para cada grupo considerando a análise por disco amostrado no tronco da árvore (Tabela 4).

Tabela 4. Nível descritivo (p) do teste de normalidade

Disco	Grupo		
	G1	G2	G3
A (0%)	0,0889	0,6693	0,2772
C (25%)	0,5697	0,1481	0,2835
D (50%)	0,2401	0,1319	0,3432
E (75%)	0,3572	0,2231	0,3335
F (100%)	0,0833	0,6448	0,4404

Os resultados apresentados na Tabela 4, considerando-se o nível de 5% de significância, mostram que não rejeitou-se a hipótese de normalidade para a densidade básica da madeira em todos os discos selecionados ao longo do tronco da árvore ( $p > 0,05$ ).

Ainda, como suposição básica para a utilização da técnica ANOVA, verificou-se, pelo teste de Bartlett (MORRISON, 2004), a homogeneidade das variâncias dos grupos considerando a densidade básica da madeira em cada disco amostrado ao longo do tronco da árvore. Os resultados apresentados na Tabela 5 indicam que não houve rejeição da homogeneidade de variâncias em todos os discos selecionados ao longo do fuste da árvore ( $p > 0,05$ ).

Tabela 5. Nível descritivo (p) do teste de homogeneidade de Bartlett

Disco	Valor p
A (0%)	0,1865
C (25%)	0,2724
D (50%)	0,7725
E (75%)	0,9652
F (100%)	0,5711

Após confirmar que as suposições de normalidade e homogeneidade foram satisfeitas, realizou-se o procedimento da técnica de ANOVA, cujos níveis descritivos (valor p) dos testes estatísticos e as medidas descritivas que envolvem a média e o desvio

padrão da densidade básica da madeira, por grupos e discos amostrados da árvore, estão apresentados na Tabela 6.

Para comparação da densidade básica da madeira, mensurada nos discos selecionados ao longo do tronco da árvore nos diferentes grupos, os valores de p indicaram que existem diferenças significantes entre os grupos estudados em todos os discos considerados ( $p < 0,01$ ).

Tabela 6. Média e desvio padrão da densidade básica segundo grupo e resultado do teste estatístico univariado por disco

Disco	Grupo			Valor p
	G1	G2	G3	
A (0%)	0,4718 (0,0230)	0,4945 (0,0309)	0,4858 (0,0232)	0,0057
C (25%)	0,4564 (0,0141)	0,4500 (0,0181)	0,4834 (0,0139)	< 0,001
D (50%)	0,4719 (0,0168)	0,4644 (0,0189)	0,5073 (0,0190)	< 0,001
E (75%)	0,4694 (0,0196)	0,4881 (0,0200)	0,5243 (0,0206)	< 0,001
F (100%)	0,4635 (0,0247)	0,5080 (0,0279)	0,5342 (0,0230)	< 0,001

A Figura 4 e a Tabela 7 mostram os limites de 95% de confiança para os contrastes entre as médias dos grupos de eucaliptos, os quais possibilitam indicar os resultados das comparações entre todos os pares de médias realizados por meio do teste de Tukey considerando o nível de 5% de significância.

Tabela 7. Intervalos de confiança de Tukey para as diferenças entre as médias de dois grupos

Disco	G1 x G2	G1 x G3	G2 x G3
A (0%)	(0,0063; 0,0391) *	(-0,0026; 0,0305)	(-0,0247; 0,0072)
C (25%)	(-0,0161; 0,0034)	(0,0172; 0,0369) *	(0,0239; 0,0429) *
D (50%)	(-0,0190; 0,0040)	(0,0238; 0,0470) *	(0,0317; 0,0540) *
E (75%)	(0,0061; 0,0313) *	(0,0422; 0,0676) *	(0,0239; 0,0485) *
F (100%)	(0,0286; 0,0604) *	(0,0547; 0,0867) *	(0,0107; 0,0416) *

\*  $p < 0,05$

A comparação entre G1 (*E. saligna*) e G2 (*E. grandis*) mostrou-se significativa nos discos A, E e F (discos selecionados a 0%, 75% e 100% da altura comercial da árvore); na comparação G1 (*E. saligna*) e G3 (híbrido) e G2 (*E. grandis*) e G3 (híbrido)

nos discos C, D, E e F (discos amostrados a 25%, 50%, 75% e 100% da altura comercial da árvore). Destacam-se os discos E e F (discos retirados a 75% e 100% da altura comercial da árvore) como posições de diferenciação dos grupos entre si e, também, os discos C e D (discos retirados a 25% e 50% da altura comercial da árvore) que permitem diferenciar significativamente ( $p < 0,05$ ) as espécies puras do híbrido.

Não foi possível mostrar que existe diferença, no disco A (disco amostrado na base da árvore), entre G1 (*E. saligna*) e G3 (híbrido) e entre G2 (*E. grandis*) e G3 (híbrido).

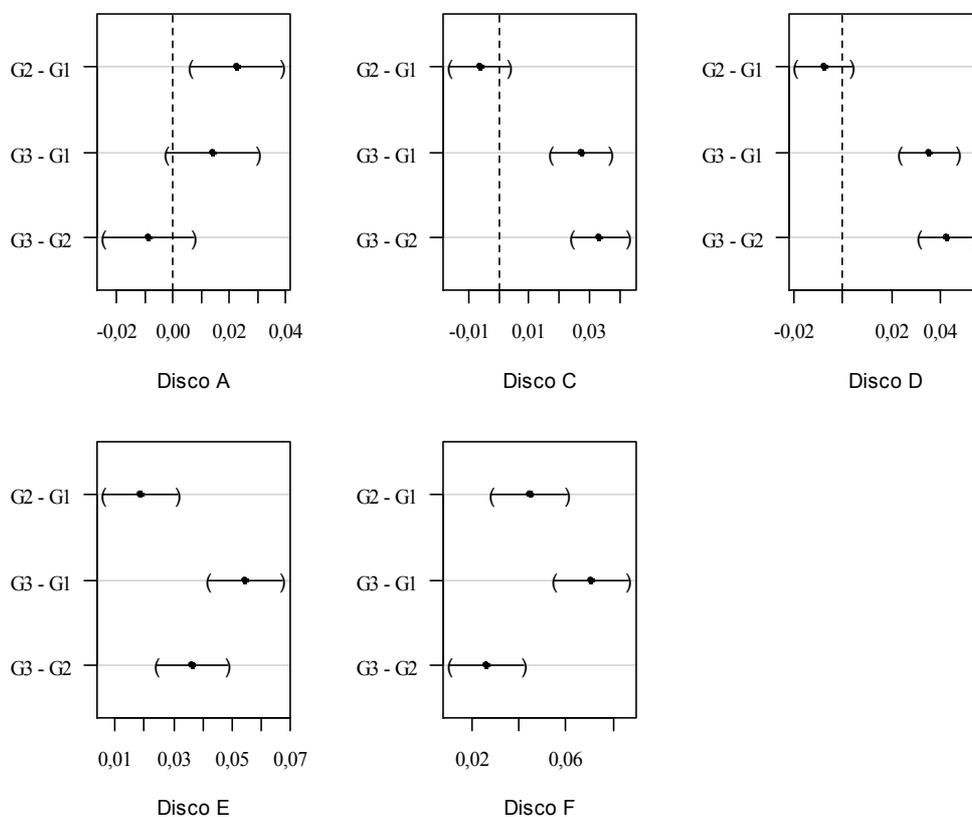


Figura 4. Intervalos de confiança de Tukey para a diferença entre médias

### 6.2.2 Modelo de regressão polinomial

Na avaliação do comportamento da densidade básica da madeira ao longo do fuste da árvore em função da posição relativa do disco amostrado no tronco, foram ajustados modelos de regressão polinomial utilizando o método dos polinômios ortogonais com níveis equidistantes para cada grupo.

