



**CARLOS ALBERTO MUIANGA**

**MODELOS NÃO LINEARES COM ESTRUTURA  
DE ERROS INDEPENDENTES E  
AUTOCORRELACIONADOS NA DESCRIÇÃO  
DO CRESCIMENTO DO FRUTO DO CAJUEIRO**

**LAVRAS - MG**

**2014**

**CARLOS ALBERTO MUIANGA**

**MODELOS NÃO LINEARES COM ESTRUTURA DE ERROS  
INDEPENDENTES E AUTOCORRELACIONADOS NA DESCRIÇÃO  
DO CRESCIMENTO DO FRUTO DO CAJUEIRO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Joel Augusto Muniz

**LAVRAS-MG**

**2014**

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e  
Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA**

Muianga, Carlos Alberto.

Modelos não lineares com estrutura de erros independentes e autocorrelacionados na descrição do crescimento do fruto do cajueiro / Carlos Alberto Muianga. – Lavras : UFLA, 2014.  
65 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2014.  
Orientador: Joel Augusto Muniz.  
Bibliografia.

1. Métodos iterativos (Matemática). 2. Mínimos quadrados. 3. Castanha. 4. Modelo de regressão I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.536

**CARLOS ALBERTO MUIANGA**

**MODELOS NÃO LINEARES COM ESTRUTURA DE ERROS  
INDEPENDENTES E AUTOCORRELACIONADOS NA DESCRIÇÃO  
DO CRESCIMENTO DO FRUTO DO CAJUEIRO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 9 de maio de 2014.

Dr. João Domingos Scalon	UFLA
Dr. Ângelo Alberico Alvarenga	EPAMIG
Dr. Augusto Ramalho de Moraes	UFLA

Dr. Joel Augusto Muniz  
Orientador

**LAVRAS – MG**

**2014**

Aos meus Pais Alberto Gaspar Muianga e Ana Enoque Monjane pelo apoio, e incentivo durante a formação.

Aos meus irmãos Alberto, Helena, Nélia e Elisa pelo privilégio de tê-los como irmãos.

**DEDICO**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Joel Augusto Muniz pela atenção, paciência, preocupação e ensinamentos durante toda a minha formação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária pelos ensinamentos durante a formação.

Aos colegas do departamento pela companhia, amizade, e troca de experiência durante o curso.

Aos colegas, Micherlania e Tales pelo apoio incondicional prestado durante o projeto.

Ao CNPq, no programa CNPq/MCT-MZ, nº 16/2011 pela concessão da bolsa.

À Universidade Eduardo Mondlane, pela concessão das passagens aéreas.

A todos que ajudaram diretamente ou indiretamente durante a minha formação vai o meu obrigado.

## RESUMO

Vários estudos do crescimento de frutos têm sido realizados para diversas culturas, contudo, observa-se que estudos de crescimento do fruto da castanha de caju com recurso de modelos estatísticos não são comuns na literatura, assim sendo o presente trabalho teve como objetivo ajustar os modelos não lineares Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e autoregressivos, com autocorrelação da primeira ordem aos dados do crescimento em largura, espessura e comprimento do fruto do cajueiro ao longo do tempo. As medições foram efetuadas com paquímetro, sendo a primeira efetuada seis dias após constatada a fecundação da flor, que era observada pelo início do murchamento do pistilo, e, pela coloração arroxeada ou róseo que tomava o pedúnculo. A estimação dos parâmetros dos modelos não lineares foi feita pelo método de Mínimos Quadrados por meio do método iterativo de Gauss-Newton, considerando estrutura de erros independentes e autorregressivos da primeira ordem. A comparação dos modelos foi feita usando-se o coeficiente de determinação ajustado, coeficiente de determinação, desvio padrão residual, critério de informação de Akaike e Bayesiano e as medidas de não linearidade. Os modelos Gompertz e Logístico com estrutura de erros autorregressivos da primeira ordem foram adequados para descreverem o crescimento do fruto em termos de largura, espessura e comprimento do fruto, mas não foi possível estimar os parâmetros com interpretação biológica e o modelo Brody não foi adequado para descrever o crescimento do fruto do cajueiro comparativamente aos Modelos Logístico e Gompertz, porém não subestimou os parâmetros com interpretação biológica.

Palavras-chave: Métodos iterativos. Mínimos quadrados. Castanha. Modelos de regressão.

## ABSTRACT

Various studies about fruits growth have been performed for different crops. However, it remarks that studies about cashew fruit growth, using statistical models, are not found in the literature. Thus, this work was performed aiming to adjust nonlinear models, namely, Gompertz, Logistic and Brody, with structure of independent and autoregressive errors, and with the first-order autocorrelation of growth data in width, thickness and length of cashew fruit over time. Measurements were performed using pachymeter. The first was carried around six days after flower fecundation, recorded from the beginning of pistil fading and from the violaceous or rose colouring of the peduncle. The estimation of nonlinear model parameters was carried by means of least square method using the iterative method of Gauss-Newton, considering the structure of independent and autoregressive errors of the first-order autocorrelation. The models comparison was carried using the adjusted coefficient of determination, coefficient of determination, residual standard deviation, Akaike and Bayesian information criterion, and measurements of nonlinearity. The Gompertz and Logistic models with structure of first-order autoregressive errors were suitable for describing the cashew fruit growth in width, thickness and length, but it was not possible estimating the parameters of biological interpretation. Beyond these two models, the Brody model was not suitable for describing the cashew fruit growth, therefore, it did not underestimate parameters of biological interpretation.

Key-words: Iterative methods. Least Squares. Cashew nut. Regression models.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Estágios de maturação (1 a 7) do fruto e pseudofruto do cajueiro de clones alaranjados.....	19
Figura 2	Estágios de maturação (1 a 7) do fruto e pseudofruto do cajueiro de clones avermelhados.....	19
Figura 3	Diferentes fases da floração até a antese do cajueiro tipo anão precoce .....	33
Figura 4	Ilustração da forma como foram realizadas as medidas.....	33
Figura 5	Visualização das diferentes fases de crescimento do fruto.....	34
Figura 6	Modelos Brody, Gompertz e Logístico na descrição do crescimento do fruto do cajueiro em função do tempo com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem.....	47
Figura 7	Modelos Brody, Gompertz e Logístico na descrição do crescimento em largura do fruto do cajueiro em função do tempo com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem.....	52
Figura 8	Modelos Brody, Gompertz e Logístico na descrição do crescimento em espessura do fruto do cajueiro em função do tempo com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem.....	55

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Modelos de crescimento usados para descrever curvas de crescimento.....	29
Tabela 2	Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos do modelo gompertz, para o comprimento, largura e espessura.....	42
Tabela 3	Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos do modelo Logístico, para o comprimento, largura e espessura.....	42
Tabela 4	Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos do modelo Brody, para o comprimento, largura e espessura.....	43
Tabela 5	Estimativas dos parâmetros nos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e AR (1), e seus respectivos intervalos de confiança de 95% no ajuste do comprimento do fruto.....	44
Tabela 6	Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem.....	47
Tabela 7	Estimativas para parâmetros dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e AR (1), e seus respectivos intervalos de confiança de 95% no ajuste da largura do fruto do cajueiro .....	49

Tabela 8	Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem.....	51
Tabela 9	Estimativas para parâmetros dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e AR (1), e seus respectivos intervalos de confiança de 95% no ajuste da espessura do fruto.....	53
Tabela 10	Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem para espessura do fruto .....	56

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	12
2	REFERENCIAL TEORICO .....	15
2.1	Cajueiro .....	15
2.2	Modelos de regressão.....	20
2.2.1	Estimação dos parâmetros nos modelos não lineares.....	21
2.3	Métodos iterativos .....	25
2.4	Curva de crescimento.....	28
2.5	Medidas de não linearidade.....	29
3	MATERIAL E MÉTODOS.....	32
3.1	Ajuste dos modelos de crescimento.....	34
3.2	Análises de resíduos.....	35
3.3	Intervalos de confiança assintóticos dos parâmetros .....	37
3.4	Critérios para a seleção de modelo .....	38
3.4.1	Critérios de informação .....	38
3.4.2	Coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ) .....	39
3.4.3	Desvio padrão residual (DPR).....	40
3.5	Recursos computacionais.....	40
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	42
4.1	Ajustes dos modelos não lineares .....	43
4.1.1	Comprimento .....	44
4.1.2	Largura do fruto.....	48
4.1.3	Espessura do fruto.....	52
4.2	Considerações .....	57
5	CONCLUSÕES.....	59
	REFERÊNCIAS .....	60

## 1 INTRODUÇÃO

O cajueiro (*Anacardium occidentale* L.), pertencente à família Anacardiaceae, é uma árvore originária do Norte e Nordeste do Brasil. O caju é formado por um pedúnculo, ou pseudofruto, que se forma junto a castanha, o verdadeiro fruto. O pedúnculo é a parte comestível *in natura* do caju do qual se obtém sucos, cajuína e fibras alimentares e representa cerca de 90% do peso total, os 10% restantes é a parte da qual se extrai a amêndoa e o líquido da castanha de caju (MENEZES; ALVES, 1995).

O cajueiro é uma das principais plantas frutíferas tropicais, pois, na comercialização de seus principais produtos está envolvido um grande número de atividades, movimentando considerável volume de recursos. Somente o mercado de amêndoas, seu principal produto, movimenta anualmente 500 milhões de dólares. Além da amêndoa, o cajueiro produz outros produtos com grande procura no mercado, tais como, o líquido da casca da castanha, o suco, polpa, doces, entre outros derivados (MENDONÇA; MEDEIROS, 2011). No Brasil, o cultivo de cajueiro gera em média 150 milhões de dólares anuais em uma área cultivada de 740.000 hectares, proporcionando uma produção de aproximadamente 250 mil toneladas de castanha e dois milhões de toneladas de pedúnculo por ano (OLIVEIRA et al., 2008).

O conhecimento do crescimento de plantas, medido por meio do acúmulo de biomassa ao longo do tempo, são fundamentais para o manejo adequado e a detecção de problemas no desenvolvimento das culturas, tais como: ocorrências de deficiências hídricas e nutricionais, incidência de doenças, competição de plantas daninhas, solos compactados ou mal drenados. O padrão de crescimento dos frutos durante o desenvolvimento é necessário para definir técnicas de colheita, manuseio e conservação pós-colheita, assim como para definir índices de maturação e qualidade (ARAÚJO NETO et al.,

2001). Parâmetros relativos à maturação e idade de frutos são importantes indicadores de que o produto encontra-se pronto para ser retirado do campo e apto para o consumo (MENDES, 2011).

A avaliação das características físicas dos frutos pode contribuir para seleção de cultivares promissoras, cujos frutos, além de serem utilizados ao natural, sejam destinados também para a industrialização (CARNEIRO, 1986). O estágio de desenvolvimento dos frutos no momento da colheita tem influência direta na qualidade do fruto maduro. Quando os frutos são colhidos verdes ou fisiologicamente imaturos, não amadurecem, enrugam e apresentam exsudação da seiva e a qualidade dos frutos é prejudicada; quando são colhidos muito maduros deterioram-se rapidamente, não podendo ser armazenados e comercializados em locais distantes (KAYS, 1997).

O crescimento do fruto ocorre em três fases. A primeira é caracterizada por intensa divisão celular, elevada pela atividade metabólica; a segunda fase é caracterizada pelo aumento do tamanho das células e diminuição da intensidade respiratória; a terceira fase corresponde à maturação que se caracteriza pela baixa atividade respiratória (WACHOAWICZ; CARVALHO, 2002). Segundo Chitarra e Chitarra (1990), o desenvolvimento do fruto ocorre segundo uma curva sigmoideal simples ou dupla.

