

Uso de sólidos geométricos para gerar
equações de forma do tronco de árvores em péUse of geometric solids to generate
equations of the bole form of standing treesValdir Carlos Lima de Andrade¹, Natalino Calegario², Agostinho Lopes de Souza³,
José Luiz Pereira de Rezende², Paulo Fernando Trugilho²,
Sebastião Carlos da Silva Rosado² e José Reinaldo Moreira da Silva²**Resumo**

O objetivo deste trabalho foi gerar equações de forma do tronco a partir do sólido geométrico que, em média, minimiza os desvios entre diâmetros deste e diâmetros do tronco das árvores. Para decidir por este sólido geométrico, empregando o Software R versão 2.5.0 ambiente Windows, analisou-se o ponto de mínimo dos desvios em relação aos índices que representam os diferentes sólidos geométricos e o posicionamento destes ao longo do tronco segmentado das árvores. Dados de cento e oitenta e oito árvores cubadas e dados obtidos pela simulação da cubagem empregando-se o método da altura relativa, supondo-se as 188 árvores-amostra em pé, foram utilizados concluindo-se que a forma dos sólidos geométricos que mais se assemelham à forma do tronco de árvores, é dependente do seu comprimento e do posicionamento considerado no tronco da árvore e que, para emprego do método da altura relativa em árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h , o sólido geométrico adequado propicia pior nível de acurácia na quantificação dos multiprodutos da madeira que o uso da análise de regressão para estimar coeficientes angulares da reta.

Palavras-Chaves: Sólidos geométricos, Método da altura relativa, Cubagem rigorosa, Inventário florestal

Abstract

This work studied the different geometric solids that best represent the form of standing tree stems. The objective was to generate stem form equations starting from the geometric solid that, on average, minimizes the deviations between these diameters and diameters of the log, being defined as dendrometric optimized prototype (pd optimized). To decide for pd optimized, the point of minimum deviations was analyzed in relation to the indexes that represent geometric solids positioned along the segmented trees stems. The data used were obtained in from volume determination of 188 tree samples and also from data obtained from the in the volume determination simulation, using relative height, as if the 188 sampled trees were standing. In general, it was concluded that pd optimized depends on the length and on the position in the trunk of the tree and that; for employment of the relative height method on trees where DBH and height only were measured, pd optimized propitiates a better accuracy level in the quantification of the multiproducts of the wood than that obtained when using the regression analysis to estimate angular coefficients of the straight line.

Keywords: Geometric solids, Relative height method, Rigorous volume determination, Forest inventory

INTRODUÇÃO

Equações de forma do tronco são geradas a partir de dados de cubagem obtidos à parte das árvores que são amostradas nas parcelas de inventário, geralmente, em uma área fixa e pequena em relação à área total inventariada.

Isto proporciona uma amostragem tendo baixa representatividade da forma real do tronco das árvores que constituem os diferentes cenários encontrados nas populações florestais.

Seria ideal gerar equações de forma do tronco utilizando dados obtidos simultaneamente com as medições realizadas nas parcelas de inventá-

¹Doutor em Floresta de Produção pelo Departamento de Ciências Florestais da Universidade Federal de Lavras – Caixa Postal 3037 - Lavras, MG – 37200-000 – E-mail: vclandrade@hotmail.com

²Professor Doutor do Departamento de Ciências Florestais da Universidade Federal de Lavras - Caixa Postal 3037 - Lavras, MG – 37200-000 – E-mail: calegari@ufla.br; jlprezen@ufla.br; trugilho@ufla.br; scrosado@ufla.br; jreinaldo@ufla.br

³Professor Doutor do Departamento de Engenharia Florestal da Universidade Federal de Viçosa - Avenida PH Rolfs s/n – Campus Universitário – Viçosa, MG - 36570-000 – E-mail: alsouza@ufv.br

rio, tomando-se poucos diâmetros do tronco de árvores-amostra em pé. Isto vai permitir gerar equações tendo maior grau de representatividade da forma real do tronco das árvores existentes na área, pois se aproveitará a representatividade proporcionada pelas parcelas distribuídas na área inventariada, além de promover rapidez na coleta de dados de cubagem uma vez que esta será simulada e não mais realizada em árvores-amostra abatidas ou em pé.

Diante dessa situação exposta, Andrade e Leite (2001) desenvolveram o método da altura relativa que se adequou bem como um simulador da cubagem de árvores em pé e localizadas dentro das parcelas de inventário. Nesta metodologia, a partir da medição de apenas três diâmetros do tronco de árvores em pé, são geradas equações segmentadas de forma do tronco por meio de geometria analítica. A simulação de uma cubagem, empregando-se um dos métodos detalhados em Gomes (1957), Husch *et al.* (1972) e Machado e Figueiredo Filho (2006), gera diferentes sortimentos para se quantificar de forma confiável o volume comercial desejado da madeira, conforme Andrade (2001) e Thiersch *et al.* (2006).

No emprego do método da altura relativa, é aconselhável medir todas as árvores localizadas dentro das parcelas de inventário sem o abate. Como isto se torna oneroso, dado ao grande número de árvores amostradas pelo inventário, Andrade (2001) e Andrade *et al.* (2006) recomendaram medir apenas parte das árvores considerando-as como amostra para gerar equações segmentadas de forma do tronco visando o emprego destas equações no restante das árvores das parcelas, nas quais se mediram apenas o diâmetro situado a 1,3 m do solo ($d_{1,3}$) e a altura total (h).

Nas árvores onde se mediram $d_{1,3}$ e h , pode-se utilizar o coeficiente angular médio da reta, os parâmetros estimados, ou ainda, equações geradas para estimar os diâmetros em 0,3 m, e em $hr = (h-2)/2$, conforme pode-se ver mais detalhes em Andrade (2001). Outra alternativa é o uso da equação que representa um sólido geométrico, assumindo que esta representa também uma equação de forma do tronco, desde que se refira ao sólido geométrico que, em média, melhor se assemelha à forma do tronco segmentado de árvores.

Tendo em vista o exposto, desenvolveu-se este estudo com o objetivo de gerar equações de forma do tronco a partir do sólido geométrico

que, em média, minimiza os desvios entre diâmetros deste e diâmetros gerados por meio de geometria analítica como alternativa para emprego do método da altura relativa em árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h em parcelas de inventário florestal.

Diante disso, preliminarmente a este estudo, foram enunciadas as seguintes hipóteses teóricas: **Hipótese 1-** A equação que representa um sólido geométrico, o qual, em média, minimiza o desvio entre diâmetro deste e diâmetro real ao longo do tronco de árvores, pode ser considerada como sendo uma equação de forma do tronco; **Hipótese 2-** A equação que representa um único sólido geométrico, obtido para um determinado segmento do tronco, tem o mesmo nível de acurácia que a equação que representa um sólido geométrico obtido para cada altura do segmento do tronco considerado; **Hipótese 3-** A divisão do tronco de árvores em maior número de segmentos, para se decidir por um sólido geométrico, melhora o nível de acurácia das equações de forma do tronco; **Hipótese 4-** Equações de forma do tronco, geradas a partir da simulação de sólidos geométricos com dados reais de cubagem, apresentam o mesmo nível de acurácia que equações de forma do tronco geradas com dados de cubagem simulados por meio de geometria analítica e; **Hipótese 5-** Com o emprego do método da altura relativa, em árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h , ao invés da análise de regressão no coeficiente angular da reta, pode-se gerar equações de forma do tronco a partir de um sólido geométrico que melhor se assemelha aos dados de uma cubagem simulada com geometria analítica.

MATERIAL E MÉTODOS

A metodologia desenvolvida foi apresentada por meio de um estudo de caso feito com dados de 188 árvores-amostra abatidas de eucalipto utilizadas por Andrade (2001). Estes dados de árvores-amostra abatidas foram utilizados como comparador com a cubagem destas árvores supondo-as em pé. Para isto foi empregada uma equação de forma do tronco gerada para diferentes sólidos geométricos e outra equação gerada por meio de geometria analítica.