Os modelos ajustados para caracterização da variação longitudinal da densidade básica da madeira empregando polinômios ortogonais, para cada grupo de eucaliptos estudado foram:

$\hat{y}_1 = 4,6661 * 10^{-1} - 3,6357 * 10^{-4}P_1(T) + 7,3438 * 10^{-5}P_2(T) - 3,4143 * 10^{-3}P_3(T)$  para a espécie *E. saligna*;

$\hat{y}_2 = 4,8103 * 10^{-1} + 6,5041 * 10^{-3}P_1(T) + 9,8661 * 10^{-3}P_2(T) - 6,2631 * 10^{-3}P_3(T)$  para a espécie *E. grandis*;

$\hat{y}_3 = 5,0700 * 10^{-1} + 1,3768 * 10^{-2}P_1(T) + 1,2640 * 10^{-3}P_2(T) - 3,3354 * 10^{-3}P_3(T)$  para o híbrido de eucaliptos,

em que:  $P_1(T) = T$ ,  $P_2(T) = T^2 - 2$ ,  $P_3(T) = T^3 - 3,4 T$ , com  $T = \frac{t-50}{25}$  e  $0 \leq t \leq 100$ .

Muitos pesquisadores da área de ciências agronômicas e florestais utilizam modelos de regressão polinomial considerando os erros independentes para descrever o comportamento longitudinal da densidade básica em função da posição relativa dos discos amostrados no sentido base topo do tronco de árvores de *Eucalyptus* (Sturion (1987); Haselein et al. (2004); Couto et al. (2012); Sette Jr. et al. (2012); Eloy et al. (2013)), *Acacia mangium* e *Acacia mearnsii* (Vale et al. (1999); Eloy et al. (2013)), *Araucaria angustifolia*, *Pinus elliottii* e *Pinus taeda* (Mattos et al. (2011)).

### 6.3 Procedimento multivariado

Um indicativo exploratório para a necessidade da utilização do procedimento multivariado em um conjunto de dados foi verificado por meio das correlações significativas ( $p < 0,05$ ) entre as densidades básicas mensuradas nos discos amostrados ao longo do tronco da árvore dos grupos de eucaliptos estudados. Resultados sobre essas considerações encontram-se apresentados nas matrizes de correlações no Apêndice 2,

destacando-se várias correlações significativas nas matrizes correspondentes ao grupos e todas quando se considera a matriz conjunta dos grupos.

### 6.3.1 Análise de variância multivariada

A suposição de normalidade univariada foi verificada por meio do teste de Lilliefors, em 5.2.1, mostrando que todas as variáveis em estudo têm aderência à distribuição normal de probabilidade. A normalidade multivariada foi examinada por meio do gráfico *Q-Q plot* para cada grupo estudado (Figura 5).

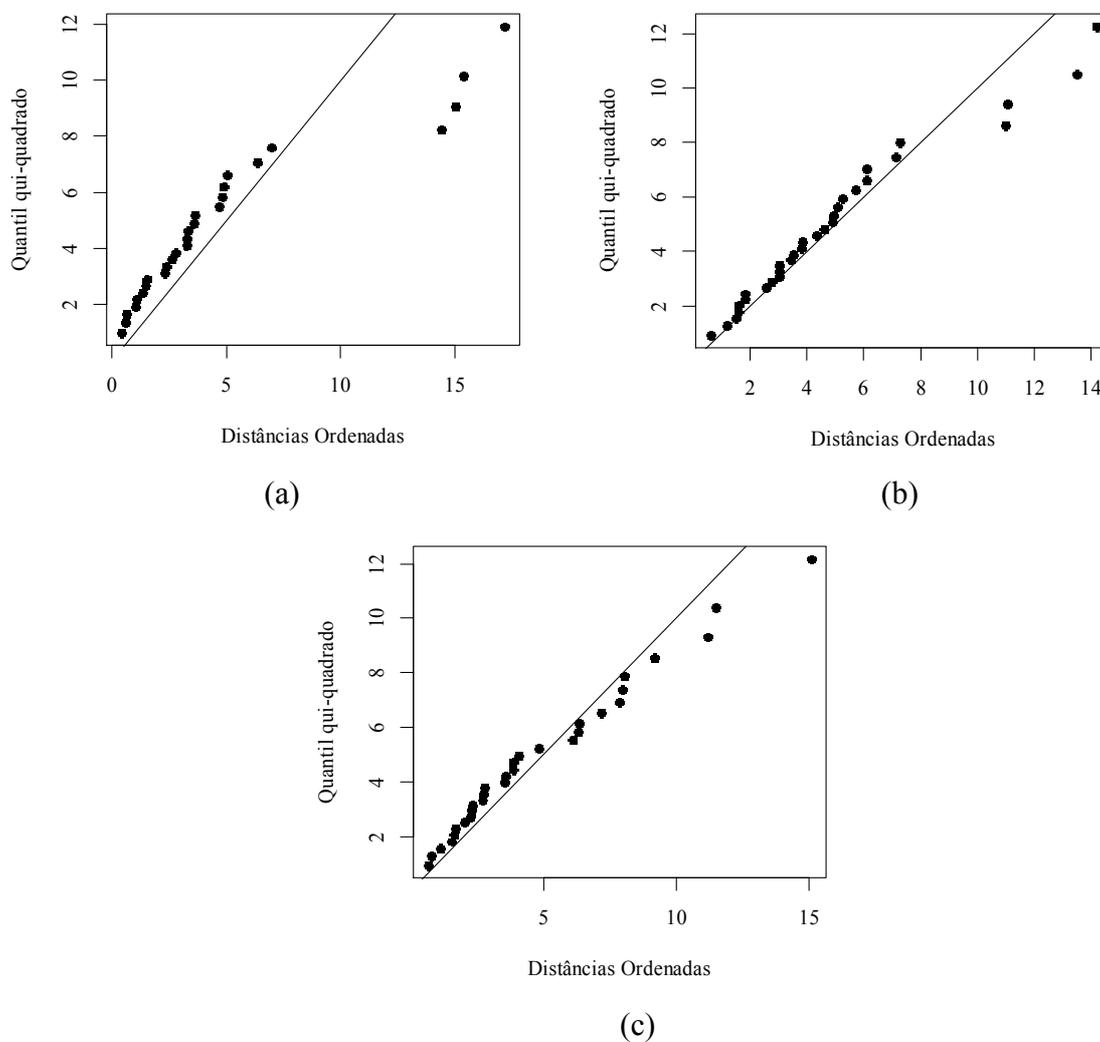


Figura 5. (a) *Q-Q plot* das observações do G1; (b) *Q-Q plot* das observações do G2; (c) *Q-Q plot* das observações do G3

Observa-se pela Figura 5 que a nuvem de pontos se aproxima de uma reta para os três grupos, exceto para algumas distâncias ordenadas maiores possível de comprometer a aderência à normalidade. Porém, Hair Jr. et al. (2005, p. 322) asseguram que “apesar da normalidade univariada de cada variável não garantir a normalidade multivariada, se todas as variáveis atendem essa condição, então quaisquer desvios da normalidade multivariada geralmente são inócuos.”

O resultado do procedimento de Box para igualdade de matrizes do teste de variâncias e covariâncias dos grupos não indicou rejeição da hipótese de nulidade que assegura a homogeneidade ao nível de 5% de significância ( $MC^{-1} = 42,3989$ ,  $p > 0,05$ ).

Após os testes estatísticos confirmando as suposições requeridas para a utilização dos procedimentos de MANOVA, calculou-se a matriz produto ( $\mathbf{B W}^{-1}$ ) resultante da multiplicação das matrizes relativas à variação entre os grupos ( $\mathbf{B}$ ) e a inversa da matriz comum de variação dentro dos grupos ( $\mathbf{W}^{-1}$ ), para o estabelecimento das estatísticas relativas ao teste de hipóteses sobre a igualdade dos vetores de médias dos grupos (Tabela 8).