Vários modelos estatísticos podem ser usados para estudar os processos de crescimento envolvidos no sistema de produção vegetal. Os estudos que avaliam o crescimento e desenvolvimento de frutos têm sido realizados por meio de modelos lineares e não lineares para descrever o crescimento ao longo do tempo (URCHEI; RODRIGUES; STONE, 2000). Na maioria dos casos, observa-se que os modelos não lineares proporcionam vantagens, em relação aos modelos lineares, os quais podem auxiliar o pesquisador no processo de tomada de decisão por apresentarem parâmetros com interpretação biológica (MAIA et al.,

2009). Os parâmetros dos modelos não lineares são utilizados para se obter, por exemplo, taxa de crescimento, peso à maturidade e grau de amadurecimento.

Vários estudos do crescimento de frutos têm sido realizados para diversas culturas, contudo, observa-se que estudos de crescimento do fruto da castanha de caju, com recurso de modelos estatísticos não são comuns na literatura. Assim sendo, o presente trabalho teve como objetivo ajustar os modelos não lineares Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e autorregressivos, com autocorrelação da primeira ordem aos dados do crescimento em largura, espessura e comprimento do fruto do cajueiro ao longo do tempo.

## 2 REFERENCIAL TEORICO

### 2.1 Cajueiro

O cajueiro (*Anacardium occidentale* L.) pertence ao gênero *Anacardium*, da família Anacardiácea. Esta família compreende cerca de 60 a 70 gêneros e 400 a 600 espécies. Segundo os estudiosos, a origem brasileira do cajueiro é um fato, o litoral nordestino é tido como centro de origem e dispersão do cajueiro comum, e a Amazônia, do cajueiro precoce. A planta está difundida pela América do Sul, América Central, África, Ásia. No Brasil, a quase totalidade da produção de castanhas situa-se nos estados do Ceará, Piauí e Rio Grande do Norte (SERVIÇO BRASILEIRO DE APOIO A MICRO E PEQUENAS EMPRESAS, 2005).

A partir de 1985, destacaram-se a Índia, Brasil, Moçambique, Tanzânia e Quênia como principais produtores de castanhas no mundo. Atualmente destaca-se o Vietnã, que está deslocando produtores tradicionais de castanha de caju como a Índia, o Brasil e outros países do continente africano. A produção mundial de castanha *in natura* alcançou 2,3 milhões de toneladas métricas para uma área colhida de 3,1 milhões de hectares, significando que, entre 1994 a 2004, o volume produzido duplicou enquanto a área colhida cresceu, mas em taxas bem inferiores, resultando em um aumento de produtividade pela utilização de variedades de cajueiros mais produtivos. No contexto de produção da castanha, destaca-se o Vietnã.

O caju é composto de pedúnculo e castanha. Em termos botânicos, o verdadeiro fruto é a castanha e o pedúnculo é o pseudofruto, o qual é comestível na forma *in natura* e industrializada (SOUZA FILHO et al., 1989). A cultura do cajueiro tem grande importância econômica em virtude da elevada demanda por parte do mercado consumidor de dois de seus produtos, a “castanha” e o



“pedúnculo” (PARENTE; SANTOS,1970).O cajueiro é constituído pela castanha que contém a amêndoa, o líquido da casca e a casca; o pedúnculo do qual se obtêm o suco e o bagaço (polpa de caju), que, quando seco, dá uma farinha que é utilizada como componente de ração animal; a lenha, proveniente da poda dos galhos muito ramificados e que se espalham atingindo o solo (DANTAS FILHO, 2004). Segundo Paiva et al. (1996), o pedúnculo representa 90% do peso do caju, enquanto a castanha e a amêndoa representam os outros dez percentuais restantes.

O caju é rico em vitamina C e ferro e ajuda a proteger as células do sistema imunológico contra os danos dos radicais livres. A casca do caju é usada no tratamento de afta e infecções na garganta. A amêndoa da castanha-de-caju constitui-se num dos principais produtos de utilização do cajueiro. É rica em proteínas, lipídios, carboidratos, fósforo e ferro, além de zinco, magnésio, proteínas, fibras e gordura insaturada, que ajuda a diminuir o nível de colesterol no sangue. Da amêndoa também pode ser extraído um óleo que pode ser utilizado como substituto do azeite de oliva (GAZZOLA; GAZZOLA; MOTTA, 2006).

O cajueiro é uma planta andromonoica, com flores masculinas (estaminadas) e hermafroditas numa mesma panícula. As flores são masculinas e hermafroditas situadas na mesma inflorescência; as masculinas abrem-se às 6 horas (até as 16 horas) e as hermafroditas às 10 horas (até as 12 horas). A receptividade do órgão reprodutor feminino existe desde 24 horas antes até 48 horas depois da abertura da flor. A polinização é predominantemente cruzada. A frutificação dá-se na época seca decorrendo 60-65 dias da floração à frutificação completa.

Existem dois tipos de cajueiros: o cajueiro comum e o anão precoce. O cajueiro comum apresenta um porte alto (6 a 12 metros), excepcionalmente de 15 a 20 metros (terrenos férteis), envergadura de 10 a 20m, copa ereta, compacta

a esparramada. A primeira floração dá-se entre o terceiro e o quinto ano de vida, o peso da castanha de 3 a 33g, o peso do pedúnculo varia de 20g a 500g, podendo apresentar coloração amarela ou vermelha. Produz de 1 a 100 kg de castanhas por safra (10.000 frutos), estabiliza a produção no oitavo ano de vida; a floração dura de 4 a 5 meses e a planta vive, em média, 35 anos. Enquanto que o cajueiro anão precoce apresenta porte baixo (4 a 6m), copa compacta (em torno de 7 metros de envergadura) e ereta; propagado por enxertia, estaquia ou alporquia, entra em floração aos seis meses, inicia floração um mês antes do que a do cajueiro comum e a floração dura de 6 a 7 meses. O peso do fruto varia de 3g a 13g, peso do pedúnculo varia de 20 a 160g, produz em torno de 43kg de castanha. O período de maior intensidade de frutificação é de setembro a novembro (MENDOÇA; MEDEIROS, 2011).

Amaturação é a fase do desenvolvimento da fruta em que ocorrem diversas mudanças físicas e químicas, tais como alterações na coloração, no sabor, na textura, mudanças na permeabilidade dos tecidos, produção de substâncias voláteis, formação de ceras na epiderme, mudanças nos teores de carboidratos, de ácidos orgânicos, nas proteínas, nos compostos fenólicos, nas pectinas, entre outros. As frutas podem ser classificadas em dois tipos: Frutas climatéricas e não climatéricas. Frutas climatéricas são aquelas que apresentam um período em que ocorre uma elevação na taxa respiratória, devido à produção autocatalítica de etileno e as não climatéricas são aquelas que não apresentam elevação na taxa respiratória próxima ao final do período de maturação, ou seja, a taxa respiratória apresenta um declínio constante até atingir a fase de senescência (EMBRAPA, 2008).

A castanha e o fruto crescem independentemente (PRATT; MENDONZA, 1980). Após a antese, o crescimento da castanha é rápido e uniforme, alcançando o tamanho máximo em torno de 30 dias (primeiro estágio de crescimento, com a noz apresentando aproximadamente 14g), depois desta

fase de crescimento, a noz decresce cerca de 15 a 40% e acasca endurece. Inicialmente o pedúnculo cresce lentamente, e depois rapidamente após a castanha ter alcançado o tamanho máximo. O pedúnculo, na maturação, apresenta grande variação de cor, indo desde o amarelo até o vermelho e termina cerca de 50 dias após a fecundação (YAHIA, 2001). Filgueiras et al. (1999) também encontraram que depois do desenvolvimento completo da castanha (estágio 1), o pedúnculo começa com mudanças significativas das características físicas.

De acordo com Alves, Bezerra e Abreu (1999), os sete estádios de maturação dos clones alaranjados podem ser: Pedúnculo verde/castanha verde (estágio 1), Pedúnculo verde/castanha madura e seca (estágio 2), Pedúnculo verde claro/castanha madura e seca (estágio 3), Pedúnculo com início de coloração amarela/castanha madura e seca (estágio 4), Pedúnculo amarelo com início de cor laranja/castanha madura e seca (estágio 5), Pedúnculo laranja-claro/castanha madura e seca (estágio 6), Pedúnculo laranja-escuro/castanha madura e seca (estágio 7). Para os clones avermelhados, os estágios podem ser: Pedúnculo verde/castanha verde (estágio 1), Pedúnculo verde/castanha madura e seca (estágio 2), Pedúnculo verde claro/castanha madura e seca (estágio 3), Pedúnculo com início de coloração laranja avermelhado/castanha madura e seca (estágio 4), Pedúnculo laranja avermelhado com início de cor vermelha/castanha madura e seca (estágio 5), Pedúnculo vermelho claro/castanha madura e seca (estágio 6), Pedúnculo vermelho escuro/castanha madura e seca (estágio 7). Os estágios podem ser visualizados abaixo na Figura 1.



Figura 1 Estágios de maturação (1 a 7) do fruto e pseudofruto do cajueiro de clones alaranjados

Fonte: (MOURA et al., 2011)



Figura 2 Estágios de maturação (1 a 7) do fruto e pseudofruto do cajueiro de clones avermelhados

Fonte: (MOURA et al., 2011)

O caju tem uma alta taxa de respiração (62-72 mL / kg / h) a 20 graus, no entanto, o padrão é não climatérico. Segundo Pratt e Mendoza (1980), a 20 °C, as taxas de respiração foram cerca de 50 mL / kg / h e produção de etileno foi constante, mas muito baixa (200 a 400 mL / kg / h). A ótima qualidade do caju muda de cor devido à perda de clorofila e síntese de pigmentos, ácidos e diminuição adstringência, enquanto os sólidos solúveis reduzem o teor de açúcares e aumentam o ácido ascórbico. Em peso, o caju é composto por 10% de castanha e 90% de pedúnculo. Dessas duas partes, o pedúnculo apresenta o menor aproveitamento, estima-se que seja inferior a 12% da produção (PAIVA et al., 1996).

Uma das grandes dificuldades enfrentadas pelos produtores de caju que visam o pedúnculo como produto é a vida útil extremamente curta do mesmo, devido à sua delicada estrutura, associada à rápida perda de firmeza, de coloração e de aparência saudável (FILGUEIREDO et al., 2002). Várias pesquisas foram desenvolvidas para a obtenção de genótipos de cajueiro que permitissem não só o aumento de produtividade, como também a melhoria da qualidade da castanha para a indústria e o aproveitamento do pedúnculo. Oloso e Clarkes (1993) estudaram alguns aspectos das propriedades mecânicas da castanha de caju e concluíram que a deformação de ruptura e a energia absorvida no ponto de ruptura aumentavam com o acréscimo do teor de água de castanhas tratadas termicamente no LCC a 190 °C por 150 segundos.

## 2.2 Modelos de regressão

Um problema bastante comum em estatística é o estudo da relação entre duas variáveis quantitativas X e Y, ou seja, procura-se uma função da variável X que explique, de maneira satisfatória a variável Y. Esta situação pode ser representada num modelo de regressão não linear na forma:  $Y_t = f(x_t, \theta^0) + \varepsilon_t$   $t = 1, \dots, n$ , sendo:  $Y_t$  a variável resposta univariada,  $X_t$  o vetor de observações em k variáveis,  $\theta^0$  é um parâmetro p dimensional desconhecido e  $\varepsilon_t$  representa o erro experimental não observável diretamente (SOUZA, 1998). De acordo com Draper e Smith (1998), os modelos de regressão podem ser classificados de acordo com os parâmetros do seguinte modo:

- a) Modelos lineares são lineares em relação aos seus parâmetros, isto é, todas derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo não dependem de nenhum parâmetro;

- b) Modelos não lineares são modelos em que pelo menos uma das derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo depende de um dos parâmetros do modelo;
- c) Modelos linearizáveis são modelos não lineares em sua forma inicial, mas que podem se tornar lineares a partir de alguma transformação.