Do total de árvores-amostra, 128 árvores tiveram dados reservados para um teste de aplicação das equações de forma do tronco geradas, as quais avaliaram a predição de diâmetros do tronco, do volume total (vt) e do

volume comercial até o diâmetro de 4 cm com casca (v_4). Neste teste de aplicação, realizou-se a análise de desvios por meio de gráficos e de um total percentual acumulado, obtido por: $T\% = |DPM| + |Bias| + [100 - r(y_i - \hat{y}_i)] + s(y_i - \hat{y}_i) + P$, cujas estatísticas foram obtidas por meio das seguintes fórmulas:

$$DPM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \right) 100;$$

$$Bias = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \hat{y}_i - \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sum_{i=1}^n y_i} 100;$$

$$r(y_i, \hat{y}_i) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \hat{y}_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \hat{y}_i \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}} 100;$$

$$s(y_i, \hat{y}_i) = \pm \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n-2)}}{\bar{y}} 100;$$

$$P = \pm \sqrt{\frac{(196)^2}{\chi_n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right)^2}$$

em que:

DPM = desvio percentual médio,

\hat{y}_i e y_i = valores estimados ou predito e real da variável avaliada (diâmetro, vt, ou, v_4),

n = número de pares de \hat{y}_i e y_i ;

\bar{y} = valor real médio;

$r(y_i, \hat{y}_i)$ = correlação linear e entre \hat{y}_i e y_i ;

$s(y_i, \hat{y}_i)$ = erro padrão residual entre \hat{y}_i e y_i ;

P = exatidão obtida pela estatística Qui-quadrado; e

χ_n^2 = valor tabelado do qui-quadrado para n graus de liberdade a 5% de probabilidade.

Utilizando os dados obtidos na cubagem de 60 árvores, separadamente, em cada segmento do tronco definido entre 0,0 m a 1,3 m (porção inferior ou basal), entre 1,3 m e $hr_1 = (h-1,7)/1,7$ (porção mediana), entre hr_1 e $hr_3 = (h-1,1)/1,1$ (porção superior) e entre hr_3 e h (porção apical), estudou-se a forma do tronco simulando diferentes sólidos geométricos (SG), aplicando-se a equação apresentada em Gomes (1957):

$$y = \pm b x^r \quad (1).$$

em que:

y = raio da base de um determinado SG;

x = comprimento total de um determinado SG;

r = índice que descreve um determinado SG; e
 b = constante.

Na equação (1), ao se variar o índice r , assumindo valores iguais a: 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1 e 3/2, respectivamente, obtém-se um SG cilíndrico, um SG cúbico, um SG quadrático, um SG semi-cúbico, um SG cônico e um SG neiloidal. Estes sólidos geométricos são os que melhor se adequam à forma de diferentes partes do tronco das árvores, os quais, conforme Gomes (1957) foram definidos como sendo Protótipos Dendrométricos.

O uso de diferentes protótipos dendrométricos (PD), para caracterizar a forma do tronco de árvores, exigiu algumas adaptações na equação (1) quanto aos limites inferior (hb) e superior (hv) que delimitam um determinado PD no tronco de árvores, cujo diâmetro é exatamente igual ao diâmetro do tronco em hb (Figura 1). Nesta situação, y da equação (1) passou a se referir ao raio em hb ($db/2$) e x passou a ser o comprimento do PD ($hv-hb$), virtualmente, inserido no tronco de árvores, resultando em: $db/2 = \pm b (hv-hb)^r$, onde b passou a ser obtido por:

$$b = (db/2)/(hv-hb)^r \quad (2).$$

Ao aplicar a equação (2) em (1) para substituir b , variando x para representar diferentes raios y_i em x_i -ésimas partes ao longo do PD, obteve-se a seguinte equação:

$$y_i = \frac{(db/2)}{(hv - hb)^r} x_i^r \quad (3).$$

Considerando que um determinado PD, em média, pode ser assumido como similar à forma do tronco de árvores, então, y_i da equação (3) passou a ser o raio ao longo do PD ($d_i/2$) e x_i passou a ser o comprimento em diferentes partes ao longo deste ($hv-h_i$) que, após se realizar as devidas transformações algébricas, resultou na seguinte equação:

$$d_i = db \left(\frac{hv - h_i}{hv - hb} \right)^r \quad (4).$$

em que:

d_i = diâmetro de um determinado PD que, em média, pode ser assumido como o diâmetro do tronco da árvore na i -ésima altura ao longo deste;

db = diâmetro fixo no tronco de árvores referente a hb ;

hv = ponto no tronco referente ao vértice do PD; e demais já foram definidos.

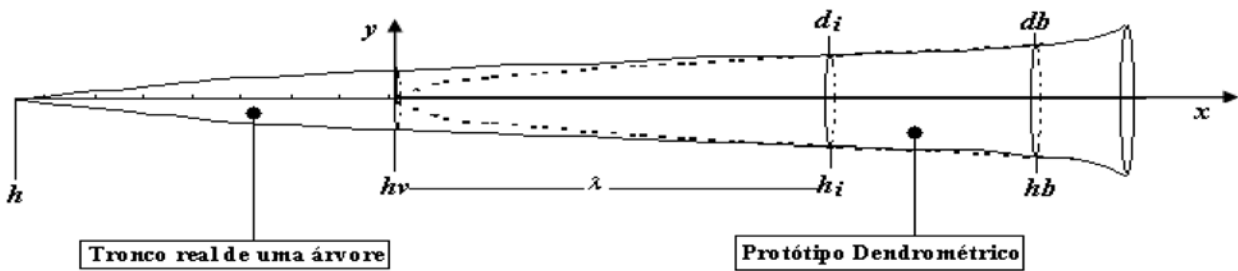


Figura 1. Tronco real de uma árvore tendo um protótipo dendrométrico, virtualmente, inserido entre os limites do tronco fixados em hv e hb.

Figure 1. Real trunk of a tree possessing a dendrometric prototype, virtually, inserted between hv and hb trunks fixed limits.

É importante ressaltar que a equação (4) é similar a de Ormerod (1973), na qual o índice r é substituído por um parâmetro θ_1 a ser estimado por análise de regressão, hv é substituído por h, db por $d_{1,3}$ e hb por 1,3.

Ao considerar hv distante λ metros da altura no tronco desejada para se saber o diâmetro, denominando-se λ de ponta do PD utilizado (Figura 1), obteve-se uma outra equação para representar diferentes PD's tendo a seguinte forma:

$$d_i = db \left(\frac{\lambda}{h_i + \lambda - hb} \right)^r \quad (5).$$

As equações (4) e (5) podem caracterizar a forma do tronco de árvores considerando que, em média, os diâmetros do tronco sejam iguais aos diâmetros ao longo de um determinado PD. Para isto, deve-se assumir um nível de acurácia que resulte em desvios da forma real do tronco distribuídos confiavelmente, o que impõe a estas equações as seguintes formas, respectivamente:

$$d_i = db \left(\frac{hv - h_i}{hv - hb} \right)^r + \text{desvio} \quad (6); e$$

$$d_i = db \left(\frac{\lambda}{h_i + \lambda - hb} \right)^r + \text{desvio} \quad (7)$$

Nas equações (6) e (7), cujas formas são similares a um modelo estatístico, o desvio se refere ao quanto a forma prevista do tronco se distancia da sua forma real, assumindo a equação que representa um determinado PD como sendo uma equação de forma do tronco. Neste caso, o desvio é expresso por meio de: $\text{desvio} = d_i - \hat{d}_i$ onde \hat{d}_i é o diâmetro predito em diferentes partes do tronco de árvores.