Tabela 8. Resultado da MANOVA da densidade básica da madeira

<b>Critério</b>	<b>Valor da Estatística</b>	<b>Graus de Liberdade</b>	<b>Estatística do teste (F)</b>	<b>Valor p</b>
Traço de Hotelling-Lawley	3,3185	10; 160	26,55	<0,001
Traço de Pillai	1,1953	10; 164	24,36	<0,001
Critério de Wilks	0,1513	10; 162	25,45	<0,001
Critério de Roy	2,3389	5; 82	38,36	<0,001

Verificou-se, pela Tabela 8, que todos os critérios utilizados permitem rejeitar a hipótese de igualdade dos vetores de médias dos grupos ( $p < 0,001$ ), ou seja, foi possível mostrar diferença significativa entre os vetores das densidades básicas médias dos grupos considerando o tronco da árvore como um todo.

Para identificar quais componentes do vetor são definidores da significância da diferença entre os grupos, construíram-se os limites dos intervalos de 95% de confiança simultâneos de Hotelling para as diferenças entre pares das densidades básicas médias dos grupos nos discos amostrados no tronco da árvore, como pode ser observado na Tabela 9.

Complementou-se o estudo determinando-se a distância generalizada de Mahalanobis entre os vetores de médias das densidades básicas dos grupos (Tabela 9), considerando para o cálculo a matriz conjunta das variâncias e covariâncias obtida pelo *pool* das matrizes de variâncias e covariâncias dos grupos.

Tabela 9. Intervalos de confiança simultâneos de Hotelling para as diferenças entre as médias de dois grupos e distância de Mahalanobis

Disco	G1 x G2	G1 x G3	G2 x G3
A (0%)	(-0,0474; 0,0020)	(-0,0389; 0,0109)	(-0,0152; 0,0327)
C (25%)	(-0,0083; 0,0211)	(-0,0418; -0,0122) *	(-0,0476; -0,0191) *
D (50%)	(-0,0098; 0,0248)	(-0,0528; -0,0179) *	(-0,0596; -0,0261) *
E (75%)	(-0,0377; 0,0003)	(-0,0740; -0,0357) *	(-0,0546; -0,0178) *
F (100%)	(-0,0685; -0,0205) *	(-0,0949; -0,0465) *	(-0,0494; -0,0030) *
Distância de Mahalanobis	5,77	11,57	11,42

\*  $p < 0,05$

No disco correspondente a 100% da altura comercial da árvore, os resultados mostram que as densidades básicas médias da árvore se diferenciam entre si nos três grupos estudados ( $p < 0,05$ ). Já no disco amostrado na base (0% da altura comercial), não foi possível mostrar diferença entre as densidades básicas médias ( $p > 0,05$ ).

Na comparação das espécies puras com o híbrido (G1 x G3 e G2 x G3), as densidades básicas médias mostraram-se diferentes nos discos amostrados a 25%, 50%, 75% e 100% da altura comercial da árvore. Entre as espécies puras (G1 x G2) só foi possível mostrar diferença entre as densidades básicas médias no disco selecionado a 100% da altura comercial da árvore.

Em relação a distância de Mahalanobis observou-se que G1 e G2 (*E. saligna* e *E. grandis*) têm maior proximidade genética, o que concordou com o resultado estatístico encontrado na comparação de médias em que há igualdade das respostas em praticamente todas as posições, exceção à posição 100% da altura comercial que apresentou diferença significativa entre as densidades básicas médias das espécies puras.

### 6.3.2 Curvas de crescimento

Contemplando a estrutura de variação conjunta da densidade básica da madeira em relação à altura do tronco da árvore na direção longitudinal (matriz de variâncias e covariâncias), aplicou-se a técnica de análise de curvas de crescimento para caracterizar um modelo polinomial para os perfis médios de respostas da densidade básica em função da posição relativa do disco amostrado no tronco da árvore no sentido base topo (0%, 25%, 50%, 75% e 100% da altura comercial).

No ajuste de curvas polinomiais de graus 3, 2 e 1 aos dados de densidade básica da madeira, consideraram-se hipóteses da forma  $H_{0A}: \mathbf{I} \boldsymbol{\xi}^* \mathbf{G}_2 = \mathbf{0}$ , sendo a matriz  $\mathbf{G}_2$  formada por colunas da matriz  $\mathbf{G}'_{5 \times 5}$ , definida por:

$$\mathbf{G}' = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0) & (1) & (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix} \right] \end{matrix} & \end{matrix},$$

sendo que as colunas da matriz  $\mathbf{G}'$  correspondem aos coeficientes de polinômios ortogonais de graus 0, 1, 2, 3 e 4 para cinco níveis igualmente espaçados (MONTGOMERY, 2004).

O resultado do teste de ajustamento do modelo por meio do procedimento estatístico de “descarte” está apresentado na Tabela 10.

Tabela 10. Resultados do procedimento estatístico de “descarte” do polinômio

Colunas de $\mathbf{G}'$ utilizadas na construção de $\mathbf{G}_2$	Grau do polinômio cujo ajuste é testado	Valor da estatística do teste	Nível descritivo do teste (valor p)
(4)	3	21,0162	$< 10^{-4}$
(3), (4)	2	105,5450	$< 10^{-5}$
(2), (3), (4)	1	152,6554	$< 10^{-5}$

Na Tabela 10 observou-se o resultado estatístico do ajuste das curvas de crescimento pelo modelo polinomial. Em relação ao grau do polinômio, o máximo permitido frente às cinco posições relativas dos discos amostrados ao longo do tronco da árvore, indica possibilidade de 3º grau (p - 2). Todos os ajustes até o 3º grau apresentaram

nível descritivo (valor p) menor que 5%, o que indica insuficiência do grau polinomial para o ajuste da densidade básica da madeira.

Para dar continuidade à proposta de trabalho, optou-se por considerar o polinômio de grau três como o modelo preditivo desejado, pois, sob o aspecto visualizado na Figura 2, a prática em interpretar diagramas de dispersão indica ser possível concluir que um polinômio de 3º grau se ajusta razoavelmente às observações, ou seja, é possível afirmar que um polinômio cúbico descreve de forma satisfatória o perfil médio das densidades básicas da madeira na direção longitudinal do tronco da árvore de eucaliptos para os grupos estudados.

O modelo polinomial ajustado tem a forma geral descrita como:

$$\hat{\beta}_{ik} = \xi_{i0} + \xi_{i1}t_k + \xi_{i2}t_k^2 + \xi_{i3}t_k^3, \quad (27)$$

com  $i=1, 2, 3$  e  $k=1, 2, 3, 4, 5$ ; sendo que:

$\hat{\beta}_{ik}$  é o valor esperado da densidade básica da madeira para o  $i$ -ésimo grupo no  $k$ -ésimo nível da posição de avaliação;

$\xi_{i0}$  é o coeficiente linear para o  $i$ -ésimo grupo;

$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}$  são, respectivamente, os coeficientes dos termos de grau 1, 2 e 3 para o  $i$ -ésimo grupo.

As características e as matrizes associadas ao modelo polinomial podem ser considerados como MLMC( $\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\xi}\mathbf{G}, \boldsymbol{\Sigma}$ ), com  $\mathbf{Y}_{88 \times 5}$  a matriz de observações,

$$\mathbf{X}_{88 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} \xi_{10} & \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{20} & \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{30} & \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{G}_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 25 & 50 & 75 & 100 \\ 0 & 25^2 & 50^2 & 75^2 & 100^2 \\ 0 & 25^3 & 50^3 & 75^3 & 100^3 \end{bmatrix}.$$

Todavia, no presente estudo (níveis equidistantes, ou seja, discos amostrados ao longo do fuste da árvore), com a finalidade de simplificar os cálculos, o modelo é reescrito em função dos polinômios ortogonais, ou seja,

$$\hat{\beta}_{ik} = \xi_{i0}^* P_0(T_k) + \xi_{i1}^* P_1(T_k) + \xi_{i2}^* P_2(T_k) + \xi_{i3}^* P_3(T_k) \quad (28)$$

com  $P_l(T_k)$  o polinômio ortogonal de grau  $l$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ), sendo que  $T_k = \frac{t_k - 50}{25}$  e  $0 \leq t_k \leq 100$ .