Os modelos de regressão não linear são frequentemente utilizados por pesquisadores em diversas áreas do conhecimento. Na área de produção vegetal, o ajuste de modelos não lineares é comumente utilizado em situações experimentais como o estudo da dinâmica e disponibilização de nutrientes no sistema solo-planta (PEREIRA; MUNIZ; SILVA, 2005), estudo do crescimento de espécies vegetais (MARTINS FILHO et al., 2008) e em estudos de velocidade de reações químicas (MACHADO, 2006). Segundo Mazzini et al. (2005) e Mendes et al. (2008), o ajuste de modelos não lineares é bastante difundido e investigado, do ponto de vista metodológico, na descrição de curvas de crescimento animal e na descrição de cinética de digestão de animais ruminantes (SAVIAN; MUNIZ, 2007). Todos esses autores que trabalham com modelos não lineares na descrição dos fenômenos mencionados entram em consenso quanto à possibilidade de se condensar informações de uma série de dados, tomados ao longo do tempo, em um pequeno conjunto de parâmetros biologicamente interpretáveis (TERRA; MUNIZ; SAVIAN, 2010).

### **2.2.1 Estimação dos parâmetros nos modelos não lineares**

A estimação dos parâmetros em modelos não lineares pode ser obtida por diferentes métodos, sendo mais usado o método dos mínimos quadrados, porque em certas condições são não tendenciosos e apresentam variância

mínima em relação a outros estimadores não viesados (DRAPER; SMITH, 1998). A análise de dados por meio do modelo clássico de regressão, também, denominado modelo normal linear, é uma das técnicas mais usadas de estimação. Porém, em muitas situações práticas, algumas de suas suposições, como a normalidade e a linearidade nos parâmetros, não são satisfeitas. Este fato alavancou o desenvolvimento de novas técnicas estatísticas para os modelos de regressão, surgindo, então, novas classes de modelos, os modelos de regressão não linear e os modelos lineares generalizados. De acordo com a estrutura dos erros, os modelos de regressão podem ser classificados em três tipos: Ordinários, Ponderados e Generalizados.

a) Método dos Mínimos Quadrados Ordinários

São aqueles cuja estrutura de erros não viola a pressuposição da homoscedasticidade de variâncias, ou seja,  $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$ . Segundo Sousa(1998), o estimador ( $\hat{\theta}$ ) de mínimos quadrados de  $\theta^o$  é obtido mediante a pesquisa do mínimo em todo espaço paramétrico ( $\Theta$ ) da soma dos quadrados residuais. Seja o modelo de regressão não linear na forma:

$$Y = f(\theta) + \varepsilon \quad (1)$$

No qual,  $Y$  tem componentes  $y_t$ ,  $f(\theta)$  tem componente  $f(x_t, \theta)$  e  $\varepsilon$  tem componente  $\varepsilon_t$ . Seja  $F(\theta)$  a matriz jacobiana de  $f(\theta)$  e  $F = F(\theta)$ . A soma dos quadrados dos erros é obtida por:

$$SQE(\theta) = \sum_{t=1}^n [y_t - f(x_t, \theta)]^2 = (Y - f(\theta))'(Y - f(\theta)) \quad (2)$$

Desenvolvendo a expressão (2), tem-se:

$$SQE(\theta) = Y'Y - 2f[(X, \theta)]'Y + [f(X, \theta)]' f(X, \theta)$$

A primeira condição para minimização da soma dos quadrados dos resíduos consiste em igualar a zero o vetor (kx1) de derivadas parciais, ou seja:

$$\frac{\partial SQE(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

Desenvolvendo a expressão (1.3), obtém-se:

$$\frac{\partial SQE(\theta)}{\partial \theta} = \left[ \frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' [Y - f(X, \theta)] = 0 \quad (4)$$

$$\text{Seja } \left[ \frac{\partial f(X, \theta)}{\partial \theta} \right]' = X' \quad (5)$$

Substituindo a expressão (5) na equação (4), obtém-se:

$X'[Y - f(X, \theta)] = 0$ , corresponde ao sistema de equações normais (SEN) não linear, Sendo que:

$$X'Y = X' f(X, \theta) \text{ (SEN) não linear.}$$

Esse sistema de equações não possui soluções abertas, então deve-se recorrer aos métodos iterativos.



## b) Método dos mínimos quadrados Ponderados

Seja o modelo linear

$$Y = X\beta + u$$

Supondo  $u \sim N(0, V\sigma^2)$ ,  $E(u) = 0$  e  $\text{Var}(u) = V\sigma^2$ , em que  $V$  é uma matriz diagonal positiva definida, que representa as variâncias associadas a cada  $\mu_i$ . Seja um novo modelo  $Z = Q\beta + \phi$ , e uma matriz simétrica não singular  $P$  tal que  $V = P'P$ . Assim,  $V = P'P$ .

Escrevendo  $\phi = P^{-1}u$  tem-se:  $E(\phi) = E(P^{-1}u) = P^{-1}E(u) = 0$  e ainda,

$$\text{Var}(\phi) = E(\phi\phi') - [E(\phi)]^2 = E(P^{-1}uu'P^{-1}) = P^{-1}V\sigma^2P^{-1} = \sigma^2P^{-1}PP^{-1} = \sigma^2I$$

Multiplicando-se cada um dos termos de  $Y = X\beta + u$  por  $P^{-1}$ , obtém-se o novo modelo:

$P^{-1}Y = P^{-1}X\beta + P^{-1}u \Leftrightarrow Z = Q\beta + \phi$ , em que o vetor de erros é dado por  $\phi = P^{-1}u$ . Aplicando-se o método dos MQO ao modelo novo, tem-se que o MOO fornece o SEN:

$$X'V^{-1}X\hat{\beta} = X'V^{-1}Y, \text{ cuja solução:}$$

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$$

c) Método dos Mínimos Quadrados Generalizados

O método dos mínimos quadrados generalizados é mais eficiente do que o método dos mínimos quadrados ordinários, na presença de heterogeneidade de variâncias e autocorrelação residual (HOFFMAN; VIEIRA, 1998). No modelo linear matricial:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Assumindo-se que  $\varepsilon \sim N(0; W\sigma^2)$ , em que  $W$  é uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros. Admitindo-se que os erros são autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de primeira ordem AR (1),

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \xi_t$$

Em que  $t$  é o tempo medido em um intervalo de tempo e tem-se que  $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0$  se  $h \neq 0$ . O modelo  $\varepsilon_t$  será estacionário se  $-1 < \phi_1 < 1$ , para  $t = 1, 2, \dots, n$ .

$$\text{Nessas condições, } \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{1 - \phi_1^2} \text{ e } Cov_\varepsilon = \frac{\sigma_\xi^2}{1 - \phi_1^2} \phi_1^h = \sigma_\varepsilon^2 \phi_1^h$$

### 2.3 Métodos iterativos

Existem vários métodos iterativos para a estimação de parâmetros de modelos não lineares. O mais usado é o de Gauss Newton (HARTLEY, 1964)

ou método de linearização, o método gradiente (Steepest-Descent) e o método de Marquardt (BATES; WATTS, 1988). Esses métodos se diferem na forma como o  $\Delta$  é calculado para proporcionar as atualizações dos valores no vetor de parâmetros.

De uma forma geral, os critérios básicos são:

Gradiente:  $\Delta = X'e$ ;

Gauss Newton:  $\Delta = (X'X)^{-1}Xe$ ;

Newton:  $\Delta = G^{-1}X'e$ ;

Marquardt:  $\Delta = [X'X + \delta \text{diag}(X'X)^{-1}X'e]$ .

Em que  $(X'X)^{-}$  é uma inversa generalizada  $(X'X)$ .

O método de Gauss-Newton, também conhecido como método da linearização, usa uma expansão em série de Taylor de primeira ordem para aproximar o modelo de regressão não linear com termos lineares e, então, aplica mínimos quadrados ordinários para estimar os parâmetros. Iterações sucessivas desses passos geralmente conduzem a uma solução para o problema de regressão não linear. O primeiro passo para o método de Gauss-Newton consiste em atribuir valores iniciais para o vetor de parâmetros denotado por:  $\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_k^0)$ . Esses valores iniciais podem ser obtidos de estudos anteriores, conhecimentos teóricos ou por uma grade de valores que minimize a soma dos quadrados residuais. Com os valores iniciais atribuídos, aproxima-se a função esperada,  $f(X, \beta)$ , para os  $n$  casos, por termos lineares da expansão em série de Taylor, em uma vizinhança de  $\beta^0$  pertencente ao espaço paramétrico da seguinte forma:

$$f(X, \beta) \approx f(X, \beta^0) + Z^0(\beta - \beta^0)$$

Em que:

$f(X, \beta) \approx f(X, \beta^o) + Z^o(\beta - \beta^o)$  é a matriz de derivadas parciais,  $\left[ \frac{\partial f(X_i, \beta^o)}{\partial \beta^o} \right]$ , do modelo avaliada para  $\beta = \beta^o$ . Dessa forma, o modelo não

linear  $Y = f(X, \beta) + \varepsilon$  pode ser reescrito como:

$$Y = f(X, \beta) + \varepsilon$$

$$Y \approx f(X, \beta^o) + Z^o(\beta - \beta^o) + \varepsilon$$

passando o termo  $f(X, \beta^o)$  para o lado esquerdo da expressão e denotando a diferença formada,  $Y - f(X, \beta^o) = Y^o$ , bem como, a diferença  $\beta - \beta^o$  por  $\theta^o$ , o modelo pode ser reescrito como:

$$Y^o = Z^o \theta^o + \varepsilon$$

Observe que se chega a uma aproximação para um modelo de regressão linear. Cada coeficiente de regressão  $\theta$  representa a diferença entre os verdadeiros parâmetros de regressão e os valores iniciais atribuídos a eles. Assim, os coeficientes de regressão representam uma correção que deve ser feita nos coeficientes de regressão iniciais. O propósito de ajustar o modelo de regressão linear, como apresentado é estimar os coeficientes de regressão  $\theta^o$  pelo método de mínimos quadrados ordinários e usar essas estimativas para corrigir as estimativas iniciais dos parâmetros de regressão como se segue:

$$\theta^o = (Z^o{}' Z^o)^{-1} (Z^o{}' Y^o)$$

Ao final da primeira iteração, a atualização do vetor de estimativas dos parâmetros é dada por:  $\beta^1 = \beta^0 + \theta^0$ . Se o algoritmo de Gauss-Newton estiver na direção correta, a soma dos quadrados residuais considerando  $\beta^1$ , denotada por  $S(\beta^1)$ , deverá ser menor do que a soma dos quadrados residuais considerando  $\beta^0$ , denotada por  $S(\beta^0)$ , pois os coeficientes de regressão no passo 1 deverão ser melhores. O método de Gauss-Newton repete o procedimento, como foi descrito, com  $\beta^1$  no lugar dos valores iniciais resultando em um novo conjunto de estimativas corrigidas, representadas por  $\beta^2$  e teremos uma nova soma de quadrados residuais, denotada por  $S(\beta^2)$ .