Os desvios obtidos com o uso das equações (6) e (7) permitem definir o PD que, em média, pode ter seus diâmetros assumidos como diâmetros ao longo do tronco de árvores desde que resulte no mínimo possível de desvio. Desta for-

ma, as equações (6) e (7), após serem definidas quanto ao PD mais adequado para representar a forma do tronco de árvores, assumem as seguintes formas:

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{hv - h_i}{hv - hb} \right)^r \quad (8); e$$

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{\lambda}{h_i + \lambda - hb} \right)^r \quad (9).$$

Aplicando-se a equação (9), separadamente, em cada segmento do tronco das 60 árvores, definidos como porção basal, mediana, superior e apical, e assumindo diferentes valores de λ para um mesmo r , obteve-se um valor que minimizou o total percentual entre o diâmetro de cada PD testado e o diâmetro do tronco, sendo denotado de $\lambda_{\text{ótimo}}$. Este procedimento resultou em seis equações tendo a seguinte forma:

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{\lambda_{\text{ótimo}}}{h_i + \lambda_{\text{ótimo}} - hb} \right)^r \quad (10).$$

Estas equações resultaram dos PD's representados pelos índices r iguais a: 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 1 e 3/2. Assim, para decidir pelo PD que, em média, mais se assemelha à forma do tronco de árvores nas diferentes porções já definidas, empregou-se o mesmo procedimento anterior avaliando o total percentual de modo a obter um valor de r que representa o valor mínimo deste total percentual, representado por um $r_{\text{ótimo}}$ com respectivo valor de $\lambda_{\text{ótimo}}$, sendo denotado de $\lambda_{\text{ótimo}}^a$. Obteve-se, então, uma única equação tendo a seguinte forma:

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{\lambda_{\text{ótimo}}^a}{h_i + \lambda_{\text{ótimo}}^a - hb} \right)^{r_{\text{ótimo}}} \quad (11).$$

O procedimento adotado na equação (9), o qual gerou a equação (11) para cada porção do tronco das 60 árvores-amostra, também foi adotado na equação (8), porém, tendo hv fixo em:

$hr_2=(h-1,4)/1,4$, $hr_3=(h-1,1)/1,1$ e em h , o que resultou em 6 equações tendo as seguintes formas, respectivamente, totalizando 18 equações:

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{hr_2 - h_i}{hr_2 - hb} \right)^r \quad (12)$$

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{hr_3 - h_i}{hr_3 - hb} \right)^r \quad (13); e$$

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{h - h_i}{h - hb} \right)^r \quad (14)$$

As 18 equações das formas (12), (13) e (14) se referem aos seis índices r testados em cada uma destas equações iguais a: 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 1 e 3/2. Assim, similar ao que foi feito para se gerar a equação (11), foi obtido um valor otimizado de r para cada equação das formas (12), (13) e (14), sendo denotados de $r_{\text{ótimo}}^a$, $r_{\text{ótimo}}^b$ e $r_{\text{ótimo}}^c$, respectivamente. Os resultados permitiram gerar três equações tendo as seguintes formas:

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{hr_2 - h_i}{hr_2 - hb} \right)^{r_{\text{ótimo}}^a} \quad (15)$$

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{hr_3 - h_i}{hr_3 - hb} \right)^{r_{\text{ótimo}}^b} \quad (16); e$$

$$\hat{d}_i = db \left(\frac{h - h_i}{h - hb} \right)^{r_{\text{ótimo}}^c} \quad (17)$$

Reconstituir a forma do tronco de árvores em pé para quantificar multiprodutos da madeira onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h , utilizando equações geradas a partir de dados de cubagem de árvores abatidas ou em pé, pode não resultar em contribuição científica dada a grande quantidade já disponível de modelos estatísticos que expressam a forma do tronco. Assim, para simular um cenário de uso do método da altura relativa em árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h , obteve-se $\lambda_{\text{ótimo}}^a$ e $r_{\text{ótimo}}^a$ para a equação (11) e, respectivamente, $r_{\text{ótimo}}^b$, $r_{\text{ótimo}}^c$, $r_{\text{ótimo}}^a$, $r_{\text{ótimo}}^b$ e $r_{\text{ótimo}}^c$ para as equações (15), (16) e (17). Neste caso, assumiu como reais uma cubagem feita pelas equações segmentadas de forma do tronco obtidas por Andrade *et al.* (2006), as quais são as seguintes:

$$\hat{d}_{(0,0 \leq h_i \leq 1,3)} = d_{1,3} \left(1 - \frac{1,3 - h_i}{CAR_{II}b} \right) \quad (18)$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = d_{1,3} \left(1 - \frac{1,3 - h_i}{CAR_{II}b} \right) \quad (19)$$

$$\hat{d}_{(hr_1 \leq h_i \leq hr_2)} = \left(\frac{h_i - hr_1}{hr_1 - hr_2} \right) \left[\left(\frac{d_{1,3}}{4} \right) \left(\frac{2hr_1 - hr_2 - 1,3}{CAR_{II}b} + \frac{h - hr_2}{CAR_{III}b} + 1 \right) \right] + d_{1,3} \left(\frac{hr_1 + h_i - 2,6}{2CAR_{II}b} + 1 \right) \quad (20) e$$

$$\hat{d}_{(hr_3 \leq h_i \leq h)} = \left(\frac{h_i - h}{hr_3 - h} \right) \left\{ \left(\frac{hr_3 - hr_1}{hr_1 - hr_2} \right) \left[\left(\frac{d_{1,3}}{4} \right) \left(\frac{2hr_1 - hr_2 - 1,3}{CAR_{II}b} + \frac{h - hr_2}{CAR_{III}b} + 1 \right) \right] + d_{1,3} \left(\frac{hr_3 + h_i - 2,6}{2CAR_{II}b} + 1 \right) \right\} \quad (21)$$

em que:

$\hat{d}_{(0,0 \leq h_i \leq h)}$ = diâmetro predito ao longo do tronco empregando-se geometria analítica; e

$CAR_k b$ = coeficiente angular real da reta, sendo $k=I, II$ e III .

Os dados de cubagem, obtidos pela aplicação das equações de (18) a (21) nas 60 árvores, foram considerados como valores reais para se decidir sobre o PD mais adequado às quatro porções do tronco, definidas anteriormente como basal, mediana, superior e apical.

Ressalta-se que, nas análises das equações de forma do tronco geradas, o total percentual foi obtido empregando-se o desvio obtido entre a estimativa da forma do tronco e a forma real deste nas 60 árvores. Apenas para gerar as equações de forma do tronco é que foram empregados os dados obtidos por meio de geometria analítica, aqui representados pelas equações de (18) a (21) com os valores reais de $CAR_k b$.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para inferir sobre as Hipóteses 1, 2, 3 e 4, inicialmente são analisados os resultados obtidos com os dados de cubagem das 60 árvores e, posteriormente, apresentados os resultados obtidos para o tronco inteiro utilizando o teste de aplicação feito com as restantes 128 árvores.

Análise das Hipóteses 1 e 2 empregando dados reais de cubagem da porção mediana do tronco das 60 árvores

Visando dar melhor entendimento deste estudo, empregou-se os dados reais da cubagem das 60 árvores para inferir sobre as Hipóteses 1 e 2, considerando somente a porção mediana do tronco.

Análise da equação (11)

O λ que minimizou o total percentual entre diâmetros dos diferentes PD's testados e diâmetros reais ao longo da porção mediana do tronco de 60 árvores-amostra, foi obtido por meio da equação (9) aplicada em cada índice r iguais à: 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 1 e 3/2. Os resultados obtidos, para uso na equação (10), são $\lambda_{\text{ótimo}}$ iguais à: 3 m, 4,8 m, 8 m, 12 m, 19,1 m e 30 m, respectivamente, sendo $db = d_{1,3}$ e $hb = 1,3$ (Figura 2).