Assim, o MLMC( $\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\xi}^*\mathbf{G}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*$ ) é definido por:

$$\xi^* = \begin{bmatrix} \xi_{10}^* & \xi_{11}^* & \xi_{12}^* & \xi_{13}^* \\ \xi_{20}^* & \xi_{21}^* & \xi_{22}^* & \xi_{23}^* \\ \xi_{30}^* & \xi_{31}^* & \xi_{32}^* & \xi_{33}^* \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{G}_1$  pode ser escrita de tal forma que suas colunas sejam as colunas (0), (1), (2) e (3) de  $\mathbf{G}^*$  e a matriz  $\mathbf{G}_2$  constituída pela coluna (4) de  $\mathbf{G}^*$ .

Sob essas considerações, tem-se a matriz dos parâmetros estimados para o modelo polinomial dos três grupos ( $\hat{\xi}^*$ ) e suas respectivas variâncias estimadas ( $\widehat{Var}\hat{\xi}^*$ ):

$$\hat{\xi}^* = \begin{bmatrix} 4,6489*10^{-1} & -1,3186*10^{-4} & -1,6287*10^{-4} & -3,7948*10^{-3} \\ 4,8004*10^{-1} & 6,6378*10^{-3} & 9,7300*10^{-3} & -6,4712*10^{-3} \\ 5,0612*10^{-1} & 1,3886*10^{-2} & 1,1429*10^{-3} & -3,5204*10^{-3} \end{bmatrix}$$

e

$$\widehat{Var}\hat{\xi}^* = \begin{bmatrix} 9,0982*10^{-6} & 1,8755*10^{-6} & 9,0550*10^{-7} & 4,4340*10^{-7} \\ 7,9242*10^{-6} & 1,6335*10^{-6} & 7,8866*10^{-7} & 3,8618*10^{-7} \\ 8,1883*10^{-6} & 1,6880*10^{-6} & 8,1495*10^{-7} & 3,9906*10^{-7} \end{bmatrix}.$$

#### 6.4 Comparação entre os resultados dos procedimentos univariado e multivariado

Nesta pesquisa, a densidade básica da madeira é estudada em função dos grupos (espécies e híbrido de eucaliptos) e das porcentagens da altura comercial da árvore (posição relativa dos discos amostrados ao longo do fuste da árvore), segundo as técnicas de análise univariada e análise multivariada.

Segundo Huang e Paes (2009), o nível de significância “representa a probabilidade de ocorrer o Erro Tipo I, ou seja, a probabilidade de rejeitar a hipótese nula (que supõe igualdade de médias) dado que ela é verdadeira.” Neste estudo, num nível de significância definido a priori de 5%, encontraram-se mais diferenças significativas no procedimento univariado do que no multivariado (Tabela 11). Conforme argumentam os autores, esse fato já era esperado, porque a análise global das comparações por meio de várias comparações univariadas possui o nível de significância “inflacionado” (aumentado), portanto indicam algumas falsas rejeições.

A Tabela 11 mostra as diferenças estatísticas encontradas na comparação entre os vetores das densidades básicas médias dos grupos, segundo os procedimentos univariado e multivariado.

Tabela 11. Diferenças significantes segundo os procedimentos estatísticos

Comparação	Procedimento	Disco				
		A (0%)	C (25%)	D (50%)	E(75%)	F(100%)
<b>G1 x G2</b>	Univariado	*			*	*
	Multivariado					*
<b>G1 x G3</b>	Univariado		*	*	*	*
	Multivariado		*	*	*	*
<b>G2 x G3</b>	Univariado		*	*	*	*
	Multivariado		*	*	*	*

\*  $p < 0,05$

Do ponto de vista do procedimento multivariado, verificou-se que os três grupos são diferentes entre si assegurando um nível conjunto de significância de 5%, considerando o tronco da árvore como um todo.

A vantagem obtida no procedimento multivariado é de os três grupos estudados (duas espécies e o híbrido) se mostrarem diferentes a um nível de 5% de significância. No procedimento univariado, também foi possível demonstrar que os três grupos se diferenciam em determinados discos, mas não é no mesmo nível de significância conjunto considerado na análise multivariada.

Em relação ao comportamento da densidade básica da madeira em função da posição relativa dos discos amostrados ao longo do tronco da árvore, as técnicas de estatística univariada (modelo de regressão polinomial) e multivariada (modelo linear multivariado de crescimento) apontam de maneira satisfatória que polinômios de terceiro grau se ajustam aos perfis médios de respostas dos grupos estudados.

A Tabela 12 mostra as estimativas dos coeficientes dos polinômios encontrados por meio das técnicas univariada e multivariada e seus respectivos erros padrão, para as duas espécies e o híbrido de eucaliptos.

Tabela 12. Estimativa e erro padrão dos coeficientes dos polinômios da regressão polinomial e das curvas de crescimento

Grupo	Grau	Coeficiente	
		$\hat{\alpha}_{i,l}$ (Erro Padrão)	$\hat{\xi}_{i,l}^*$ (Erro Padrão)
G1	0	$4,6661 \cdot 10^{-1}$ ( $1,8559 \cdot 10^{-4}$ )	$4,6489 \cdot 10^{-1}$ ( $3,2162 \cdot 10^{-4}$ )
	1	$-3,6357 \cdot 10^{-4}$ ( $1,3123 \cdot 10^{-4}$ )	$-1,3186 \cdot 10^{-4}$ ( $1,4759 \cdot 10^{-4}$ )
	2	$7,3438 \cdot 10^{-5}$ ( $1,1091 \cdot 10^{-4}$ )	$-1,6287 \cdot 10^{-4}$ ( $1,0243 \cdot 10^{-4}$ )
	3	$-3,4341 \cdot 10^{-3}$ ( $1,1312 \cdot 10^{-4}$ )	$-3,7948 \cdot 10^{-3}$ ( $7,1085 \cdot 10^{-5}$ )
G2	0	$4,8103 \cdot 10^{-1}$ ( $2,0334 \cdot 10^{-4}$ )	$4,8004 \cdot 10^{-1}$ ( $3,0016 \cdot 10^{-4}$ )
	1	$6,5041 \cdot 10^{-3}$ ( $1,4379 \cdot 10^{-4}$ )	$6,6378 \cdot 10^{-3}$ ( $1,3774 \cdot 10^{-4}$ )
	2	$9,8661 \cdot 10^{-3}$ ( $1,2152 \cdot 10^{-4}$ )	$9,7300 \cdot 10^{-3}$ ( $9,5593 \cdot 10^{-5}$ )
	3	$-6,2631 \cdot 10^{-3}$ ( $1,4379 \cdot 10^{-4}$ )	$-6,4712 \cdot 10^{-3}$ ( $6,6340 \cdot 10^{-5}$ )
G3	0	$5,0700 \cdot 10^{-1}$ ( $1,7603 \cdot 10^{-4}$ )	$5,0612 \cdot 10^{-1}$ ( $3,0512 \cdot 10^{-4}$ )
	1	$1,3768 \cdot 10^{-2}$ ( $1,2447 \cdot 10^{-4}$ )	$1,3886 \cdot 10^{-2}$ ( $1,4001 \cdot 10^{-4}$ )
	2	$1,2640 \cdot 10^{-3}$ ( $1,0520 \cdot 10^{-4}$ )	$1,1429 \cdot 10^{-3}$ ( $9,7173 \cdot 10^{-5}$ )
	3	$-3,3354 \cdot 10^{-3}$ ( $1,2447 \cdot 10^{-4}$ )	$-3,5204 \cdot 10^{-3}$ ( $6,7437 \cdot 10^{-5}$ )

Constatou-se que os coeficientes estimados dos polinômios ajustados às observações pelos dois métodos são muito próximos, exceto o coeficiente do termo de segundo grau do G1 (*E. saligna*).

Em relação aos erros padrão das estimativas dos coeficientes observou-se que, para os termos independentes e de primeiro grau do polinômio, são todos da mesma ordem de grandeza, sendo maiores para os estimados pela técnica de análise multivariada. Já para os termos de segundo e terceiro graus, exceto o termo de segundo grau do G1, os erros padrão são menores.

O vetor de médias das densidades básicas da madeira do *E. saligna*, do *E. grandis* e do híbrido de eucaliptos foi estimado por meio da equação de regressão polinomial e da curva de crescimento ajustadas e calculou-se a soma de quadrados dos erros (SQErro) para cada grupo, como pode ser visto na Tabela 13.