#### **2.4 Curva de crescimento**

O estudo da curva de crescimento é largamente aplicado em diversas pesquisas agropecuárias. Assim muitas funções e formas de análise foram propostas para modelos de crescimento vegetal e animal (CUNHA, 2011). O interesse pelas curvas de crescimento vem aumentando nos últimos anos, principalmente pelo desenvolvimento de novas técnicas computacionais que permitem maior rapidez e precisão das análises (SILVA; AQUINO; OLIVEIRA, 2001). Uma das vantagens de modelar as curvas de crescimento via modelos não lineares é a síntese de um grande número de medidas em apenas alguns parâmetros com significado biológico, facilitando dessa forma a interpretação e o entendimento do fenômeno (BROWN; FITZHUGH JÚNIOR; CARTWRIGHT, 1976).

O termo curva de crescimento normalmente dá uma imagem de curvas sigmoidais que representam o tempo de vida de medidas de dimensão, geralmente de altura e peso. Na modelagem de dados de crescimento, deseja-se

obter informação física dos parâmetros, afim de construir um modelo padrão para as observações em estudo. Para modelar esse tipo de comportamento, existem diversos modelos de crescimento na literatura, ver Seber e Wild (1989). Na Tabela 1, são apresentados alguns dos principais modelos de crescimento.

Tabela 1 Modelos de crescimento usados para descrever curvas de crescimento

<b>Modelo</b>	<b>Função</b>
Logístico	$y_i = A / \{1 + \exp(B - Kx_i)\}$
Gompertz	$y_i = A \exp \{-\exp(B - Kx_i)\}$
Brody	$y_i = A \{1 - B \exp(-Kx_i)\}$
Von Bertalanffy	$y_i = A [1 - \exp \{-K(x_i - B)\}]$
Richards	$y_i = A / \{1 + \exp[B - Kx_i]\}^{1/\delta}$

Nota: Em que, A corresponde à assíntota do modelo, ou seja, valor de estabilização da variável dependente em relação ao tempo. B corresponde ao parâmetro de locação, sem interpretação biológica, e o K determina a taxa de expansão do crescimento.

## 2.5 Medidas de não linearidade

As medidas de não linearidade verificam se o grau de não linearidade de um problema de estimação não linear é suficiente pequeno para que as técnicas usuais de estimação, desenvolvidas para a regressão linear, sejam utilizadas como uma boa aproximação para o modelo não linear. No sentido de desenvolver uma medida de não linearidade, Beale e Watts (1960) foi um dos primeiros a sugerir uma solução para este problema, a outra contribuição importante foi a de Box (1971) que calculou o viés de ordem  $n^{-1}$  do estimador de máxima verossimilhança (EMV) do vetor  $\theta$  de um modelo normal não linear. Posteriormente, no fim da década de 1970, Gillis e Ratkowsky (1978)

concluíram que a medida de vício de Box não só estima o vício de maneira muito aproximada como também fornece uma boa indicação do comportamento não linear do modelo.

O trabalho mais relevante nessa área surgiu com Bates e Watts (1988), que usando conceitos de geometria diferencial, desenvolveram duas medidas de curvatura para os modelos não lineares. Essas medidas indicam, respectivamente, o grau de não linearidade intrínseca ( $c^l$ ) de um modelo e o grau de não linearidade aparente ou devida à parametrização utilizada ( $c^o$ ).

A não linearidade intrínseca ( $c^l$ ) mede a curvatura do espaço de estimação no espaço amostral, em que o termo espaço de estimação se refere a todas as possíveis soluções do problema de mínimos quadrados. A solução de mínimos quadrados é o ponto no espaço de estimação que se encontra mais próximo do vetor de variáveis respostas. Em um modelo de regressão linear, a medida ( $c^l$ ) é nula, uma vez que o espaço de estimação é uma reta, um plano ou um hiperplano.

A não linearidade devida ao efeito de parâmetros é consequência da falta de uniformidade do sistema de coordenadas no espaço de estimação. No caso linear, as linhas paramétricas são retas paralelas. A medida ( $c^o$ ) é uma quantidade escalar que representa o máximo valor do efeito da parametrização, obtida a partir de um vetor tridimensional chamado vetor aceleração. Em um modelo linear, a matriz aceleração é formada de zeros, resultando, assim em ( $c^o$ ) igual a zero.

Uma forma mais simples de estudar as medidas de não linearidade por meio de curvatura é utilizar a medida RMS (curvatura quadrática média), sendo que a notação utilizada para a curvatura RMS intrínseca é  $c^l$  e, para a curvatura RMS de efeito paramétrico é  $c^o$ .

Segundo Ratkowsky (1983), modelos com curvatura intrínseca significativa possuem pouco interesse prático, sendo viável buscar-se modelos

alternativos. Avalia-se a significância estatística de  $c^l$  e  $c^o$  comparando seus valores com  $1/2\sqrt{F}$ , em que  $F = F_{p,n-p}^\alpha$  é o valor crítico obtido a partir de uma distribuição F com e (n-p) graus de liberdade.



### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Os dados a analisar são provenientes de um experimento realizado por Almeida et al.(1987) na Unidade de pesquisa do Litoral/EPACE, em Pacajus-CE, no período de 21/09/78 a 08/11/78 no cajueiro do tipo anão precoce com 9 anos de idade. No período de realização do trabalho a temperatura média ficou em torno de 25,7 °C, umidade relativa em 84% e a precipitação total foi de 45,8 mm.

No ensaio, as variáveis de avaliação foram: comprimento, largura e espessura da castanha. O comprimento e a largura do fruto foram medidos a partir da vista lateral do fruto e para a espessura foi usada a vista frontal de acordo com a Figura 4.

Durante o trabalho do campo, acompanhou-se o desenvolvimento do fruto, começando-se por inspecionar a inflorescência. Marcou-se inicialmente mais de 100 flores fecundadas, chegando-se ao final com apenas dez flores. As medições foram efetuadas com paquímetro, sendo a primeira efetuada seis dias após constatada a fecundação da flor, que era observada pelo início do murchamento do pistilo e pela coloração arroxeada ou róseo que tomava o pedúnculo (Figura 3). As medidas seguintes foram realizadas com intervalos de seis dias, até o 36º dia, e a partir desta data, usou-se um intervalo de quatro dias, até o 52º dia, quando, ocorria a queda normal do fruto. Os diferentes estágios do fruto podem ser vistos na Figura 5.

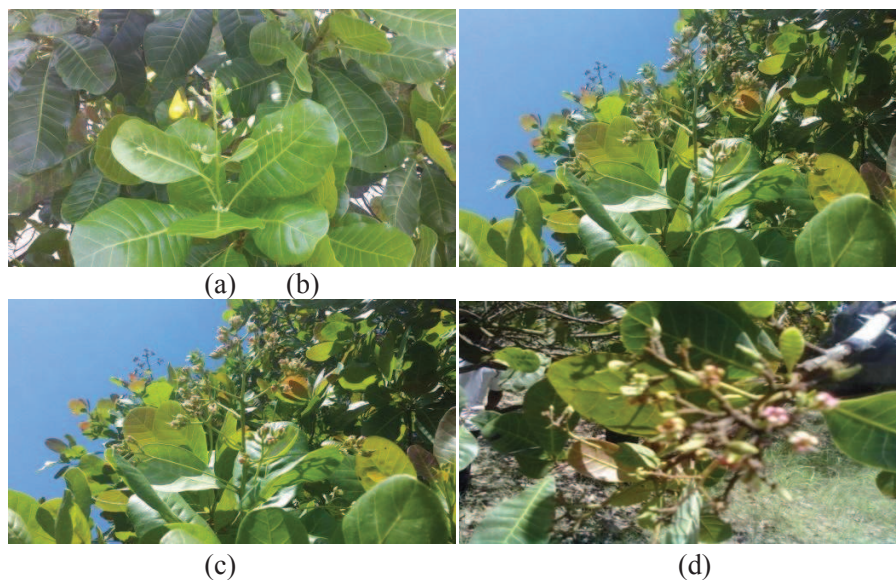


Figura 3 Diferentes fases da floração até a antese do cajueiro tipo anão precoce

Nota: (a) Inflorescência do cajueiro nos seus primeiros estágios;  
 (b) Inflorescência nos seus estágios finais de desenvolvimento;  
 (c) Murchamento da inflorescência;  
 (d) Fruto após a fecundação.

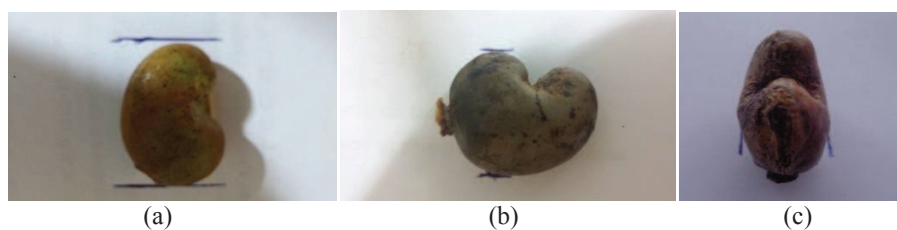


Figura 4 Ilustração da forma como foram realizadas as medidas

Nota: (a) Comprimento  
 (b) Largura  
 (c) Espessura



Figura 5 Visualização das diferentes fases de crescimento do fruto

### 3.1 Ajuste dos modelos de crescimento

Aos dados do comprimento, largura e espessura do fruto obtidos experimentalmente foram ajustados os modelos Logístico, Gompertz e Brody considerando estrutura de erros independentes, descritos na secção 2.4 e estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem. Estes modelos são descritos pelas seguintes expressões:

- a) Modelo Logístico com erros independentes e autorregressivos da primeira ordem:

$$Y_i = A / \{1 + \exp(B - Kx_i)\} + \varphi u_{i-1} + \varepsilon_i$$

- b) Modelo Gompertz com erros independentes e autorregressivos da primeira ordem:

$$Y_i = A \exp\{-\exp(B - Kx_i)\} + \varphi u_{i-1} + \varepsilon_i$$

- c) Modelo Brody com erros independentes e autorregressivos da primeira ordem:

$$Y_i = A \exp\{[1 - B \exp(Kx_i)]\} + \varphi u_{i-1} + \varepsilon_i$$

Em que:

$Y_i$  o valor da variável dependente (comprimento, largura e espessura) observada na  $i$ -ésima idade do fruto;

$A$  é a assíntota do modelo, ou seja, valor de estabilização da variável dependente em relação ao tempo;

$B$  o parâmetro de locação, sem interpretação biológica;

$K$  determina a taxa de expansão do crescimento;

$x_i$  a idade do fruto, em dias após a floração,  $i = 6, 12, \dots, 36, 40, 44, \dots, 52$ ;

$\varphi$  corresponde ao parâmetro autorregressivo de primeira ordem;

$\varepsilon_i$  é o erro experimental com média zero e variância  $\sigma^2$ .

### 3.2 Análises de resíduos

A verificação das hipóteses é fundamental, visto que toda a inferência estatística no modelo de regressão linear e não linear se baseia nesses pressupostos. Nesse sentido, se houver violação dos mesmos, a utilização do modelo deve ser posta em causa. Segundo Sousa (2012), a verificação dos pressupostos, pode ser feita por meio de um método informal de análise que envolve os gráficos de resíduos em relação às variáveis independentes e aos valores preditos ou através de testes estatísticos, que é uma maneira mais objetiva de analisar os resíduos por fornecer uma medida numérica. Graficamente os resíduos podem ser testados por dois tipos de gráficos de

probabilidade normal nomeadamente: “Normal P-P Plot” que representa a probabilidade acumulada que seria de se esperar se a distribuição fosse normal, em função da probabilidade observada acumulada dos erros e “Normal Q-Q Plot” que representa o quantil de probabilidade esperada se a distribuição fosse normal em função dos resíduos.