As equações geradas da forma da equação (10) representam PD's, as quais podem também representar a forma do tronco em sua porção mediana (Hipótese 1). Por exemplo, ao substituir os valores do índice r e $\lambda_{\text{ótimo}}$ na equação (10), com $db=d_{1,3}$ e $hb=1,3$, gerou-se as seis seguintes equações de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 1,31607 d_{1,3} (h_i + 1,7)^{-(1/4)} \quad (22)$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 1,68687 d_{1,3} (h_i + 3,5)^{-(1/3)} \quad (23)$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 2,82843 d_{1,3} (h_i + 6,7)^{-(1/2)} \quad (24)$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 5,24148 d_{1,3} (h_i + 10,7)^{-(2/3)} \quad (25)$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 19,4 d_{1,3} (h_i + 17,8)^{-(1)} \quad (26) e$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 164,31677 d_{1,3} (h_i + 28,7)^{-(3/2)} \quad (27)$$

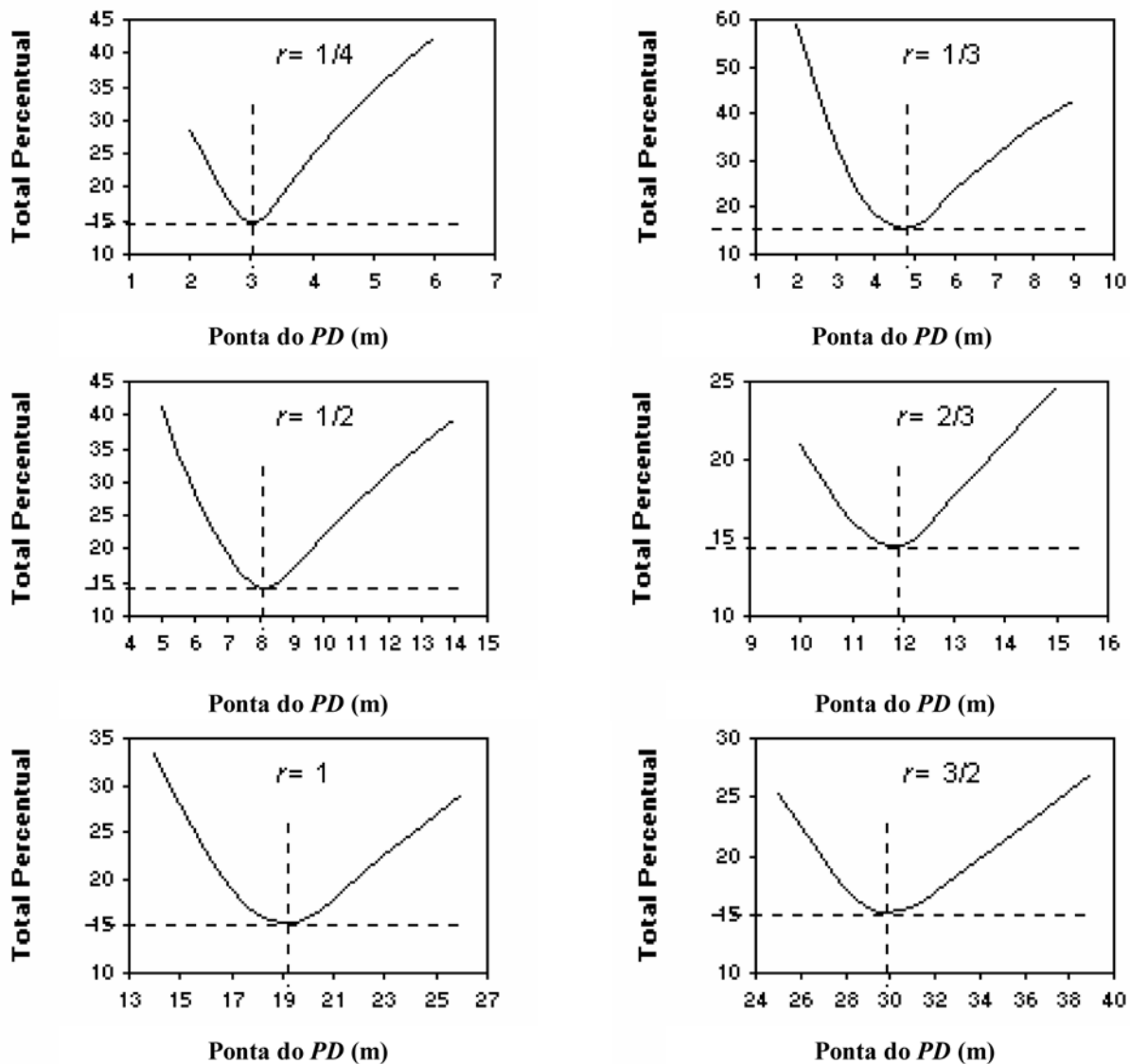


Figura 2. Total Percentual em relação à ponta do PD empregando a equação (9) nos dados reais da porção mediana do tronco das 60 árvores, para $hb=1,3$ e $db=d_{1,3}$.

Figure 2. Total percentage related to the tip of the PD, using the equation (9) on real data of the middle portion of the trunk of 60 trees, for $hb=1,3$ and $db=d_{1,3}$.

As seis equações de forma do tronco de (22) a (27) também foram aplicadas nos dados das 60 árvores para, novamente, se obter o total percentual e, em seguida, definir o valor de $r_{\text{ótimo}}=0,53$ (Figura 3a) e seu respectivo $\lambda_{\text{ótimo}}a=8,5$ m (Figura 3b), cujos valores foram aplicados na equação (11) resultando na seguinte equação de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_i)} = 3,10879 d_{1,3} (h_i + 7,2)^{-(0,53)} \quad (28)$$

O PD representado pela equação (28) com $r = 0,53$ é o que apresentou o melhor nível de acurácia possível e, portanto, em média, é o que mais se assemelha à forma do tronco em sua porção mediana. Assim, pôde-se decidir pela aceitação da Hipótese 1 e, conseqüentemente, deduzir que a equação (28), a qual representa um PD, representa também uma equação de forma do tronco.

Da Figura 3, ainda, pôde-se inferir que o total percentual relacionado com r (Figura 3a) tem o mesmo comportamento ao se relacionar com $\lambda_{\text{ótimo}}$ (Figura 3b). Então, há uma forte relação linear de $\lambda_{\text{ótimo}}$ com r (Figura 3c), pois o aumento de r implica no aumento linear e crescente de $\lambda_{\text{ótimo}}$. Assim, quanto maior o índice r , maior será o comprimento de um determinado PD para que seus diâmetros, em média, sejam considerados como sendo diâmetros do tronco tendo o mínimo de desvio possível. Diante disso, utilizando os dados da Figura 3c no modelo linear clássico, foi estimada a seguinte equação da reta:

$$\hat{\lambda}_{\text{ótimo}} = -2,51797 + 21,64890 (r) \quad \text{com } R^2=99,97\% \quad (29)$$

A equação (29) é adequada para obter $\lambda_{\text{ótimo}}$ usando $db=d_{1,3}$ e qualquer índice r na equação (10), principalmente, valores variando entre $1/3$ e $3/2$ que, conforme Gomes (1957), é neste intervalo que se encontra o valor ideal para representar a forma do tronco segmentado das árvores e, assim, gerar valores para uso na equação (11).