Tabela 13. Valores médios da densidade básica da madeira estimados pela regressão polinomial e pela curva de crescimento e SQErro segundo grupo

Grupo	Disco	$\bar{y}_{iOBS}$	$\hat{y}_{iMRP}$	$\hat{y}_{iMLMC}$
<b>G1</b>	A (0%)	0,4718	0,4716	0,4694
	C (25%)	0,4564	0,4587	0,4561
	D (50%)	0,4719	0,4665	0,4652
	E (75%)	0,4694	0,4744	0,4740
	F (100%)	0,4635	0,4619	0,4597
	<b>SQErro</b>			$6,23789 \cdot 10^{-5}$
<b>G2</b>	A (0%)	0,4945	0,4953	0,4940
	C (25%)	0,4500	0,4496	0,4481
	D (50%)	0,4644	0,4613	0,4606
	E (75%)	0,4881	0,4927	0,4925
	F (100%)	0,5080	0,5063	0,5050
	<b>SQErro</b>			$3,4556 \cdot 10^{-5}$
<b>G3</b>	A (0%)	0,4858	0,4860	0,4849
	C (25%)	0,4834	0,4840	0,4826
	D (50%)	0,5073	0,5045	0,5038
	E (75%)	0,5243	0,5275	0,5273
	F (100%)	0,5342	0,5331	0,5320
	<b>SQErro</b>			$1,9947 \cdot 10^{-5}$

Constatou-se que a soma de quadrado de erros, para os grupos estudados, é praticamente a mesma na estimativa dos valores médios da densidade básica da madeira pela regressão polinomial ou pelas curvas de crescimento.

Portanto, os resultados numéricos encontrados nos dois procedimentos mostraram-se muito próximos, mas no procedimento multivariado as relações para a determinação dos valores são consistentes, enquanto que, no univariado deixam de ter esta importante propriedade.

## 7 CONCLUSÕES

A revisão de literatura demonstrou que modelos lineares multivariados de crescimento, metodologia proposta para esta pesquisa, apresentou-se pouco aplicada nas áreas de ciências agrônômicas e florestais, especificamente, no estudo da variação longitudinal da densidade básica da madeira em função da posição relativa do disco retirado do tronco da árvore.

Na comparação entre os vetores de médias da densidade básica da madeira nos grupos de eucaliptos estudados (*E. saligna*, *E. grandis* e *E. grandis* x *E. urophylla*), o disco selecionado a 100% da altura comercial da árvore é o diferenciador de todos eles, os demais discos (25%, 50% e 75% da altura comercial da árvore) são diferenciadores das espécies puras com o híbrido. O disco que não deve ser considerado para diferenciação dos grupos é o retirado da base da árvore, pois nele todas as densidades mostraram-se iguais estatisticamente.

Em relação aos modelos de predição com erros independentes, a inspeção gráfica dos dados mostrou que, possivelmente, não existe um único modelo para a variação longitudinal da densidade básica em função da posição relativa dos discos amostrados ao longo do fuste da árvore para todos os grupos estudados.

No contexto do MLMC, não foi possível ajustar com significância estatística um modelo polinomial até de 3º grau para a resposta da densidade básica média da madeira se consideradas as posições relativas dos discos selecionados no sentido base topo do tronco da árvore. Em relação aos processos de ajuste, procedimento univariado e multivariado, verificou-se um equilíbrio na soma de quadrado de erros das estimativas para os modelos ajustados.

As matrizes de correlação encontradas mostraram que existe uma forte dependência entre as densidades básicas das madeiras mensuradas em discos retirados na direção longitudinal do tronco da árvore de eucaliptos (cinco posições consideradas), expressadas nas significâncias encontradas. Este fato evidencia a necessidade irrestrita do uso de procedimentos estatísticos que levem em consideração a estrutura de variação conjunta das observações (matriz de variâncias e covariâncias).

A vantagem obtida nos procedimentos multivariados indica que os três grupos estudados mostraram-se diferentes no nível de 5% de significância. No procedimento univariado, também foi possível demonstrar que os três grupos se diferenciam, em determinados discos, mas não há como assegurar o mesmo nível de significância considerado nos procedimentos multivariados.

Como sugestões para futuros estudos podem-se destacar três linhas interessantes para pesquisas; a primeira consiste em insistir nos modelos polinomiais fracionando o tronco da árvore em mais discos, a segunda, utilizar outros tipos de modelos não-lineares para estudar o comportamento densidade básica, e como terceira, empregar funções de estimação generalizadas na construção de estimadores consistentes e com distribuição assintótica conhecida.

## REFERÊNCIAS

- AMADOR, J. P. **Modelos mistos no ajuste de curvas de crescimento de *Ricinus communis* L.** 2010. 139 f. Tese (Doutorado em Agronomia / Produção Vegetal) – Centro de Ciências Rurais, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2010. Disponível em: <[http://cascavel.cpd.ufsm.br/tede/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=3307](http://cascavel.cpd.ufsm.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=3307)>. Acesso em: 21 jan. 2011.
- BATISTA, D. C.; KLITZKE, R. J.; SANTOS, C. V. T. Densidade básica e retratibilidade da madeira de clones de três espécies de *Eucalyptus*. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 20, n. 4, p.665-674, dez., 2010. Disponível em: <<http://www.bioline.org.br/pdf?cf10057>>. Acesso em: 19 dez. 2011.
- BENJAMIN, C. A. **Comparação entre três critérios de amostragem para avaliação da densidade básica da madeira de florestas implantadas de Eucaliptos.** 2002. 131 f. Dissertação (Mestrado em Agronomia: Energia na Agricultura) – Faculdade de Ciências Agrônômicas, Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”, Botucatu, 2002.
- BENJAMIN, C. A. **Estudo da estrutura anatômica e das propriedades físicas e mecânicas da madeira de *Corymbia (Eucalyptus) citriodora* e *Eucalyptus grandis*.** 2006. 158 f. Tese (Doutorado em Agronomia: Energia na Agricultura) - Faculdade de Ciências Agrônômicas, Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”, Botucatu, 2006.
- BRASIL, M. A. M.; FERREIRA, M. Variação da densidade básica da madeira de *Eucalyptus alba* Reinw, *E. saligna* Smith e *E. grandis* Hill ex-Maiden aos 5 anos de idade, em função do local e do espaçamento. **IPEF**, Piracicaba, v. 3, n. 2, p.129-149, 1971.
- CARDOSO, G. V. et al. Variação da densidade básica da madeira de *Eucalyptus globulus* no sentido longitudinal da árvore. In: CONGRESSO E EXPOSIÇÃO ANUAL DE CELULOSE E PAPEL, 35., 2002, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABTCP, 2002. Disponível em: <<http://www.celso-foelkel.com.br/artigos/ABTCP/abtcp.%20para%20site%202002d.pdf>>. Acesso em: 19 dez. 2011.

CARVALHO, S. P. C. **Uma nova metodologia de avaliação do crescimento e da produção de *Eucalyptus* sp clonal para fins energéticos**. 2010. 103 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal / Ciências Florestais) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010. Disponível em: <<http://www.ipef.br/servicos/teses/arquivos/carvalho,spc.pdf>>. Acesso em: 24 ago. 2012.

COUTO, A. M. et al. Amostragens longitudinais alternativas para a determinação da densidade básica em clones de *Eucalyptus* sp. **Floresta e Ambiente**, Rio de Janeiro, v. 19, n. 2, p. 184-193, abr./jun., 2012. Disponível em: <<http://www.floram.org/files/v19n2/v19n2a10.pdf>>. Acesso em: 03 fev. 2014.

DALLAL, G. E.; WILKISON, L. An analytic approximation to the distribution of lilliefors's test statistic for normality. **The American Statistician**, v. 40, n. 4, p.291-296, nov., 1986.

DOWNES, G. M. et al. **Sampling plantation eucalyptus for wood and fibre properties**. Australia: CSIRO Publishing, 1997. 132 p.