No presente estudo, a análise da normalidade foi feito por meio do teste de Shapiro-Wilk, no qual a hipótese nula assume que os resíduos seguem uma distribuição normal. Segundo Shapiro e Wilk(1965), a estatística do teste é descrita pela seguinte expressão:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{X})^2}$$

em que  $\bar{X}$  é a média amostral;  $x_{(i)}$  são os valores amostrais ordenados e o valor  $b$  é calculado com base nas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma distribuição normal. Menores valores de  $W$  indicam evidências sobre os desvios de normalidade.

O pressuposto da homoscedasticidade dos resíduos foi verificado usando o teste de Breusch-Pagan, que testa a hipótese nula de que as variâncias dos erros são iguais (homoscedasticidade) *versus* a hipótese alternativa de que as variâncias dos erros são uma função multiplicativa de uma ou mais variáveis, sendo que estas variáveis podem pertencer ou não ao modelo em questão, mais detalhes referentes a este teste podem ser obtidos em Breusch e Pagan (1979).

A presença de autocorrelação dos resíduos foi complementada por meio do teste Durbin-Watson dado pela seguinte expressão:

$$D = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^n \varepsilon_i^2}$$

em que  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_{i-1}$  é o resíduo da observação no tempo  $i$  e o resíduo da observação no tempo  $i-1$  respectivamente. O valor  $D$  está entre 0 e 4. Valores calculados próximos de 0 indicam presença de autocorrelação positiva, próximos de 2 significam que os resíduos são independentes e próximos de 4 indicam a presença de autocorrelação negativa. Após o ajuste dos modelos, fez-se esse teste, os resíduos eram autocorrelacionados em todos os modelos, assim sendo, ajustou-se um modelo considerando a estrutura de erros autorregressivos. Quando o valor de  $p$  é menor ou igual a 0,05 não rejeita-se a hipótese de independência dos resíduos. Mais detalhes referentes a este teste podem ser obtidos em Durbin e Watson (1950).

### 3.3 Intervalos de confiança assintóticos dos parâmetros

Após a estimação dos parâmetros, construiu-se os intervalos de confiança de 95% para o parâmetro a partir das estimativas da matriz assintótica de variâncias e covariâncias dada pela seguinte expressão:

$$IC(\beta_i) : \hat{\beta}_i \pm t_{(v,0,025)} \cdot \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_i)}$$

em que  $t_{(v,0,025)}$  é o quantil superior da distribuição  $t$  de Student, a um nível de significância de 5%.  $\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_i)}$  é o erro padrão assintótico da estimativa dos parâmetros do modelo, sendo  $\hat{V}(\hat{\beta}_i)$  um elemento da diagonal principal da

matriz de variâncias e covariâncias. Mais detalhes podem ser vistos no Draper e Smith (1998).

### **3.4 Critérios para a seleção de modelo**

A seleção do modelo mais adequado do ponto estatístico, é um tópico importante na análise de dados (BOZDONGAN, 1987). Sempre se procura-se um modelo mais parcimonioso, isto é, o modelo que envolva o mínimo de parâmetros possíveis a serem estimados e que explique bem o comportamento da variável resposta. Os critérios baseados na função da máxima verossimilhança são propostos na literatura, mais detalhes sobre o assunto podem ser vistos em Wolfinger (1993) e Littel et al. (2002).

#### **3.4.1 Critérios de informação**

A seleção do modelo mais adequado do ponto estatístico é um tópico importante na análise de dados (BOZDONGAN, 1987). Sempre se procura um modelo mais parcimonioso, isto é, o modelo que envolva o mínimo de parâmetros possíveis a serem estimados e que explique bem o comportamento da variável resposta. Os critérios baseados na função da máxima verossimilhança são propostos na literatura, mais detalhes sobre o assunto podem ser vistos em Wolfinger (1993) e Littel et al. (2002). No presente trabalho, usou-se o Critério de Informação de Akaike (AIC) e o critério Bayesiano de Schwarz (BIC).

Segundo Akaike (1974), o Critério de Informação de Akaike pode ser explicado como um critério que dá uma pontuação para o modelo baseado em sua adequação aos dados e na ordem do modelo. O primeiro termo é uma bonificação por uma melhor adequação aos dados, e o segundo termo é uma penalização. O critério de informação bayesiano (BIC) é definido como a

estatística que maximiza a probabilidade de se identificar o verdadeiro modelo dentre os avaliados. Quanto menor o valor do critério de informação, melhor será o modelo. Os critérios de informação de Akaike e Bayesiano são dados pelas seguintes expressões respectivamente:

$$AIC = -2 \log L(\tilde{\theta}) + 2k ;$$

$$BIC = -2 \log L(\tilde{\theta}) + k \log(n)$$

Em que:

$L(\tilde{\theta})$  é o máximo da função de verossimilhança,  $k$  é o número de parâmetros no modelo e  $n$  é o número de observações utilizadas na estimação do modelo em estudo e  $\log$  é o operador logarítmico natural.

### 3.4.2 Coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ )

Quanto maior for o valor da sua estimativa melhor é o modelo. O critério é dado pela seguinte expressão:

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[ \frac{(1 - R^2)(n - i)}{n - p} \right]$$

Em que:

$n$  é o número de observações utilizadas para ajustar a curva;

$p$  é o número de parâmetros na função incluindo o intercepto

$i=1$  se tiver intercepto e  $0$  se não tiver intercepto

$R^2$  é o coeficiente de determinação, dada pela seguinte expressão:



$$R^2 = 1 - \left[ \frac{SQR}{SQT} \right]$$

Em que, SQR e SQT correspondem à soma dos quadrados dos resíduos e à soma dos quadrados totais.

### 3.4.3 Desvio padrão residual (DPR)

Quanto menor for o desvio padrão residual, melhor será o modelo. A estimativa do DPR é dada através da seguinte expressão:

$$DPR = \sqrt{\frac{QME}{(n - p)}}$$

Em que:

QME é o quadrado médio do erro;

n é o número de observações;

p o número de parâmetros do modelo.

### 3.5 Recursos computacionais

A estimação dos parâmetros do modelo, a análise dos resíduos, os intervalos de confiança e averificação da qualidade do ajuste foi feita por meio dos pacotes `nlm`, `lmtest` e `nlstools`, qPCR disponíveis no programa R versão 3.12. A obtenção das estimativas dos valores iniciais dos parâmetros fez-se usando o *software Statistical Analysis System SAS*<sup>®</sup> (STATISTICAL ANALYSYS SYSTEM INSTITUTE, 1999). A vantagem desse procedimento é que permite

simular a soma dos quadrados residuais para intervalos dos valores iniciais de cada parâmetro do modelo para o método iterativo de Newton, Marquard e Gauss Newton e com diferentes opções para as iterações. Mais detalhes podem ser obtidos *noproc nlin* do manual do usuário do SAS (STATISTICAL ANALYSYS SYSTEM INSTITUTE, 1999).

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O ajuste dos modelos foi feito por meio da análise dos resíduos estimados, assumindo erros independentes e com distribuição normal, média zero e variância constante por meio dos testes de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson. São apresentadas nas Tabelas 2,3 e 4 os valores das estatísticas e os respectivos valores de p obtidos nos modelos.

Tabela 2 Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos do modelo gompertz, para o comprimento, largura e espessura

Variável	Shapiro- Wilk	Valorp	Breusch- Pagan	Valor p	Durbin- Watson	Valor p
Largura	0,9053	0,2500	2,0546	0,358	0,7030	0,002
Comprimento	0,9006	0,2226	2,2295	0,328	0,7153	0,002
Espessura	0,9029	0,2357	2,6622	0,264	0,7011	0,000

Tabela 3 Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos do modelo Logístico, para o comprimento, largura e espessura

Variável	Shapiro- Wilk	Valor p	Breusch- Pagan	Valor p	Durbin- Watson	Valor P
Largura	0,9345	0,4938	3,1596	0,2060	0,5510	0,0000
Comprimento	0,9447	0,6066	3,7729	0,1516	0,5660	0,0000
Espessura	0,9278	0,4262	4,2749	0,118	0,5763	0,0000

Tabela 4 Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Breusch-Pagan e Durbin-Watson, com os respectivos valores-p, aplicados aos resíduos do modelo Brody, para o comprimento, largura e espessura

Variável	Shapiro-Wilk	Valor p	Breusch-Pagan	Valor p	Durbin-Watson	Valor P
Largura	0,8767	0,1197	0,3462	0,8411	0,9875	0,016
Comprimento	0,885	0,1489	0,8073	0,6679	1,0165	0,012
Espessura	0,8526	0,0624	0,3388	0,8442	0,7011	0,006

Para o teste de normalidade, observou-se que o valor p do teste de Shapiro-Wilk foi maior que 0,05 para todas as variáveis respostas nos modelos ajustados, tendo-se concluído que os resíduos do modelo seguem uma distribuição normal, os mesmos resultados foram encontrados por Fernandes, Pereira e Muniz (2014) e Prado et al. (2012). No teste de homogeneidade dos resíduos, observou-se que o valor p do teste de Breusch-Pagan é superior a 0,05, tendo-se concluído que os resíduos possuem uma variância constante a um nível de significância de 5%. E, no teste de independência, observou-se que os resíduos não são independentes, ou seja, são autocorrelacionados pelo teste de Durbin-Watson a um nível e significância de 5% em todos os modelos, provavelmente por existir uma autocorrelação positiva entre idades de fruto próximas segundo Sousa (1998). Resultados semelhantes foram encontrados em estudo de crescimento por Carneiro et al. (2014), Sousa (2012) e Cunha (2011). Após o ajuste, fez-se a análise da função de autocorrelação parcial dos resíduos concluindo que a correlação residual é da primeira ordem.

#### 4.1 Ajustes dos modelos não lineares

Ajustes dos modelos não lineares A seguir são apresentados os resultados do ajuste variáveis comprimento, largura e espessura.

#### 4.1.1 Comprimento

Na Tabela 5, estão apresentadas as estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz, Logístico e Brody com erros independentes e autorregressivos da primeira ordem do comprimento do fruto. Os parâmetros A, B e K foram significativos pelo teste t a um nível de significância de 1%.

Tabela 5 Estimativas dos parâmetros nos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e AR (1), e seus respectivos intervalos de confiança de 95% no ajuste do comprimento do fruto

	GOMPERTZ			GOMPERTZ AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	3,2023	3,4674	3,7641	3,2284	3,4674	3,7065
B	1,3335	2,3644	4,2461	1,2276	2,3624	3,4973
K	0,1098	0,1763	0,3001	0,0986	0,1762	0,2538
$\Phi$	-	-	-		0,4519	
	LOGÍSTICO			LOGÍSTICO AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	3,2383	3,446	3,6618	3,2667	3,4461	3,6255
B	2,7124	3,9776	6,1066	2,6025	3,9767	5,3509
K	0,1729	0,2479	0,3737	0,1623	0,2478	0,3333
$\Phi$	-	-	-		0,5071	
	BRODY			BRODY AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	2,9521	3,624	4,2959	3,065	3,6238	4,1826
B	0,7644	1,5798	2,3952	0,9016	1,58	2,2585
K	0,0219	0,0807	0,1396	0,0318	0,0808	0,1297
$\Phi$	-	-	-		0,3848	

Nos três modelos, considerando erros independentes e autorregressivos da primeira ordem, as estimativas dos parâmetros foram bem próximas, a autocorrelação não afetou as estimativas, observou-se ligeiras diferenças para o parâmetro B, associado com o formato sigmoidal da curva. Resultados semelhantes foram encontrados por Fernandes, Pereira e Muniz(2014) e Cunha (2011).