Todavia, supondo não ser adequado usar na equação (11) um valor constante de rótico e de $\lambda_{\text{ótimo}}$ a para toda a extensão da porção mediana do tronco (Hipótese 2), obteve-se um $r_{\text{ótimo}}$ para cada i -ésima altura adotando a estatística DPM = $\pm 1\%$ proporcionados pelo uso das equações de (23) a (27). Em seguida, utilizando o modelo linear clássico, foi estimada a seguinte equação:

$$\hat{r}_{\text{ótimo}} = 0,18632 \text{Ln}(h_i) + 0,73114 (1/h_i) \quad \text{com } R^2=97,3\% \quad (30)$$

A equação (30) permitiu obter um PD para cada i -ésima altura da porção mediana do tronco, sendo a equação (29) empregada para obter o respectivo $\lambda_{\text{ótimo}}$ a. Ao substituir (30) em (29), gerou-se a seguinte equação:

$$\hat{\lambda}_{\text{ótimo}} a = -2,51797 + 4,03362 \text{Ln}(h_i) + 15,82838 (1/h_i) \quad (31)$$

A substituição das equações (30) e (31) na equação (11), respectivamente, para obter $r_{\text{ótimo}}$ e $\lambda_{\text{ótimo}}$ a, gerou outra equação de forma do tronco representando um PD adequado a cada i -ésima altura do tronco em sua porção mediana, sendo a seguinte:

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_i)} = d_{1,3} \left[\frac{4,03362 \text{Ln}(h_i) + 15,82838 (1/h_i) - 2,51797}{4,03362 \text{Ln}(h_i) + 15,82838 (1/h_i) + h_i - 3,81797} \right]^{[0,18632 \text{Ln}(h_i) + 0,73114 (1/h_i)]} \quad (32)$$

Na Tabela 1 estão estatísticas que foram englobadas no total percentual, indicando a equação (32) como a melhor em comparação com a equação (28 - menor T). Entretanto, considerando a exatidão (P) conforme Paula Neto *et al.* (1983), pode-se inferir que as equações (28) e (32) estão estimando a mesma forma do tronco com uma diferença de 10,49% e de 10,69% da forma real do tronco, respectivamente, ao nível de probabilidade de 0,05. Por outro lado, pela estatística



Figura 3. Resultados obtidos pelas equações de (22) a (27) para se determinar o PD representado pela equação (28).
Figure 3. Results obtained by equations (22) to (27) to determine PD represented by equation (28).

$s(y_i, \hat{y}_i)$, em média, os diâmetros reais do tronco estão variando em torno dos diâmetros estimados com, aproximadamente, 4,97% para a equação (28) e 4,88% para a equação (32). Assim, com base nas estatísticas apresentadas na Tabela 1, cujos valores evidenciam pequenas oscilações, pode-se inferir que as equações (28) e (32) têm o mesmo nível de acurácia na caracterização da forma do tronco em sua porção mediana.

Na análise gráfica dos desvios, de maneira geral, obteve-se o mesmo comportamento para as duas equações, porém, ambas as equações (28) e (32) apresentaram tendência à superestimativa para árvores com $d_{1,3}$ menor que 11 cm e subestimativa de forma bem expressiva à medida que $d_{1,3}$ aumenta a partir de 18 cm. Entre este intervalo, os desvios apresentaram uma distribuição de modo aceitável.

Diante das análises feitas, pôde-se ver que a equação (32) apresentou desvios tendo um comportamento bem próximo dos desvios gerados pela equação (28). Isto, aliado ao fato de ser um processo demorado obter um PD a cada i -ésima altura do tronco para se gerar a equação (32), levou à decisão pelo uso da equação (28) que define um PD constante para toda a extensão da porção mediana.

A decisão pela equação (28) implicou em assumir que, aproximadamente, esta equação resulta na mesma forma do tronco que a equação (32), implicando também, na aceitação da Hipótese 2 e, conseqüentemente, deduzir que

não há necessidade de se gerar uma equação de forma do tronco a cada altura ao longo deste.

Análise das equações (12), (13) e (14)

Utilizando-se as equações (12), (13) e (14), com diferentes índices r e tendo $db=d_{1,3}$ e $hb=1,3$ m, obteve-se o PD representado por $r_{ótimo a}$, $r_{ótimo b}$ e $r_{ótimo c}$ nas equações (15), (16) e (17), respectivamente, gerando as seguintes equações de forma do tronco (Figura 4):

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = d_{1,3} \left(\frac{hr_2 - h_i}{hr_2 - 1,3} \right)^{0,39} \quad (33)$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = d_{1,3} \left(\frac{hr_3 - h_i}{hr_3 - 1,3} \right)^{0,60} \quad (34)$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = d_{1,3} \left(\frac{h - h_i}{h - 1,3} \right)^{0,69} \quad (35)$$

A aplicação das equações (33), (34) e (35) nos dados reais da porção mediana das 60 árvores, resultou no comportamento dos desvios apresentados na Tabela 1, onde se nota que a pior equação foi a (33) e a equação (34) foi a de melhor desempenho. Já, na análise gráfica, pôde-se ver que nenhuma das equações apresentou desvios distribuídos de forma aceitável, tendo tendência de subestimativa na medida em que se diminui o diâmetro e de superestimativa com aumento deste, sendo um comportamento contrário ao da equação (28) selecionada anteriormente.

Tabela 1. Estatísticas, em porcentagem, adotadas para avaliar a acurácia das equações (28), (32), (33), (34), (35), (36), (37) e (40 e 41).

Table 1. Statistics, in percentage, adopted to evaluate the accuracy of the equations (28), (32), (33), (34), (35), (36), (37) and (40 and 41).

Equação	Bias	DPM	$r(y_i, \hat{y}_i)$	$s(y_i, \hat{y}_i)$	P	T
(28)	-0,952	-0,174	97,903	4,973	10,489	18,684
(32)	-0,125	0,671	97,980	4,881	10,690	18,386
(33)	2,147	1,072	98,163	4,655	12,570	22,281
(34)	1,517	0,628	98,595	4,071	10,626	18,247
(35)	2,829	2,205	98,738	3,858	10,291	20,445
(36)	0,282	0,227	98,645	3,998	8,518	14,381
(37)	0,984	0,953	98,588	4,081	8,858	16,289
(40) e (41)	0,666	0,389	98,785	3,785	8,424	14,479

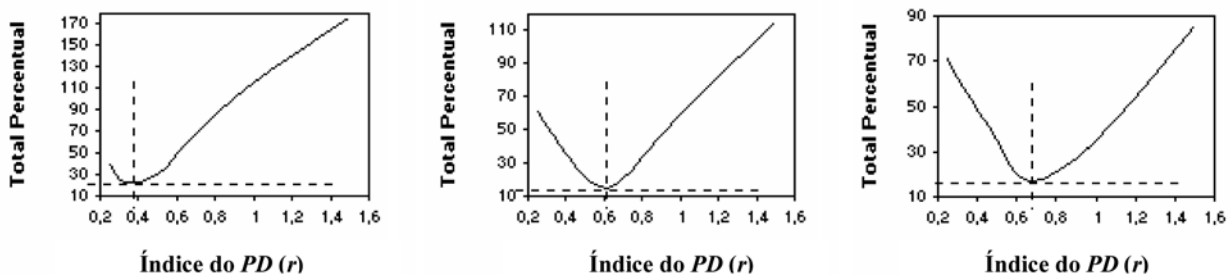


Figura 4. Total percentual obtido variando r nas equações (12) a (14) com $db=d_{1,3}$, $hb=1,3$ m na porção mediana do tronco das 60 árvores, respectivamente, gerando-se as equações (33) a (35).

Figure 4. Total percentage obtained by varying r in the equations (12) to (14) with $db=d_{1,3}$, $hb=1,3$ m in the medium portion of the trunk of the 60 trees, respectively, generating equations (33) to (35).

Considerando que as equações (28) e (34) apresentaram distribuição dos desvios com tendência inversa, isto é, enquanto uma subestimou outra superestimou, então, ao calcular a média aritmética destas, obteve-se expressiva redução no total percentual (Tabela 1) com expressiva melhora na distribuição dos desvios. O resultado foi a seguinte equação de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 0,5 d_{1,3} [3,10879 (h_i + 7,2)^{-0,53} + (hr_3 - hi)^{0,60} (hr_3 - 1,3)^{-0,60}] \quad (36)$$

A equação (36), dentre as equações geradas para a porção mediana do tronco das 60 árvores, foi a que melhor minimizou os desvios podendo, então, ser considerada como sendo uma equação otimizada de forma do tronco. Por outro lado, gerar esta equação empregando-se dados de uma cubagem simulada pelo método da altura relativa, pode facilitar o seu emprego nas árvores em pé onde foram medidos apenas $d_{1,3}$ e h . Assim, procedeu-se à definição do PD para o tronco inteiro das 60 árvores, considerando como reais os dados obtidos em uma cubagem simulada por geometria analítica, cujos procedimentos são apresentados a seguir.