EISFELD, R. et al. A modelagem da massa específica básica dos cavacos a partir de variáveis dendométricas e da massa específica do disco. **Floresta**, Curitiba, v. 39, n. 4, p. 877-886, out./dez., 2009. Disponível em: <<http://ojs.c3sl.ufpr.br/ojs2/index.php/floresta/article/view/16324/10796>>. Acesso em: 19 dez. 2011.

ELOY, E. et al. Variação axial e efeito do espaçamento na massa específica da madeira de *Eucalyptus grandis* e *Acacia mearnsii*. **Ciência da Madeira (Brazilian Journal of Wood Science)**, Pelotas, v. 4, n. 2, p. 215-227, nov., 2013. Disponível em: <<http://www.bibliotekevvirtual.org/revistas/RCM/v04n02/v04n02a07.pdf>>. Acesso em: 03 fev. 2014.

FOELKEL, C.; MORA, E.; MENOCELLI, S. Densidade básica: sua verdadeira utilidade como índice de qualidade da madeira de eucalipto para produção de celulose. **O papel**, São Paulo, v. 53, n. 5, p. 35-40, 1992.

FREITAS, E. G. **Análise de dados longitudinais em experimentos com cana-de-açúcar**. 2007. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Florestais) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2007.

HAIR, J. F. Jr.. et al. **Análise multivariada de dados**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 593 p.

HASELEIN, C. R. et al. Características tecnológicas da madeira de árvores matrizes de *Eucalyptus grandis*. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 14, n. 2, p.145-155, 2004. Disponível em: <<http://cascavel.ufsm.br/revistas/ojs-2.2.2/index.php/cienciaflorestal/article/view/1814/1078>>. Acesso em: 19 dez. 2011.

HUANG, G.; PAES, A. T. Por dentro da estatística: Posso usar o teste t de Student quando preciso comparar três ou mais grupos? **Einsten: Educação Continuada em Saúde**, São Paulo, v. 7 n. 2, p. 63-64, 2009. Disponível em:

<<http://professor.ucg.br/siteDocente/admin/arquivosUpload/3633/material/Texto%20Teste%20de%20t%20e%20ANOVA.pdf>>. Acesso em: 03 maio 2012.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 6. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2007. 773 p.

MACEDO, O. J.; BARBIN, D.; MOURÃO, G. B. Genetic parameters for post weaning growth of nelore cattle using polynomials and trigonometric functions in random regression models. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v.66, n.4, p. 522-528, jul./ago., 2009. Disponível em:<<http://www.scielo.br/pdf/sa/v66n4/a14v66n4.pdf>>. Acesso em: 24 ago. 2012.

MARIGUELE, K. H. et al. Métodos de análise de dados longitudinais para o melhoramento genético da pinha. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 46, n. 12, p. 1657-1664, dez., 2011. Disponível em: <<http://webnotes.sct.embrapa.br/pdf/pab2011/12/46n12a11.pdf>>. Acesso em: 24 ago. 2012.

MARTINS, I. S. et al. Comparação entre os processos de seleção entre e dentro e o de seleção combinada, em progênies de *Eucalyptus grandis*. **Cerne**, Lavras, v. 11, n. 1, p.16-24, mar., 2005. Disponível em: <[http://www.dcf.ufla.br/cerne/artigos/11-02-20092471v11\\_n1\\_artigo%2002.pdf](http://www.dcf.ufla.br/cerne/artigos/11-02-20092471v11_n1_artigo%2002.pdf)>. Acesso em: 19 dez. 2011.

MATOS, P. P. et al. Coleta de amostras para estudos da influência de tratamentos silviculturais na qualidade da madeira. **Embrapa Florestas - Comunicado Técnico (INFOTECA-E)**, 2003. Disponível em: <<http://www.infoteca.cnptia.embrapa.br/handle/doc/309637>>. Acesso em: 19 dez. 2011.

MATTOS, B. D. et al. Variação axial da densidade básica da madeira de três espécies de gimnospermas. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, Recife, v. 6, n. 1, p.121-126, jan. / mar., 2011. Disponível em: <[http://www.agraria.pro.br/sistema/index.php?journal=agraria&page=article&op=view&path%5B%5D=agraria\\_v6i1a1080&path%5B%5D=888](http://www.agraria.pro.br/sistema/index.php?journal=agraria&page=article&op=view&path%5B%5D=agraria_v6i1a1080&path%5B%5D=888)>. Acesso em: 03 maio 2012.

MINGOTI, S. A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005. 297 p.

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 6. ed. New York: John Wiley & Sons, 2004. 660 p.

MORRISON, D. F. **Multivariate statistical methods**. 4. ed. New York: Duxbury Press, 2004. 498 p.

NOGUEIRA, M. V. P.; VALE, A. T. Densidade básica da madeira de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* proveniente do cerrado: relação com a densidade básica média e variação radial e axial. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 21, p. 547-554, 1997.

OLIVEIRA, J. T. S.; SILVA, J. C. Variação da retrabilidade e densidade básica da madeira de *Eucalyptus Saligna* Sm. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 27, n. 3, p. 381-385, 2003.

OSHIWA, M. **Programa computacional para ajuste de curvas polinomiais em experimentos envolvendo dados longitudinais**. 2005. 70 f. Tese (Doutorado em Agronomia / Energia na Agricultura) – Faculdade de Ciências Agrônômicas, Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”, Botucatu, 2005.

OSHIWA, M.; PADOVANI, C. R. Programa computacional para ajuste de curvas polinomiais em experimentos envolvendo dados longitudinais. **Energia na Agricultura**, Botucatu, v. 20, n. 3, p. 113-130, 2005.

POTTHOFF, R. F.; ROY, S. N. A generalized multivariate of variance model useful especially for comparison of growth curve problems. **Biometrika**, v. 51, p. 313-326, 1964.

R Development Core Team. R: Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. Disponível em <<http://www.r-project.org/>>. Acesso em: 30 jul. 2010.

ROCHA, K. D. **Produtividade volumétrica de clones de Eucalyptus spp. na região do polo gesseiro de Araripe**. 2012. Tese (Doutorado em Ciências Florestais / Manejo Florestal) – Departamento de Ciência Florestal, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2012. Disponível em: <[http://www.bibliotecaflorestal.ufv.br/bitstream/handle/123456789/4733/Tese\\_Kleybiana-Dantas-da-Rocha.pdf?sequence=1](http://www.bibliotecaflorestal.ufv.br/bitstream/handle/123456789/4733/Tese_Kleybiana-Dantas-da-Rocha.pdf?sequence=1)>. Acesso em: 25 fev. 2013.

ROSA, G. L. M. et al. Assesment of alternative linear statistical models for studying growth in crossbred lambs. **J. Anim Sci.**, v. 78, s. 1, 2000.

ROSA, C. A. B. et al. Variação das características das árvores de *Eucalyptus saligna* Smith em função da altura do tronco. In: SIMPÓSIO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FLORESTAL, 1., 2001, Santa Maria. **Anais...** . Santa Maria: UFSM, 2001. p. 115 - 116. Disponível em: <[http://www.celso-foelkel.com.br/artigos/Casca\\_arvores\\_simposio\\_PG2001.pdf](http://www.celso-foelkel.com.br/artigos/Casca_arvores_simposio_PG2001.pdf)>. Acesso em: 19 dez. 2011.

RUY, O. F. **Variação na qualidade de madeira em clones de Eucalyptus urophylla S. T. Blake da Ilha de Flores, Indonésia**. 1998. 68 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Florestais) - Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1998.

SETTE Jr., C. R. et al. Efeito da idade e posição de amostragem na densidade e características anatômicas da madeira *Eucalyptus grandis*. **Árvore**, Viçosa, v. 36, n. 6, p.1183-1190, nov./dez. 2012. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rarv/v36n6/19.pdf>>. Acesso em: 25 fev. 2013.

SINGER, J. M. **Análise de curvas de crescimento**. 1977. 113 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1977.

SOUZA, L. **Curvas de crescimento: Análise de dados longitudinais incompletos com resíduos autocorrelacionados**. 1989. 84 f. Tese (Doutorado em Agronomia / Estatística e Experimentação Agronômica) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1989.