O ponto de inflexão para o modelo Gompertz ocorre quando o fruto alcança  $\frac{A}{e}$ , do seu crescimento, ou seja,  $\frac{3,4674}{2,7182} \approx 1,28$  cm, no tempo

$\frac{B}{k} = \frac{2,3624}{0,1762} \approx 13$  dias após observada a fecundação. O comprimento máximo do

fruto, 3,47 cm foi alcançado 32 dias após observada a fecundação. Esse período está de acordo com o encontrado por Almeida et al. (1987) e Filgueiras et al. (1999), num estudo de crescimento do fruto de cajueiro, em que o comprimento máximo foi observado entre os 30° e 36° dias após a fecundação.

Entretanto o comprimento máximo foi subestimado pelo modelo, o mesmo resultado foi encontrado por Fernandes, Pereira e Muniz(2014) e Cunha (2011). Essa situação deveu-se provavelmente a fatores ligados a pós-maturação do fruto e da natureza do modelo. Isto é, após o fruto alcançar o comprimento máximo, instante correspondente à maturação fisiológica, o produtor não consegue visualizar esse período a olho nu, que se inicia com alterações físicas e químicas no fruto que condicionam a diminuição do tamanho deste. Como a forma do modelo Gompertz apresenta um crescimento restrito, essa situação faz com que o parâmetro máximo do modelo esteja próximo da média do comprimento máximo observado e o comprimento da última medição, na qual o fruto tomba.

Comparando o modelo Gompertz com Gompertz AR(1) concluiu-se que o Gompertz apresentou melhor qualidade de ajuste pelo critério de Informação

de AIC e BIC e o Gompertz AR (1) foi melhor pelo desvio padrão residual. Na Figura 15, está ilustrado o comportamento do comprimento do fruto e do modelo Gompertz.

No ajuste do modelo Logístico, os parâmetros A, B e K foram significativos pelo teste t a um nível de significância de 1%. No modelo Logístico AR (1), o comprimento máximo foi de 3,45 cm e a taxa de crescimento foi de 0,25 cm.

O ponto de inflexão para o modelo Logístico ocorre quando o fruto alcança metade do seu crescimento, ou seja,  $\frac{A}{2}$  do seu crescimento, ou

$$\frac{3,4461}{2,000} \approx 1,72 \text{ cm devido à simetria do modelo, no tempo } \frac{B}{k} = \frac{3,9767}{0,2478} \approx 16 \text{ dias}$$

após observada a fecundação. O comprimento máximo do fruto, 3,45 cm foi alcançado 29 dias após observada a fecundação. Esse período está de acordo com o encontrado por Almeida et al. (1987) e Filgueiras et al. (1999), num estudo de crescimento do fruto de cajueiro, em que o comprimento máximo foi observado entre os 30º e o 36º dias após a fecundação. Esse padrão de crescimento corresponde ao sigmoidal simples descrito por Chitarra e Chitarra(1990). O modelo Logístico sem considerar a estrutura de erros autorregressivos foi melhor que o Logístico AR (1).

Diferentemente dos modelos Logístico e Gompertz, o parâmetro B teve efeitos significativos ( $P < 0,05$ ). No modelo Brody AR (1), o comprimento máximo foi alcançado quando o fruto apresentava 3,62 cm e a taxa de crescimento foi de 0,08 cm. A taxa de crescimento do modelo Brody foi menor comparativamente ao modelo Logístico e Gompertz. Na Figura 6, estão representados os dados e a representação gráfica resultantes do ajuste.

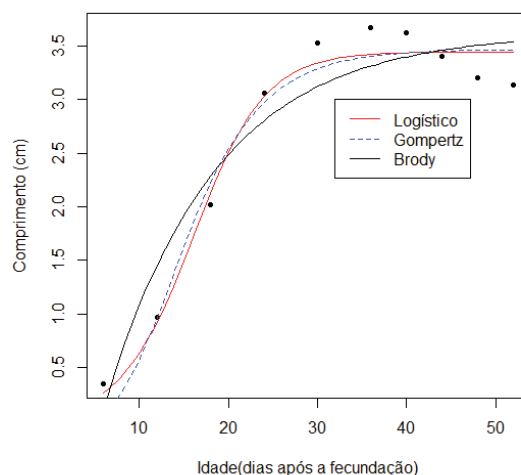


Figura 6 Modelos Brody, Gompertz e Logístico na descrição do crescimento do fruto do cajueiro em função do tempo com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

Para avaliar a qualidade do ajuste dos modelos aos dados, foram usados os critérios de informação de Akaike, critérios de informação bayesiana, coeficiente de determinação, coeficiente de determinação ajustado e desvio padrão residual. Os resultados são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

Avaliador	Gompertz AR (1)	Logístico AR (1)	Brody AR (1)
AIC	7,5317	3,6198	15,7345
BIC	9,0447	5,1328	17,2475
$R^2$ adj	0,9605	0,9703	0,8933
$R^2$	0,9692	0,9769	0,9170
Desv. Pad resi	0,2102	0,2506	0,3852
$c^i$	0,607	0,607	1,9212
$c^0$	0,3251	0,3251	0,2882



De acordo com os avaliadores de qualidade do ajuste do modelo, tanto o modelo Logístico AR (1) e o Gompertz AR (1), foram adequados para descreverem o crescimento em comprimento do fruto do cajueiro (Tabela 5) em relação ao modelo Brody. O modelo Logístico AR (1) foi melhor pelo critério de informação de Akaike, critério de Informação bayesiano, coeficiente de determinação ajustado e coeficiente de determinação comparativamente ao modelo Gompertz, este tendo sido melhor pelo desvio padrão residual. Resultados similares foram encontrados por Fernandes, Pereira e Muniz(2014) e Pradoet al. (2012).

De acordo com as medidas de linearidade, observa-se que o valor das curvaturas intrínsecas e dos parâmetros está próximo de zero, assim sendo, segundo Souza (1998), todos os modelos apresentam uma melhor aproximação linear.

#### **4.1.2 Largura do fruto**

Na Tabela 7, estão apresentadas as estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz, Logístico e Brody com a estrutura de erros independentes e considerando a estrutura de erros autorregressivos da primeira ordem do crescimento em largura. Os parâmetros A, B e K foram significativos pelo teste t a um nível de significância de 1% para o modelo Gompertz e Logístico, o mesmo verificou-se no modelo Brody, com exceção do parâmetro K que foi significativo a um nível de significância de 5%.

Tabela 7 Estimativas para parâmetros dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e AR (1), e seus respectivos intervalos de confiança de 95% no ajuste da largura do fruto do cajueiro

	GOMPERTZ			GOMPERTZ AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	2,507	2,7221	2,9659	2,5266	2,722	2,9174
B	1,2544	2,2451	4,1582	1,1518	2,246	3,3400
K	0,105	0,1693	0,296	0,0939	0,1693	0,2447
$\Phi$					0,4331	
	LOGÍSTICO			LOGÍSTICO AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	2,5347	2,7219	2,8789	2,5572	2,7032	2,8493
B	2,5903	3,8383	5,9392	2,4837	3,8356	5,1876
K	0,1660	0,2399	0,3645	0,1554	0,2397	0,3242
$\Phi$					0,4809	
	BRODY			BRODY AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	2,3109	2,8429	3,3748	3,0650	2,8432	4,1826
B	0,7531	1,5560	2,3589	0,9016	1,5554	2,2585
K	0,0210	0,0799	0,1387	0,0318	0,0798	0,1297
$\Phi$					0,3826	

Não houve diferenças nas estimativas do modelo Gompertz com erros independentes e com estrutura de erros autorregressivos da primeira ordem, o mesmo foi observado no modelo Brody e Logístico. Enquanto que para o modelo Logístico observou-se ligeiras diferenças no parâmetro de localização, entretanto, como o parâmetro B está associado com o formato sigmoidal da curva, afetará somente, o ponto de inflexão de cada modelo.

Considerando as estimativas do modelo Gompertz, a ordenada no ponto de inflexão é atingida quando o fruto alcança  $\frac{A}{2,7182} = \frac{2,722}{2,7182} \approx 1,00$  cm, no tempo  $\frac{B}{k} = \frac{2,722}{0,1693} \approx 13$  dias após observada a fecundação, o que coincide aproximadamente ao dia 13 de setembro.

Observaram-se diferenças na taxa de crescimento dos modelos, sendo que o Logístico AR (1) e o Gompertz AR (1) atingem mais rapidamente a largura máxima por apresentarem maior taxa de crescimento de 0,2397 e 0,1693 cm respectivamente, superior a 0,0798 cm do Modelo Brody.

Comparando-se o modelo Gompertz com o Gompertz AR(1), conclui-se que ambos os modelos descreveram de forma adequada o crescimento do fruto em largura. Sendo que o Gompertz, sem considerar a estrutura dos erros autorregressivos, foi melhor pelo critério de Informação de Akaike e critério de informação bayesiano. Pelo critério de coeficiente de determinação, coeficiente de determinação ajustado e o desvio padrão residual não foi possível distinguir o melhor dado que apresentaram os mesmos valores.

No modelo Logístico AR (1), 2,7 cm foi a largura máxima estimada pelo modelo e 0,2397 correspondeu à taxa de crescimento. A largura máxima do fruto foi observada aos 33 dias após verificada a fecundação. Esse período está de acordo com o encontrado por Almeida et al. (1987) e Filgueiras et al. (1999). No modelo logístico, o ponto de inflexão ocorre quando o fruto alcança metade do seu crescimento, ou seja,  $\frac{2,7032}{2} \approx 1,36$  cm, no tempo  $\frac{B}{k} = \frac{3,8356}{0,2397} \approx 16$  dias após observada a fecundação. Pode-se constatar que tanto o modelo Logístico e o Gompertz apresentam as mesmas estimativas com interpretação biológica somente para a largura máxima.

De acordo com os avaliadores de qualidade de ajuste apresentadas na Tabela 8, pode-se observar que o Modelo Logístico AR (1) e o Gompertz AR (1) foram adequados para a descrição do crescimento do fruto em largura, comparativamente ao modelo Brody AR (1), sendo que o modelo Logístico AR (1) leva uma ligeira vantagem comparativamente ao Gompertz apresentando um melhor ajuste aos dados, devido aos menores valores do desvio padrão residual, critérios de informação de Akaike e Bayesiano. Os valores do coeficiente de determinação e coeficiente de determinação ajustado foram muito próximos, não se podendo selecionar o melhor modelo.

De acordo com as medidas de não linearidade, conclui-se que o modelo Logístico foi superior ao Gompertz e ao Brody pela curvatura intrínseca e o Brody foi superior ao Gompertz e ao Logístico por estes apresentarem menores valores dessa estatística.

Tabela 8 Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

Avaliador	Gompertz AR (1)	Logístico AR (1)	Brody AR (1)
AIC	3,1843	-0,6785	10,7896
BIC	4,6972	0,8344	12,30249
R2 adj	0,9575	0,9681	0,8921
R2	0,9669	0,9752	0,9161
Desv. Pad resi	0,2057	0,1696	0,3009
c <sup>i</sup>	0,9712	0,6251	1,9614
c <sup>o</sup>	0,5823	0,3269	0,2892

Os mesmos resultados foram encontrados por Cunha (2011) e Pradoet al. (2012). Na Figura 22, ilustra-se a representação gráfica dos dados e o ajuste dos três modelos. Na Figura 7, estão representados os dados e a representação gráfica resultantes do ajuste.