Análise das Hipóteses 3 e 4 empregando dados de cubagem simulados por meio de geometria analítica na porção mediana do tronco

A análise das Hipóteses 3 e 4 foram feitas empregando somente os dados da porção mediana para se fazer comparações com o item anterior e, as demais porções do tronco, tiveram equações de forma do tronco desenvolvidas para aplicar o método da altura relativa nas 128 árvores restantes simulando ter medido apenas $d_{1,3}$ e h .

Diante disso, aplicando as equações de (18) a (21) com CAR_k reais, ao longo da porção mediana do tronco das 60 árvores, obtiveram-se os diâmetros por meio de geometria analítica para serem considerados como diâmetros reais do tronco de árvores. Em seguida, empregando os mesmos procedimentos que resultaram na equação (36), obteve-se a seguinte equação otimizada de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1)} = 0,5 d_{1,3} [16,31694 (h_i + 17,6)^{-0,95} + (hr_3 - hi)^{0,6025} (hr_3 - 1,3)^{-0,6025}] \quad (37)$$

As estatísticas obtidas pelo uso da equação (37) nos dados reais das 60 árvores-amostra (Tabela 1) mostram inferioridade dos desvios comparados com a equação (36), o que induz a rejeição da Hipótese 4 e, com isto, inferir que se deve preferir usar

dados reais de cubagem para gerar equações de forma do tronco ao invés do uso de dados de cubagem simulados por meio da geometria analítica.

Conforme pressuposto na Hipótese 3, procedeu-se à divisão da porção mediana do tronco em dois novos intervalos, definidos entre 1,3 m e $hr_1(a) = \theta(hr_1 - 1,3) + 1,3$ e entre $hr_1(a)$ e $hr_1 = (h - 1,7)/1,7$. No intervalo entre 1,3 m e $hr_1(a)$, adotando diferentes valores de θ para cada índice r testado, procedeu-se à análise das equações (8) e (9) para obter o PD de forma similar ao que foi feito para se achar $\lambda_{\text{ótimo}}$ e $r_{\text{ótimo}}$ na equação (11), o que resultou em $\theta = 0,5$. Obteve-se, também, $r_{\text{ótimo}} = 0,4231$ e $\lambda_{\text{ótimo}} = 8,9233$ m para a equação (11) e $r_{\text{ótimo}} = 0,6185$ para a equação (16), gerando com estes resultados as seguintes equações otimizadas de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1a)} = d_{1,3} \left(\frac{hr_3 - h_i}{hr_3 - 1,3} \right)^{0,6185} \quad (38); e$$

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1a)} = d_{1,3} \left(\frac{8,9233}{(h_i + 7,6233)} \right)^{0,4231} \quad (39)$$

sendo:

$$hr_1(a) = 0,5(hr_1 - 1,3) + 1,3.$$

Pelo motivo de se realizar a média entre as equações (38) e (39), foi preciso calibrá-la variando-se, separadamente, $r_{\text{ótimo}}$ e $\lambda_{\text{ótimo}}$. O resultado foi um novo valor de $r_{\text{ótimo}}$ na equação (38) igual a 0,7285, gerando a seguinte equação otimizada de forma do tronco, similar a equação (37):

$$\hat{d}_{(1,3 \leq h_i \leq hr_1a)} = 0,5 d_{1,3} [2,52445 (h_i + 7,6233)^{-0,4321} + (hr_3 - hi)^{0,7285} (hr_3 - 1,3)^{-0,7285}] \quad (40)$$

Dentre as várias equações geradas para se caracterizar a forma do tronco entre $hr_1(a) = 0,5(hr_1 - 1,3) + 1,3$ e $hr_1 = (h - 1,7)/1,7$, adotando os mesmos procedimentos relatados anteriormente, obteve-se a seguinte equação otimizada de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(hr_1a \leq h_i \leq hr_1)} = \left(\frac{d_{1,3}}{2} \right) \left(\frac{hr_3 - h_i}{hr_3 - 1,3} \right)^{0,57} + \left(\frac{d_{hr_1}}{2} \right) \left(\frac{hr_3 + 0,3 - h_i}{hr_3 + 0,3 - hr_1} \right)^{0,4695} \quad (41)$$

Diante destes resultados de equações, para se empregar o método da altura relativa na caracterização da forma do tronco em sua porção mediana, em árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h , deve-se aplicar a equação (40) entre 1,3 m e $hr_1(a) = 0,5(hr_1 - 1,3) + 1,3$ e a equação (41) a partir deste até $hr_1 = (h - 1,7)/1,7$.

As estatísticas obtidas pela aplicação das equações (40) e (41) aos dados reais da porção mediana das 60 árvores-amostra (Tabela 1), cujas equações foram geradas com os dados de cubagem simulada por meio de geometria analítica, mostram um melhor nível de acurácia quando comparada com a equação (37). Como resultado desta análise, se aceita a Hipótese 3, o que permite inferir que o aumento do número de segmentos no tronco para caracterizar por um determinado PD, melhora o nível de acurácia das equações otimizadas de forma do tronco.

A aceitação da Hipótese 3 induziu à aceitação da Hipótese 4 quando se comparam as equações (40;41) com a equação (36), permitindo inferir que se tem o mesmo nível de acurácia no uso de dados de cubagem gerados por meio de geometria analítica somente quando se divide o tronco em um número de dois segmentos em comparação com o uso de dados reais de cubagem, para um mesmo nível de acurácia desejado.

Ressalta-se que os desvios foram obtidos comparando-se as estimativas da forma do tronco com os respectivos dados reais das 60 árvores. Apenas para gerar as equações (37) e (40;41), é que foram empregados os dados de cubagem obtidos por geometria analítica, aqui representados pelas equações de (18) a (21) com os valores reais de $CAR_k b$.

Na Figura 5 é apresentado o esquema dos cinco números obtidos com os desvios absolutos na porção mediana do tronco das 60 árvores, os quais representam os valores máximo, mínimo e primeiro, segundo e terceiro quantis. Nota-se que o uso da equação (36) apresentou a menor e melhor variação dos desvios em torno do eixo zero, junto com o uso das equações (40;41).

Análise do PDotimizado nas porções do tronco superior, apical e basal empregando dados de cubagem simulados por geometria analítica

Na análise da porção superior do tronco, intervalo delimitado entre hr_1 e hr_3 , foram adotados os mesmos procedimentos empregados

para se desenvolver as equações (40) e (41). Os resultados foram as seguintes equações otimizadas de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(hr_1 \leq h_i \leq hr_2a)} = \left(\frac{d_{hr_1}}{2}\right) \left[\left(\frac{h - h_i}{h - hr_1}\right)^{0,731} + \left(\frac{hr_3 + 2,28 - h_i}{hr_3 + 2,28 - hr_1}\right)^{(2/3)} \right] \quad (42); e$$

$$\hat{d}_{(hr_2a \leq h_i \leq hr_3a)} = \left(\frac{d_{hr_2}}{2}\right) \left[\left(\frac{h - h_i}{h - hr_2}\right)^{0,2825} + \left(\frac{hr_2a + 25,1 - h_i}{hr_2a + 25,1 - hr_2}\right)^{1,0} \right] \quad (43)$$

onde:

$$hr_2a = 0,6(hr_3 - hr_1) + hr_1; e$$

$$hr_3a = hr_2a + 0,8(hr_3 - hr_2a).$$

Diante desses resultados, visando caracterizar a forma do tronco empregando o método da altura relativa na porção superior de árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h , deve-se aplicar a equação (42) até hr_2a e a equação (43) a partir deste até hr_3a .