STURION A. J., et al. Variação da densidade básica da madeira de doze espécies de *Eucalyptus* plantadas em Uberaba, MG. **Boletim de Pesquisa Florestal**, Colombo, n. 14, p.28-38, 1987. Disponível em: <<http://www.cnpf.embrapa.br/publica/boletim/boletarqv/boletim14/sturion.pdf>>. Acesso em: 19 dez. 2011.

TRUGILHO, P. F. Densidade básica e estimativa de massa seca e de lignina na madeira em espécies de *Eucalyptus*. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 33, n. 5, p.1228-1239, set./out. 2009. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/cagro/v33n5/v33n5a05.pdf>>. Acesso em: 25 fev. 2013.

VALE, A. T. et al. Variação axial da densidade básica da madeira de *acacia mangium* Willd aos sete anos de idade. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 9, n. 2, p.85-92, 1999.

VIANA, L. C. et al. Modelos de calibração e a espectroscopia no infravermelho próximo para predição das propriedades químicas e da densidade básica da madeira de *Eucalyptus*. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 20, n. 2, p.367-376, 2010. Disponível em: <<http://cascavel.ufsm.br/revistas/ojs-2.2.2/index.php/cienciaflorestal/article/view/1859>>. Acesso em: 19 dez. 2011.

## APÊNDICE 1

Conjunto de dados das densidades básicas da madeira mensuradas ( $\text{g/cm}^3$ ) em cinco discos retirados ao longo do tronco no sentido base topo das árvores, para os três grupos estudados.

Tabela 14. Dados de densidade básica para 27 árvores de *E. saligna*

<b>Disco A</b>	<b>Disco C</b>	<b>Disco D</b>	<b>Disco E</b>	<b>Disco F</b>
0,485012	0,464849	0,484346	0,465879	0,436620
0,503371	0,455153	0,457038	0,491686	0,562500
0,442593	0,428416	0,456954	0,462963	0,448276
0,462692	0,449477	0,461957	0,462687	0,450704
0,457322	0,448396	0,474806	0,457386	0,450549
0,462081	0,474798	0,466368	0,475362	0,482890
0,441315	0,457700	0,487234	0,490751	0,454545
0,475479	0,454864	0,469484	0,406130	0,463950
0,459519	0,460798	0,468065	0,452200	0,451128
0,510497	0,470903	0,491176	0,498906	0,485175
0,439371	0,438976	0,456621	0,455607	0,450980
0,486659	0,449236	0,475510	0,485855	0,475543
0,461273	0,444264	0,468578	0,467188	0,464497
0,466996	0,469126	0,476410	0,495413	0,488281
0,444563	0,455391	0,463212	0,470588	0,448000
0,449219	0,450472	0,461631	0,456790	0,448430
0,463707	0,451482	0,471028	0,473770	0,470238
0,472030	0,447793	0,454414	0,455285	0,436620
0,461781	0,449971	0,472710	0,461988	0,440945
0,458756	0,459195	0,469592	0,476636	0,471042
0,500811	0,473292	0,484010	0,475561	0,445205
0,498447	0,474344	0,486204	0,488032	0,463768
0,510012	0,429792	0,433996	0,436031	0,467500
0,504819	0,487983	0,487387	0,476712	0,478469
0,444261	0,445055	0,463490	0,485792	0,445402
0,502001	0,475749	0,527360	0,469432	0,464615
0,474646	0,455852	0,471338	0,479950	0,468647

Tabela 15. Dados de densidade básica para 31 árvores de *E. grandis*

<b>Disco A</b>	<b>Disco C</b>	<b>Disco D</b>	<b>Disco E</b>	<b>Disco F</b>
0,535374	0,451787	0,452971	0,539262	0,547244
0,448458	0,442450	0,461939	0,485897	0,500000
0,492498	0,457364	0,470614	0,499509	0,556122
0,503736	0,442038	0,515200	0,504007	0,519380
0,453814	0,445833	0,459870	0,474308	0,496000
0,469861	0,425816	0,478235	0,490364	0,532508
0,476706	0,440751	0,451780	0,477994	0,498423
0,503263	0,456469	0,471408	0,484424	0,485651
0,544274	0,477537	0,468828	0,500000	0,509653
0,444706	0,438728	0,450808	0,487064	0,477193
0,502724	0,437095	0,471238	0,524444	0,568627
0,446090	0,448718	0,475779	0,477650	0,491857
0,488911	0,445535	0,423481	0,434750	0,474684
0,546522	0,460947	0,459522	0,495010	0,507692
0,467019	0,435100	0,459194	0,483402	0,496324
0,521836	0,485569	0,479401	0,494973	0,510040
0,466362	0,432754	0,456476	0,479195	0,526971
0,498832	0,469289	0,474891	0,501487	0,533088
0,467098	0,422803	0,453875	0,467153	0,473881
0,481508	0,434783	0,439203	0,485249	0,476793
0,528800	0,486502	0,466912	0,496350	0,500000
0,471420	0,451900	0,463780	0,492520	0,498452
0,531183	0,461812	0,464412	0,493771	0,517241
0,504862	0,447124	0,464956	0,496454	0,540193
0,539484	0,471636	0,495195	0,495146	0,503425
0,492498	0,414894	0,426113	0,441035	0,461255
0,525213	0,485164	0,504598	0,505960	0,516588
0,452271	0,441461	0,452479	0,467958	0,471098
0,514448	0,447362	0,458685	0,480249	0,549020
0,515382	0,450515	0,455744	0,476959	0,472222
0,495533	0,441756	0,469600	0,498826	0,537255

Tabela 16. Dados de densidade básica para 30 híbridos (*E. grandis* x *E. urophylla*)

<b>Disco A</b>	<b>Disco C</b>	<b>Disco D</b>	<b>Disco E</b>	<b>Disco F</b>
0,488084	0,469939	0,513035	0,531423	0,536290
0,468774	0,489348	0,497322	0,527273	0,536332
0,465208	0,476304	0,495641	0,519608	0,542857
0,509643	0,493531	0,516529	0,526990	0,535117
0,503476	0,496617	0,526962	0,540273	0,531250
0,494226	0,483542	0,490798	0,503448	0,507463
0,487142	0,492529	0,547239	0,549261	0,596154
0,515811	0,505150	0,507974	0,518362	0,526042
0,493901	0,486054	0,537003	0,525871	0,530000
0,519198	0,502174	0,527236	0,539458	0,544061
0,479066	0,456856	0,483206	0,493266	0,566038
0,476915	0,479560	0,509477	0,559494	0,560000
0,495156	0,491196	0,500705	0,517937	0,517647
0,441590	0,459647	0,475410	0,509780	0,495050
0,477103	0,477114	0,503497	0,529161	0,539519
0,472944	0,475655	0,509447	0,544919	0,541485
0,510155	0,498817	0,517241	0,527812	0,547101
0,552239	0,504909	0,530543	0,535065	0,554217
0,485555	0,502463	0,516923	0,540514	0,548523
0,487189	0,492597	0,495873	0,500000	0,517361
0,509333	0,490961	0,523977	0,529274	0,526923
0,490671	0,490881	0,535007	0,576159	0,552239
0,471014	0,472293	0,494930	0,517435	0,530769
0,457977	0,475385	0,495249	0,521779	0,529412
0,492034	0,473449	0,487892	0,504032	0,518692
0,442717	0,474545	0,477541	0,487265	0,512535
0,467182	0,466734	0,476342	0,484708	0,480287
0,468320	0,492039	0,517284	0,541710	0,533569
0,483044	0,458588	0,490408	0,506434	0,503571
0,468077	0,474436	0,516860	0,520904	0,565217

## APÊNDICE 2

A matriz de correlação,  $\mathbf{R}_1$ , entre as densidades básicas mensuradas nos discos amostrados ao longo do tronco das árvores da espécie *E. saligna* é dada por:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,4716^* & 0,3295 & 0,1277 & 0,4438^* \\ & 1 & 0,7216^* & 0,4083^* & 0,2274 \\ & & 1 & 0,3687 & -0,0125 \\ & & & 1 & 0,3848^* \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

em que  $*p < 0,05$ .