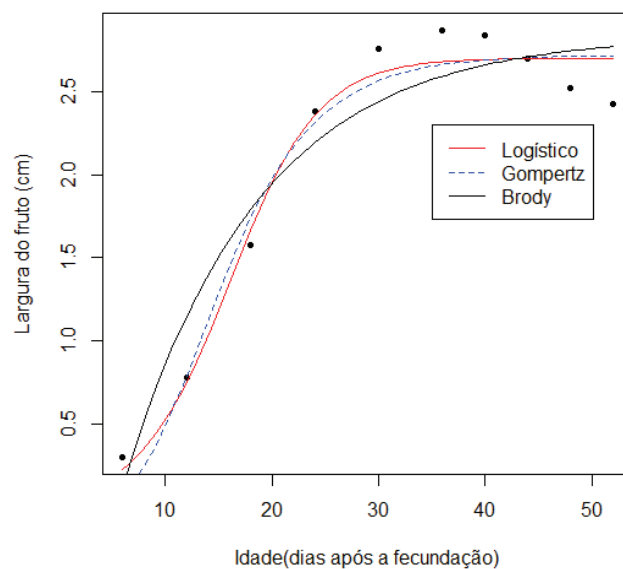


Figura 7 Modelos Brody, Gompertz e Logístico na descrição do crescimento em largura do fruto do cajueiro em função do tempo com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

#### 4.1.3 Espessura do fruto

Na Tabela 9, estão apresentadas as estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e autorregressivos da primeira ordem para o crescimento em termos de espessura. Os parâmetros A, B e K foram significativos pelo teste t a um nível de significância de 1% em todos os modelos.

Tabela 9 Estimativas para parâmetros dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros independentes e AR (1), e seus respectivos intervalos de confiança de 95% no ajuste da espessura do fruto

	GOMPERTZ			GOMPERTZ AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	1,6868	1,8549	2,0519	1,7018	1,8551	2,0084
B	1,334	2,6555	6,3501	1,2005	2,652	4,1034
K	0,1007	0,1797	0,5011	0,0876	0,1795	0,2713
$\Phi$	-	-	-	-	0,4512	-

	LOGÍSTICO			LOGÍSTICO AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	1,7094	1,8448	1,9871	1,727	1,845	1,9629
B	2,731	4,31	7,6208	2,528	4,3078	6,0876
K	0,1616	0,2485	0,4313	0,1453	0,2483	0,3514
$\Phi$	-	-	-	-	0,4939	-

	BRODY			BRODY AR(1)		
	LI	Estimativa	LS	LI	Estimativa	LS
A	1,4729	1,9788	2,4847	1,558	1,9785	2,399
B	0,6516	1,5154	2,3792	0,7969	1,5159	2,2349
K	0,0076	0,0708	0,1340	0,0183	0,0708	0,1234
$\Phi$	-	-	-	-	0,3902	-

Para o caso da espessura do fruto, não se observou diferenças acentuadas nas estimativas dos modelos ajustados sem e considerando a estrutura dos erros autorregressivos. O ponto de inflexão para o modelo Gompertz ocorre quando o

fruto alcança  $\frac{A}{e}$ , do seu crescimento, ou seja,  $\frac{1,8551}{2,7182} \approx 0,68$  cm, no tempo

$$\frac{B}{k} = \frac{2,652}{0,1795} \approx 15 \text{ dias após observada a fecundação.}$$

O crescimento máximo do fruto foi de 1,86 cm de espessura, momento em que estavam decorridos aproximadamente 28 dias após observada a fecundação. Esse período está muito próximo, do período encontrado por Almeida et al. (1987) e Filgueiras et al. (1999). A espessura máxima estimada pelo modelo corresponde à média entre a espessura máxima observada e a espessura na altura da última medição, quando o fruto tomba. Comparando-se o modelo Gompertz com o Gompertz AR(1) conclui-se que ambos os modelos descrevem de forma satisfatória o crescimento do fruto em espessura.

No modelo Logístico AR (1), 1,86 cm foi a espessura máxima estimada pelo modelo e 0,18 correspondeu à taxa de crescimento. A espessura máxima do fruto foi alcançada aos 30 dias após verificada a fecundação. Esse período está de acordo com o encontrado por Almeida et al. (1987) e Filgueiras et al. (1999).

O ponto de inflexão para o modelo Logístico ocorre quando o fruto alcança metade do seu crescimento, quando o fruto apresenta  $\frac{1,845}{2,000} \approx 0,93$  cm

devido à simetria do modelo, no tempo  $\frac{B}{k} = \frac{4,3078}{0,2478} \approx 16$  dias após observada a fecundação. Para esta variável, o modelo Logístico eo Gompertz apresentam as mesmas estimativas com interpretação biológica.

No modelo Brody AR (1), a espessura máxima foi de 1,84 cm e a taxa de crescimento foi de 0,25 cm. O modelo Brody, sem considerar a estrutura dos erros autorregressivos, foi melhor que o Brody AR (1). Na Figura 8, ilustra-se a representação gráfica dos dados e o ajuste dos três modelos.

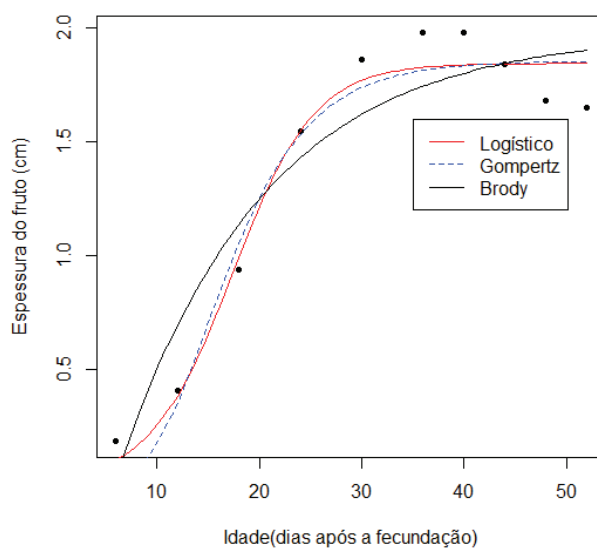


Figura 8 Modelos Brody, Gompertz e Logístico na descrição do crescimento em espessura do fruto do cajueiro em função do tempo com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem

De acordo com os avaliadores de qualidade de ajuste apresentados na Tabela 10, pode-se observar que o modelo de Brody foi o pior para descrever esse fenômeno por todos os critérios de avaliação da qualidade de ajuste. O modelo Logístico AR(1) como o Gompertz AR (1) foram adequados para descreverem o crescimento em espessura do fruto do cajueiro.



Tabela 10 Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz, Logístico e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem para espessura do fruto

Avaliador	Gompertz AR (1)	Logístico AR (1)	Brody AR (1)
AIC	-1,7256	-5,2207	6,5428
BIC	-0,2127	-3,7078	8,0557
R <sup>2</sup> adj	0,9524	0,9627	0,8633
R <sup>2</sup>	0,963	0,9627	0,8937
Desv. Pad resi	0,1609	0,1351	0,2433
c <sup>i</sup>	1,0237	0,7606	2,6772
c <sup>e</sup>	0,6431	0,3856	0,321

O modelo Logístico AR (1) foi ligeiramente melhor que o Gompertz AR (1) pelos critérios de informação de Akaike, critério de Informação Bayesiano, coeficiente de determinação ajustado e pelo desvio padrão residual. Enquanto que pelo coeficiente de determinação ajustado e pelo coeficiente de determinação não foi possível distinguir o melhor modelo porque apresentaram os mesmos valores para esses avaliadores de qualidade de ajuste.

O modelo Brody, embora não tenha sido adequado pelos critérios mencionados acima, apresentou um melhor grau de linearidade comparativamente aos dois modelos pela não linearidade de efeito dos parâmetros. Os modelos Logístico AR (1) e o Brody AR (1) apresentaram uma melhor qualidade de ajuste por apresentarem menores valores do grau de linearidade intrínseca, enquanto que o modelo Logístico AR (1) foi superior ao modelo Gompertz AR (1) e ao Brody (1) por apresentar um menor valor de grau de linearidade de efeito paramétrico.

## 4.2 Considerações

O ajuste do modelo Logístico, Gompertz e Brody com estruturas de erros autorregressivos, tornou as estimativas mais precisas, com intervalos de confiança menores. Mesmos resultados foram obtidos por Mazzini et al. (2005), Mendes et al. (2008) e Savian e Muniz (2007).

Em todas as variáveis ajustadas, o modelo Brody apresentou um melhor grau de aproximação linear pelo critério de não linearidade devido aos efeitos dos parâmetros, enquanto o modelo Gompertz e Logístico apresentaram uma melhor aproximação não linear pelo critério de não linearidade intrínseca.

Tanto o modelo Logístico como o Gompertz subestimaram o máximo de cada variável analisada, embora o período (dias após a fecundação) em que o fruto alcança esse máximo coincida com o encontrado por Almeida et al. (1987). Enquanto que o modelo Brody, apesar de não ter sido o melhor, comparativamente ao Logístico e Gompertz, não subestimou o tamanho máximo para todas as variáveis ajustadas. Apesar dos modelos Gompertz terem sido adequados para descrever os dados, não foi possível estimar todos os parâmetros com interpretação biológica, nomeadamente: valor da estimativa no momento da maturação fisiológica e provavelmente o valor da estimativa no momento em que o fruto desprende-se da planta. Essa situação deveu-se ao fenômeno fisiológico (desenvolvimento do fruto) não ser efetivamente explicado pela natureza dos modelos ajustados. Isso porque os modelos ajustados apresentam um crescimento restrito, enquanto que o fruto inicialmente cresce exponencialmente até um máximo correspondente à maturação fisiológica, depois de atingido esse ponto, o tamanho (largura, espessura e comprimento) do fruto decresce de uma forma mais ou menos exponencial até estagnar no instante em que o fruto se desprende da planta e ocorre a sua queda. Essa foi uma das prováveis causas que fizeram com que os modelos que descreveram de forma

adequada o crescimento do fruto, subestimem o valor da estimativa máxima em cada uma das variáveis ajustadas.

A outra situação que chamou a atenção em todos os ajustes é que o comprimento máximo estimado pelos modelos Gompertz e Logístico tende a corresponder aproximadamente ao valor médio entre o tamanho máximo (maturação fisiológica) e o tamanho mínimo (fruto a tombar), um indicador de que os modelos não descrevem de forma adequada o fenômeno fisiológico em análise. Os modelos Gompertz e Logístico, ajustados no presente estudo, descreveram de forma satisfatória o crescimento do fruto ao longo do tempo após observada a fecundação, mas a estimativa do crescimento máximo foi subestimada devido à natureza do fenômeno. Assim sendo, o estudo pode ser suplementado com o ajuste do modelo platô para o mesmo conjunto de dados, dado que este modelo fornece o valor platô (crescimento máximo do fruto) e estabelece uma relação do crescimento do fruto após a maturação fisiológica do fruto devido a sua natureza. A disponibilização dessa informação pode ser útil para o agricultor dado que corresponde às diferentes fases de maturação do fruto no campo. O modelo Brody, apesar de não ter sido adequado, sua estimativa do tamanho máximo tende a estar próxima do verdadeiro valor observado em todos os casos.

## 5 CONCLUSÕES

As estimativas dos parâmetros do modelo com estrutura de erros independentes convergiram para valores próximos considerando erros autorregressivos.

Os modelos Gompertz e Logístico com erros independentes e autorregressivos foram adequados para descreverem o crescimento do fruto do cajueiro em termos de largura, espessura e comprimento, mas subestimaram a estimativa do crescimento máximo.