Na análise da porção apical do tronco, intervalo delimitado entre hr_3a e h , foram adotados os mesmos procedimentos relatados anteriormente, obtendo-se a seguinte equação otimizada de forma do tronco para ser aplicada na caracterização da forma do tronco de árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h :

$$\hat{d}_{(hr_3a \leq h_i \leq h)} = 0,5d_{hr_3a}^{(-0,8)} h \left(\frac{d_{hr_2}}{2}\right) \left[\left(\frac{h - h_i}{h - hr_3a}\right)^{1,0} + 0,5d_{hr_3a} \left(\frac{h - h_i}{h - hr_3a}\right)^{0,938} \right] \quad (44)$$

Analisando a porção basal do tronco, variando λ maior que 2 m, com $hb = 1,3$ m e $hb = 0,1$ m, foram encontrados valores de $\lambda_{ótimo a}$ e $r_{ótimo}$ para a equação (11) gerando as seguintes equações otimizadas de forma do tronco, similar ao que foi feito para obter a equação (28):

$$\hat{d}_{(0,0 \leq h_i \leq 1,3)} = d_{1,3} \left(\frac{12,2}{h_i + 10,9}\right)^{1,8158} \quad (45); e$$

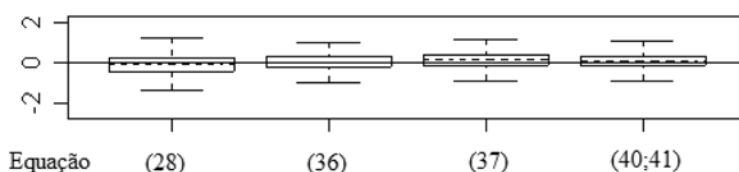


Figura 5. Esquema dos cinco números obtidos para as equações otimizadas de forma do tronco (28), (36), (37) e (40;41); n=569.

Figure 5. Layout of the five numbers obtained for the optimized equations of the trunk form (28), (36), (37) and (40;41); n=569.

$$\hat{d}_{(0,0 \leq h_i \leq 1,3)} = d_{0,1} \left(\frac{11}{h_i + 10,9} \right)^{1,82} \quad (46)$$

A partir da equação (8), adotando os mesmos procedimentos que resultaram nas equações (33), (34) e (35), porém, com diferentes valores de h_v maior que 2 m em cada índice r , foram geradas as seguintes equações otimizadas de forma do tronco:

$$\hat{d}_{(0,0 \leq h_i \leq 1,3)} = d_{1,3} \left(\frac{6,5 - h_i}{5,2} \right)^{0,89} \quad (47)$$

$$\hat{d}_{(0,0 \leq h_i \leq 1,3)} = d_{0,1} \left(\frac{8,9 - h_i}{8,8} \right)^{1,359} \quad (48)$$

em que:

$d_{0,1}$ = diâmetro medido a 0,1 m do solo.

As equações de (45) a (48) foram analisadas quanto às diferentes opções que se pode descrever a forma do tronco em sua porção basal empregando PD's. O resultado foi a decisão por uma equação média entre as equações (45), (46) e (48), gerando a seguinte equação otimizada de forma do tronco para emprego na caracterização da forma do tronco de árvores em sua porção basal, onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h :

$$\hat{d}_{(0,0 \leq h_i \leq 1,3)} = 31,29615 d_{1,3} (h_i + 10,9)^{-1,8158} + 26,19470 d_{0,1} (h_i + 10,9)^{-1,82} + 0,01735 d_{0,1} (8,9 - h_i)^{1,359} \quad (49)$$

Analisando a caracterização da forma do tronco inteiro, representada pelas equações 40 e 41 (porção mediana), 42 e 43 (porção superior), 44 (porção apical) e 49 (porção basal), pôde-se verificar que, em média, na porção basal é mais adequado utilizar um neilóide ($r = 3/2$). Enquanto na porção mediana oscila-se entre um PD semi-cúbico ($r = 2/3$) e quadrático ($r = 1/2$), a porção superior deve variar entre os PD's semi-cúbico e cone ($r = 1$). Por último, na porção apical, deve ser utilizado o PD cone (Figura 6). No-

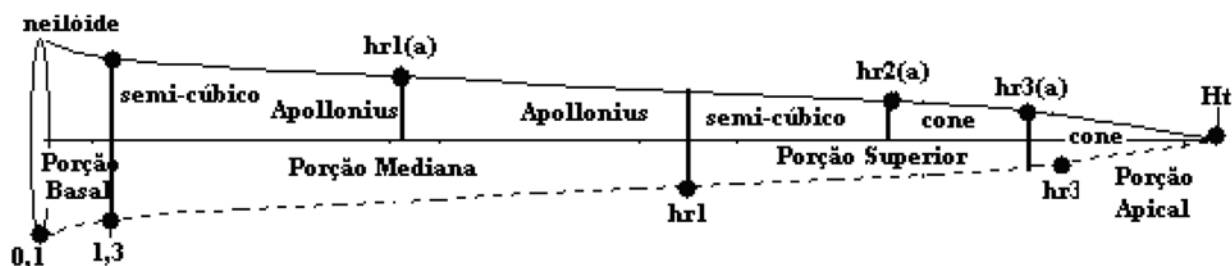


Figura 6. Protótipos Dendrométricos definidos em diferentes partes do tronco a partir das equações 40 e 41 (porção mediana), equações 42 e 43 (porção superior), equação 44 (porção apical) e equação 49 (porção basal), cujas equações foram geradas empregando-se dados de cubagem simulados por meio de geometria analítica.

Figure 6. Dendrometric prototypes defined at different parts of the trunk, starting from the equations 40 and 41 (medium portion), equations 42 and 43 (upper portion), equation 44 (apical portion) and equation 49 (basal portion), whose equations were generated using data from simulated volume determination through analytic geometry.

ta-se, também, que as referidas equações foram geradas por meio de uma cubagem simulada, empregando-se geometria analítica (equações de 18 a 21), cuja metodologia utiliza apenas os diâmetros situados a 0,3 m, 1,3 m e $hr = (h-2)/2$ possibilitando medi-los nas árvores em pé, sem a necessidade de cubar árvores-amostra. Isto viabiliza a amostragem de árvores localizadas dentro das parcelas de inventário.

De maneira geral, considerando os diferentes segmentos do tronco, observa-se que, no sentido base-topo, há um aumento na dificuldade de se definir uma equação otimizada de forma do tronco, resultando em pior nível de acurácia. Segundo Bruce e Schumacher (1950), isto ocorre porque a conicidade próxima do ápice do tronco é muito variável.

Considerando que, para uso do método da altura relativa em árvores onde foram medidos apenas $d_{1,3}$ e h , usa-se análise de regressão no $CAR_k b$ (Andrade *et al*, 2006), então, é preciso comparar isto ao uso de equações de forma do tronco geradas por meio de diferentes PD.

Análise da Hipótese 5 aplicando as equações otimizadas de forma do tronco geradas com uma cubagem feita por geometria analítica

Visando fazer inferências a cerca da Hipótese 5, utilizaram-se os dados das 128 árvores restantes como um teste de aplicação, simulando o uso do método da altura relativa em árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h . Assim, por meio da cubagem adotando o método de Smalian, aplicou-se as equações (40;41), (42;43), (44) e (49) ao longo do tronco das 128 árvores-amostra, as quais foram denominadas: Uso de PD. Para comparação, utilizaram-se as equações de regressão apresentadas na Tabela 2 para estimar o coeficiente angular da reta $CAR_k b$ nas equações de 18 a 21, as quais foram denominadas: Análise de Regressão.

Ressalta-se que, para poder empregar as equações referentes ao Uso de PD, foi necessário utilizar as equações obtidas por Andrade (2001) para estimar a base do PD, sendo $d_{0,1}$ na equação (49), d_{hr_1} na equação (41) e d_{hr_2} na equação (43), respectivamente, sendo: $\hat{d}_{0,1} = 2,17196d_{1,3}^{1,02831} h^{-0,21983}$, $\hat{d}_{hr_1} = 0,90289d_{1,3}^{0,78630} h^{0,07789}$ e $\hat{d}_{hr_2} = 0,72775d_{1,3}^{0,74989} h^{0,08538}$.