A matriz de correlação,  $\mathbf{R}_2$ , entre as densidades básicas mensuradas nos discos amostrados ao longo do tronco das árvores da espécie *E. grandis* é dada por:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6413^* & 0,2888 & 0,4428^* & 0,3335 \\ & 1 & 0,4864^* & 0,4197^* & 0,1899 \\ & & 1 & 0,5865^* & 0,4318^* \\ & & & 1 & 0,7189^* \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

em que  $*p < 0,05$ .

A matriz de correlação,  $\mathbf{R}_3$ , entre as densidades básicas mensuradas nos discos amostrados ao longo do tronco das árvores do híbrido (*E. grandis* x *E. urophylla*) é dada por:

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6873^* & 0,5935^* & 0,2954 & 0,2429 \\ & 1 & 0,6763^* & 0,4923^* & 0,3070 \\ & & 1 & 0,7903^* & 0,6536^* \\ & & & 1 & 0,6193^* \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

em que  $*p < 0,05$ .

A matriz de correlação,  $\mathbf{R}$ , entre as densidades básicas mensuradas nos discos amostrados ao longo do tronco das árvores consideradas nesse estudo é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,3964^* & 0,2383^* & 0,2992^* & 0,3867^* \\ & 1 & 0,8012^* & 0,6595^* & 0,4511^* \\ & & 1 & 0,7505^* & 0,5359^* \\ & & & 1 & 0,7892^* \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

em que  $*p < 0,05$ .

### APÊNDICE 3

Código do programa em R para o ajustamento do grau do polinômio, para a estimativa das matrizes  $\hat{\xi}^*$  e  $\widehat{Var}\hat{\xi}^*$ .

```
# LEITURA DOS DADOS
```

```
library(XLConnect, pos=4)
.Workbook<-
loadWorkbook("C:/Users/Gislaine/Documents/Gislaine/Doutorado/Tese/Dados/dados_curvas_crescimento_1.xlsx")
dadosdensi<- readWorksheet(.Workbook, "dados_finais")
remove(.Workbook)
```

```
dadosG1=dadosdensi[1:27,2:6]
dadosG2=dadosdensi[28:58,2:6]
dadosG3=dadosdensi[59:88,2:6]
n1=nrow(dadosG1)
n2=nrow(dadosG2)
n3=nrow(dadosG3)
n=n1+n2+n3
g=3                # grupos
p=5
```

```
# AJUSTAMENTO DO GRAU DA CURVA DE CRESCIMENTO
```

```
Y=matrix(c(dadosdensi[,2],dadosdensi[,3],dadosdensi[,4],dadosdensi[,5],dadosdensi[,6]),nrow=n,ncol=5)
v1=c(rep(1,n1),rep(0,n2),rep(0,n3))
v2=c(rep(0,n1),rep(1,n2),rep(0,n3))
v3=c(rep(0,n1),rep(0,n2),rep(1,n3))
v4=c(rep(0,n1),rep(0,n2),rep(0,n3))
X=matrix(c(v1,v2,v3),nrow=n,ncol=g)
```

```
p0=c(1,1,1,1,1)
p1=c(-2,-1,0,1,2)
p2=c(2,-1,-2,-1,2)
p3=c(-1,2,0,-2,1)
p4=c(1,-4,6,-4,1)
```

```
P=matrix(c(p0,p1,p2,p3,p4),nrow=p,ncol=p) # matriz dos coeficientes dos polinômios ortogonais
```

```
# POLINÔMIO DE GRAU 3
```

```
G1=matrix(c(p0,p1,p2,p3),nrow=p,ncol=p-1)
posto=qr(G1)
q=posto[[2]]
```

```
G2=matrix(c(p4),nrow=p,ncol=p-q)
I=diag(n)
```

```
P_1=t(G2)%*%t(Y)%*%X%*(solve(t(X)%*%X))%*%t(X)%*%Y%*%G2
Q_1=t(G2)%*%t(Y)%*(I-(X%*(solve(t(X)%*%X))%*%t(X)))%*%Y%*%G2
```

```
d1=det(Q_1)
soma=P_1+Q_1
d2=det(soma)
lambda=d1/d2
lambda
```

```
s=min(g,p-q)
s
```

```
RV=(-(n-g-0.5*(p-q-g+1)))*log(lambda)
```

```
gl=g*(p-q)
p_valor=1-pchisq(RV,gl)
p_valor
```

```
# Aproximação pela F
m1=(abs(g-(p-q))-1)/2
m2=(n-g-(p-q)-1)/2
```

```
v_obs=((m2+1)/(m1+1))*((1-lambda)/lambda)
v_obs
gl1=(2*m1)+2
gl2=(2*m2)+2
```

```
p_valor=1-pf(v_obs,gl1,gl2)
p_valor
```

```
# POLINÔMIO DE GRAU 2
```

```
G1=matrix(c(p0,p1,p2),nrow=p,ncol=p-2)
posto=qr(G1)
q=posto[[2]]
```

```
G2=matrix(c(p3,p4),nrow=p,ncol=p-q)
```

```
P_1=t(G2)%*%t(Y)%*%X%*(solve(t(X)%*%X))%*%t(X)%*%Y%*%G2
Q_1=t(G2)%*%t(Y)%*(I-(X%*(solve(t(X)%*%X))%*%t(X)))%*%Y%*%G2
```

```
d1=det(Q_1)
soma=P_1+Q_1
d2=det(soma)
lambda=d1/d2
lambda
```

```
s=min(g,p-q)
s
```

```
RV=(-(n-g-0.5*(p-q-g+1)))*log(lambda)
```

```
gl=g*(p-q)
gl
```

```

p_valor=1-pchisq(RV,gl)
P_valor

# Aproximação pela F

m1=(abs(g-(p-q))-1)/2
m2=(n-g-(p-q)-1)/2
v_obs=((2*m2)+2)/((2*m1)+3)*((1-sqrt(lambda))/sqrt(lambda))
v_obs

gl1=(4*m1)+6
gl2=4*(m2+1)
p_valor=1-pf(v_obs,gl1,gl2)
p_valor

# POLINÔMIO DE GRAU 1

G1=matrix(c(p0,p1),nrow=p,ncol=p-3)
posto=qr(G1)
q=posto[[2]]

G2=matrix(c(p2,p3,p4),nrow=p,ncol=p-q)

P_1=t(G2)%*%t(Y)%*%X%(solve(t(X)%*%X))%*%t(X)%*%Y%*%G2
Q_1=t(G2)%*%t(Y)%*%(I-X%(solve(t(X)%*%X))%*%t(X))%*%Y%*%G2

d1=det(Q_1)
soma=P_1+Q_1
d2=det(soma)
lambda=d1/d2
lambda

s=min(g,p-q)
s

RV=-((n-g-0.5*(p-q-g+1))*log(lambda))

gl=g*(p-q)
p_valor=1-pchisq(RV,gl)
p_valor

# KSI ESTIMADA
# POLINÔMIO DE GRAU 3

S=(t(Y)%*%(I-X%(solve(t(X)%*%X))%*%t(X))%*%Y) # matriz S
S_inv=solve(S) # matriz inversa de S
G_estr=matrix(c(p0,p1,p2,p3),nrow=p-1,ncol=p,byrow=T)
G_aux=solve(G_estr%*%S_inv%*%t(G_estr))
Y_estr=(Y%*%S_inv%*%t(G_estr))%*%(G_aux)

ksi=(solve(t(X)%*%X))%*%(t(X)%*%Y_estr) # matriz de parâmetros
ksi

```

```
# VARIÂNCIA DE KSI ESTIMADA
```

```
posto=qr(G_estr)
```

```
q=posto[[2]]
```

```
k=(n-g-1)/((n-g-p+q-1)*(n-g-p+q))
```

```
M1=k*(G_aux)
```

```
M2=solve(t(X)%*%X)
```

```
var_ksi=kron(M1,M2) # Matriz de variâncias e covariâncias de ksi
```

```
var_ksi
```