Considerando erros autorregressivos, o modelo Logístico foi superior ao Gompertz para todas as variáveis analisadas. O modelo de Brody, considerando erros autorregressivos, foi inferior aos modelos Gompertz e Logístico na descrição de todas as variáveis de crescimento do fruto, mas este modelo estimou adequadamente o valor máximo assintótico das variáveis.

## REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A. New look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 19, n. 6, p. 716-723, Dec. 1974.
- ALMEIDA, I. L. D. et al. Estudo sobre o crescimento do fruto e pseudo-Fruto do cajueiro (*Anarcadium occidentale* L.) do tipo anão precoce. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 9, p. 21-30, 1987.
- ALVES, R. E.; BEZERRA, F. C.; ABREU, F. A. P. Development and maturation of the apple of early dwarf cashew tree CCP 76. **Acta Horticulturae**, The Hague, n. 485, p. 230-255, 1999.
- ARAUJO NETO, S. E. et al. Desenvolvimento de frutos de sapotizeiro. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 23, n. 1, p. 25-29, 2001.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley, 1988.
- BEALE, D. M.; WATTS, D. G. Confidence regions in non-linear estimation. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B**, Oxford, v. 22, n. 1, p. 41-88, 1960.
- BOX, M. Bias in nonlinear estimation. **Journal of the Royal Statistic Society. Series B**, Oxford, v. 33, n. 2, p. 171-201, 1971.
- BOZDONGAN, H. Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): the general theory and its analytical extensions. **Psychometrika**, Williamsburg, v. 52, n. 3, p. 345-370, Sept. 1987.
- BREUSCH, T.; PAGAN, A. Teste para heterocedasticidade e coeficiente de variação aleatória Econométrica. **Sociedade Econométrica**, Rio de Janeiro, v. 47, p. 1287-1294, 1979.
- BROWN, J. E.; FITZHUGH JÚNIOR, H. A.; CARTWRIGHT, T. C. A comparison of nonlinear models for describing weight-age relationships in cattle. **Journal of Animal Science**, Champaign, v. 42, n. 4, p. 810-818, Apr. 1976.

CARNEIRO, A. P. S. et al. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça Tabapuã. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 49, n. 1, p. 57-62, jan. 2014.

CARNEIRO, J. G. Estudos sobre a caracterização físico-química de frutas: Jamelão (*Syzygiumjambolana* DC). **Revista Brasileira de Fruticultura**, Cruz das Almas, v. 8, n. 2, p. 41-43, 1986.

CHITARRA, M. I. F.; CHITARRA, A. B. **Pós-colheita de frutos e hortaliças: fisiologia e manuseio**. Lavras: Editora da ESAL, 1990.

CUNHA, L. S. **Modelos de regressão para a descrição do crescimento de frutos ameixeira**. 2011. 147 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

DANTAS FILHO, L. **Inclusão da polpa de caju (*Anacardiumoccidentale* L.) desidratada na alimentação de ovinos mestiços da raça santa inês: desempenho, digestibilidade e balanço de nitrogênio**. 2004. 60 p. Dissertação (Mestrado em Ciência Animal) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2004.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: JohnWiley, 1998.

DURBIN, J.; WATSON, G. S. Teste de correlação serial em mínimos quadrados de regressão I. **Biometrika**, London, v. 37, p. 409-428, 1950.

FACHINELLO, J. C.; NACHTIGAL, J. C. **Fruticultura: fundamentos e prática**. Brasília: Embrapa, 2008. Disponível em: <<http://www.cpact.embrapa.br/publicacoes/livros/fundamentos-fruticultura/12.htm>>. Acesso em: 14 mar. 2013.

FERNANDES, T. J. **Curva de crescimento do cafeeiro em diferentes alinhamentos de plantio utilizando modelos não lineares**. 2012. 81 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2012.

FERNANDES, T. J.; PEREIRA, A. A.; MUNIZ, J.A. Seleção de modelos não-lineares para a descrição de curvas de crescimento do fruto do cafeeiro. **Coffee Science**, Lavras, v. 9, n. 2, p. 207-215, abr./jun. 2014.

FILGUEIRAS, H. et al. Cashew apple for fresh consumption: research on harvest and postharvest handling technology in Brazil. **Acta Horticulturae**, The Hague, v. 485, n. 1, p. 55-160, 1999.

FILGUEIREDO, H. et al. Physical-chemical changes in early dwarf cashew pseudofruits during development and maturation. **Food Chemistry**, London, v. 77, p. 343-347, 2002.

GAZZOLA, J.; GAZZOLA, R.; MOTTA, C. H. A amêndoa da castanha de caju: composição e importância dos ácidos graxos-produção e comércio mundiais. In: CONGRESSO DA SOBER, QUESTÕES AGRÁRIAS, EDUCAÇÃO NO CAMPO E DESENVOLVIMENTO, 45., 2006, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis:Sociedade Brasileira de Economia e Sociologia Rural, 2006.

GILLIS, P.; RATKOWSKY, D. The behaviour of estimators of the parameters of various yield-density relationships. **Biometrics**, Washington, v. 34, p. 191–198, June 1978.

HARTLEY, H. O. The modified Gaus-Newton method for the fitting of nonlinear regression function by least squares. **Technometrics**, Washington, v. 3, n. 2, p. 269-280, May 1964.

HOFFMANN, R.; VIERA, S. **Análise de regressão: uma introdução a econometria**. São Paulo: Hucitec, 1998.

KAYS, S. J. **Postharvest physiology of perishable plant products**. Athens: AVI, 1997.

LITTELL, R. C. et al. **SAS system for mixed models**. Cary: Statistical Analysis System Institute, 2002.

MACHADO, E. J. **Uso do ‘Bootstrap’ na estimação de parâmetros em modelos não-lineares: uma aplicação em mecanismos cinéticos de Michaelis-Menten**. 2006. 142 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2006.

MAIA, E. et al. Método de comparação de modelos de regressão não-lineares em bananeiras. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 39, n. 5, p. 1380-1386, ago. 2009.

MARTINS FILHO, S. et al. Abordagem bayesiana das curvas de crescimento de duas cultivares do feijoeiro. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 38, n. 6, p. 1516-1521, nov./dez. 2008.

MAZZINI, A. R. A. et al. Análise da curva de crescimento de Novilho Hereford. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 27, n. 5, p. 105-112, 2003.

MAZZINI, A. R. A. et al. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autoregressivos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 422-427, 2005.

MENDES, P. N. **Ajuste dos modelos gompertz e logístico na descrição das curvas de crescimento de tomates: uma abordagem bayesiana**. 2011. 83 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

MENDES, P. N. et al. Modelo logístico no estudo do crescimento de fêmeas da raça Hereford. **Ciência Animal Brasileira**, Goiânia, v. 38, n. 7, p. 454, p. 1984-1990, out. 2008.

MENDOÇA, W.; MEDEIROS, L. F. **Cultura do cajueiro, do coqueiro e do mamoeiro**. Mossoró: Universidade Federal Rural do Semiárido, 2011.

MENEZES, J. B.; ALVES, R. C. **Fisiologia e fisiologia e tecnologia pós-colheita do pedúnculo do cajú**. Fortaleza: MAARA, 1995.

MOURA, C. F. H. et al. **Qualidade pós-colheita de pedúnculos de clones de cajueiro-anão precoce em sete estádios de desenvolvimento**. Fortaleza: Embrapa Agroindústria Tropical, 2011.

OLIVEIRA, A. R. et al. Crescimento e conteúdo de nutrientes do cajueiro anão irrigado com águas salinas. **Revista Ambiente e Água**, Taubaté, v. 4, n. 3, p. 181-195, 2008.

OLIVEIRA, L.; BRANDÃO, A. J. V.; BASSANEZI, R. C. Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte. **Revista Biomatemática**, Campinas, v. 17, p. 101-109, ago. 2007.

OLOSO, A. O.; CLARKE, B. Some aspects of strength properties of cashew nuts. **Journal of Agricultural Engineering Research**, London, v. 55, n. 1, p. 27-43, May 1993.



PAIVA, F. F. A. et al. **Aproveitamento industrial do caju**. Fortaleza: Embrapa, 1996.

PARENTE, J. I. G.; SANTOS, J. H. R. A importância da cultura do cajueiro em especial para o nordeste brasileiro. **Correio Agrícola**, São Paulo, v. 3, n. 70, p.42-5, 1970.

PEREIRA, J. M.; MUNIZ, J. A.; SILVA, C. A. Nonlinear models top predict Nitrogen mineralization in na oxisol. **Scientia e Agricola**, Piracicaba, v. 62, n. 4, p. 395-400, July/Aug. 2005.

PRADO, T. K. L. et al. Ajuste do modelo logístico na descrição do crescimento de frutos de coqueiro anão por meio de algoritmos iterativos MCMC. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 31, n. 2, p. 216-232, 2012.

PRADO, T. K. L.; SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. Ajuste dos modelos Gompertz e logístico aos dados de crescimento de frutos de coco anão verde. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 43, n. 5, p. 803-809, May 2013.

PRATT, H.; MENDONZA, D. Influence of nut removal on growth na ripening of the cashew-apple. **Journal of the American Society for Horticultural Science**, Alexandria, v. 105, n. 4, p. 540-542, 1980.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 17 maio 2013.

RATKOWSI, D. A. **Nonlinear regression modeling**: a unified practical approach. New York: Marcel Dekker, 1983.

SAS INSTITUTE. **SAS/STAT ® user's guide**: version 8. Cary: SAS Institute, 1999.

SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. A study of in situ degradability: heterogeneity of variances and correlates errors. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v. 64, n. 5, p. 548-554, Sept./Oct. 2007.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: John Wiley, 1989.

SERVIÇO BRASILEIRO DE APOIO A MICRO E PEQUENAS EMPRESAS. **Estudo sectorialcajucultura**. Ceára: Embrapa, 2005.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality. **Biometrika**, Cambridge, v. 52, n. 3, p. 591-611, Dec. 1965.

SILVA, F. F.; AQUINO, L. H.; OLIVEIRA, A. I. G. Influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros das funções de crescimento em gado nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 25, n. 5, p. 1195-1205, set./out. 2001.

SOUSA, G. da S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não linear**. Brasília: Embrapa, 1998.

SOUSA, I. F. **Ajuste de modelos não lineares na descrição de germinação de sementes de café (*Coffea Arabica* L.)**. 2012. 74 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2012.

SOUZA FILHO, M. M. S. et al. Características químicas da amêndoa da castanha de diferentes clones do caju. **Ciência Agrônômica**, Fortaleza, v. 20, n. 1-2, p. 101-104, jun./dez. 1989.

STATISTICAL ANALYSYS SYSTEM INSTITUTE. **SAS procedures guide for computers**: volume 3. Cary: SAS Publishing, 1999.

TERRA, M. F.; MUNIZ, J. A.; SAVIAN, T. V. Ajuste dos modelos Logístico e Gompertz aos dados de crescimento de frutos de Tamareira anã. **Magistra**, Cruz das Almas, v. 22, n. 1, p. 1-7, jan./mar. 2010.

URCHEI, M. A.; RODRIGUES, J. D.; STONE, L.F. Análise de crescimento de duas cultivares de feijoeiro sob irrigação, em plantio direto e preparo convencional. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 35, n. 3, p. 497-506, mar. 2000.

WACHOWICZ, C. M.; CARVALHO, R. I. N. **Fisiologia vegetal e pós-colheita**. Curitiba: Champagnat, 2002.

WOLFINGER, R. D. Covariance structure selection in general mixed models. **Communications in Statistics**, London, v. 22, n. 4, p. 1079-1106, June 1993.

YAHIA, E. M. **Postharvest biology and technology of tropical and subtropical fruits**: volume 2. Amsterdam: Elsevier, 2001.