No emprego do Uso de PD e Análise de Regressão, inicialmente, por meio de uma cubagem adotando o método de Smalian, foram realizadas predições de diâmetros ao longo do tronco das 128 árvores-amostra e dos volumes vt e v_4 supondo toras com 2 m de comprimento. Em seguida, obtiveram-se os desvios e o total percentual, cujas estatísticas são apresentadas na Tabela 3, mostrando a superioridade da Análise de Regressão devido ao menor total percentual geral de 63,033%, pois apresentou as melhores estatísticas divididas em $T = 24,438\%$ (forma do tronco), $T = 19,007\%$ (vt) e $T = 19,589\%$ (v_4). Assim, considerando a soma geral do total percentual, verifica-se que a Análise de Regressão é a melhor opção para se quantificar multiprodutos da madeira, empregando o método da altura relativa nas árvores em pé das parcelas de inventário, nas quais se mediram apenas $d_{1,3}$ e h .

Também, na análise gráfica, os desvios obtidos para Análise de Regressão apresentaram-se com um melhor comportamento, oscilando de forma bem mais equilibrada que o Uso de PD.

O resultado das análises feitas indicou que a Análise de Regressão tem melhor nível de acurácia que o Uso de PD levando à rejeição da Hipótese 5. Isto permitiu deduzir que o uso de sólidos geométricos em dados de cubagem simulados por geometria analítica, não deve ser preferido ao uso da análise de regressão no coeficiente angular da reta $CAR_k b$, sendo este método uma importante opção de uso do método da altura relativa em árvores onde se mediram apenas $d_{1,3}$ e h nas parcelas de inventário.

CONCLUSÕES

As análises feitas neste trabalho levaram à rejeição apenas das hipóteses 4 e 5, o que, diretamente, permitiu deduzir as seguintes conclusões:

- A equação 36, a qual representa um determinado PD, pode ser considerada como sendo uma equação otimizada de forma do tronco;
- Pode-se gerar uma única equação otimizada de forma do tronco, envolvendo todas as i -ésimas alturas de determinada porção do tronco;

Tabela 2. Resultados obtidos por Andrade *et al.* (2006); em que: $x = d_{1,3}(0,5h-1)$; $\hat{\beta}$ = parâmetros estimados; ε = erro aleatório; Ln = logaritmo neperiano; R^2 = coeficiente de determinação ajustado.

Table 2. Results obtained by Andrade *et al.* (2006); where $\hat{\beta}$ = estimated parameters; ε = random error; Ln = neperian logarithm; R^2 = adjusted determination coefficient.

Equações utilizadas					
	$(CAR_{I,B}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(X) + \hat{\beta}_2(d_{1,3})$				
	$(CAR_{II,B}) = (-1)\exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(X) + \hat{\beta}_2(1/d_{1,3}) + \hat{\beta}_3 Ln(h)]$				
	$(CAR_{III,B}) = (-1)\exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(h) + \hat{\beta}_2(1/X)]$				
Estatísticas obtidas para as equações utilizadas					
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	R^2
CAR _I b	-7,96654	-0,07957	0,90010		62,76
CAR _{II} b	-1,79737	-0,00057	4,46034	1,58547	81,24
CAR _{III} b	2,16512	0,03594	-13,57630		97,63

Observação: em Andrade *et al.* (2006) $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_3$ estavam trocados em CAR_Ib. Deve-se obter CAR_Ib, CAR_{II}b e CAR_{III}b sempre menores que zero.

Tabela 3. Estatísticas adotadas para avaliar a acurácia do Uso de PD e Análise de Regressão em um teste de aplicação com 128 árvores-amostra.

Table 3. Statistics adopted to evaluate the accuracy of the Use of PD and regression analysis in an applied test with 128 tree samples.

Variável	Bias	MDP	$r(\hat{y}_i \hat{y}_i)$	$s(\hat{y}_i \hat{y}_i)$	P	T
Uso de PD:						
di	-1,342	-1,733	98,795	5,461	18,760	28,500
vt	-2,405	-2,422	99,132	6,661	10,868	23,224
v4	-2,729	-2,987	99,113	6,817	11,910	25,329
						77,054
Análise de Regressão:						
di	-0,370	-0,858	98,783	5,487	16,505	24,438
vt	0,533	0,337	99,062	6,923	10,276	19,007
v4	0,430	0,158	99,054	7,041	11,014	19,589
						63,033

- Quanto maior o número de segmentos do tronco das árvores caracterizados por um determinado PD, melhor a acurácia das equações de forma do tronco;
- O uso de dados de cubagem obtidos por geometria analítica para se definir um PD, exige um número maior de segmentos no tronco de árvores do que o uso de dados reais de cubagem, para se atender ao mesmo nível de acurácia;
- As equações geradas a partir da Análise de Regressão resultam em melhor acurácia na predição da forma e do volume do tronco que o uso de PD;

Também, o desenvolvimento do trabalho para se avaliar as Hipóteses 1, 2, 3, 4 e 5, indiretamente, permitiu concluir que:

- Para se ter o mesmo nível de acurácia que usar dados reais, o emprego do método da altura relativa exigiu dividir o tronco de árvores em seis segmentos;
- Caracterizar a forma do tronco de árvores, empregando um determinado sólido geométrico, depende do posicionamento deste no tronco quanto ao seu limite inferior hb e superior hv;
- Quanto maior o índice r, que representa um determinado PD, maior será o valor de hv e λ ;
- Acima de $hr_1 = (h-1,7)/1,7$ há maior dificuldade de se utilizar sólidos geométricos, tendo reduções na porção do tronco de árvores em que se pôde otimizar o uso destes para descrever sua forma;
- A equação otimizada de forma do tronco tem melhor nível de acurácia quando é resultado da média entre as equações geradas a partir das equações (8) e (9);
- O posicionamento do segmento no tronco de árvores em direção ao topo piora o nível de acurácia das equações geradas de forma do tronco que representam um determinado PD.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa de Doutorado concedida ao primeiro autor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, V.C.L. **Um método para descrever o perfil do tronco em árvores de eucalipto utilizando geometria analítica**. 2001. 74p. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2001.
- ANDRADE, V.C.L.; LEITE, H.G. Uso da geometria analítica para descrever o forma do tronco e quantificar o volume de árvores individuais. *Revista Árvore*, Viçosa, v.25, n.4, p.481-486, 2001.
- ANDRADE, V.C.L.; CALEGÁRIO, N.; SCOLFORO, J.R.S. Análise de algumas alternativas para obter o coeficiente angular da reta no método da altura relativa. *Ciência Florestal*, Santa Maria, v.16, n.3, p.303-317, 2006.
- BRUCE, D.; SCHUMACHER, F.X. **Forest mensuration**. 2.ed. New York: McGraw-Hill, 1950. 474p.
- GOMES, A.M.A. **Medição dos arvoredos**. Lisboa: Gráfica Monumental, 1957. 413p.
- HUSCH, B.; MILLER, C.L.; BEERS, T.E. **Forest mensuration**. 3.ed. New York: Ronald Press, 1972. 410p.
- MACHADO, S.A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. Curitiba: A. Figueiredo Filho, 2006. 309p.
- ORMEROD, D.W. A simples bole model. *Forestry Chronicle*, Quebec, v.49, n.3, p.136-138, 1973.
- PAULA NETO, F.; SOUZA, A.L.; QUINTAES, P.C.G.; SOARES, V.P. Análise de equações volumétricas para *Eucalyptus* spp. segundo o método de regeneração na região de José de Melo. *Revista Árvore*, Viçosa, v.7, n.1, p.56-70, 1983.
- THIERSCH, C.R.; SCOLFORO, J.R.S.; OLIVEIRA, A.D.; MAESTRI, R.; DEHON, G. Acurácia dos métodos para estimativa do volume comercial de clones de *Eucalyptus* sp. *Cerne*, Lavras, v.12, n.2, p.167-181, 2006.

Recebido em 20/02/2009

Aceito para publicação em 22/07/2009

